Préface

En mémoire de

Charles Warusfel (1897-1962),
Jean Itard (1902-1979),
Pierre Costabel (1912-1989).

En 1958, contre ma proposition de me diriger vers l'histoire des mathématiques, mon maître Henri Cartan préféra me conseiller l'enseignement, faute de carrières universitaires disponibles à cette époque. J'avisai donc Pierre Costabel, qui avait bien voulu me recevoir à la demande de Georges Canguilhem, de mon changement radical d'orientation en faveur des classes préparatoires, où je fus nommé dès ma sortie de l'École, à la grande joie de mon père, pourtant fou d'histoire, archiviste amateur opiniâtre, auteur d'un livre et de nombreux articles que j'admirais, rédigés en marge de son prenant travail administratif principal.

En 1964 me fut confiée la classe de mathématiques supérieures du lycée Henri IV. Mon ami Guy Béart m'ayant signalé qu'il y avait été élève de Jean Itard, je proposai à ce dernier, retraité, de reprendre un poste d'interrogateur régulier, ce qui permit de nombreuses rencontres étalées sur les dix dernières années de sa vie. Toujours en 1964, il voulut bien, à ma demande, confier aux éditions du Seuil un article pour le premier numéro de la nouvelle série du journal *Atomes*, qui deviendra *La Recherche* deux ans plus tard : c'était une étude prémonitoire sur *La Géométrie*...

En août 1976, j'achetai à New-York, pour six dollars, la traduction de ce livre qui deviendra si important à mes yeux, due à Smith et Latham, au départ pour y trouver matière à exercices originaux pour mes étudiants (ce fut le cas). Je l'ai lu, et relu, seul, pendant plus de dix ans, et me fis une religion : **il s'agissait d'un traité consacré à la résolution (graphique) de toutes les équations polynomiales grâce à un outil exceptionnel, forgé pour la circonstance, qui permettra à l'homme, au cours des siècles suivants, de créer les sciences quantitatives et quasiment d'atteindre le but qui lui avait été fixé au Premier Chapitre de la Genèse : dominer le monde**. Les mathématiques étaient closes, et ses neveux n'avaient plus qu'à appliquer ses techniques pour tout résoudre.

Je veux parler du calcul des coordonnées, invention exceptionnelle dont cependant il n'avait pas vu toute la puissance. Ce qu'il savait, c'était simplement que, outre la possibilité de définir et de construire un stock infini de courbes, il lui permettait - croyait-il - de donner une réponse définitive au problème de la recherche des racines des équations, mais aussi, grâce à cette technique, de ramener toute question de géométrie à un calcul, bref à mécaniser en quelque sorte les dernières questions ouvertes des mathématiques de son temps.

Un dîner organisé en 1988 par mon collègue et ami philosophe André Pessel - professeur de khâgne à Louis-Le-Grand qui me rejoignit plus tard à l'inspection générale - me permit de rencontrer l'un des membres de ce jury, Jean-Robert Armogathe, et de retrouver - hélas pour très peu de mois - Pierre Costabel. C'est à la suite de sa brutale disparition que me revint l'honneur de rédiger un article sur quelques pages de Mersenne pour les cahiers du *Corpus*, et de présenter le 2 juin 1990 une communication sur ce sujet dans la Salle des Actes de cette Université lors d'une journée organisée par le Centre Cartésien.

Je m'étais déjà un peu frotté de philosophie par un enseignement de logique du premier ordre, destiné aux étudiants de Louis-Le-Grand intéressés entre 1969 et 1988 (rencontrant ainsi les futurs Professeurs Carraud, Diagne, Kambouchner, Moreau, Szczeciniarz ...), réunissant pendant près de vingt ans deux casquettes *a priori* antinomiques de professeur : Taupe et Khâgne. Mais c'est par ce travail sur Mersenne que j'entrai dans ce groupe prestigieux, et fis notamment la connaissance du Professeur Jean-Marie Beyssade, de mon futur Directeur de thèse, Jean-Luc Marion, de l'Académie Française, et du Président de ce Jury, Michel Fichant, Professeur d'Histoire de la philosophie moderne à l'Université Paris-Sorbonne.

Ce que je dois aux personnes que je rencontrai en 1990, et dont trois me font aujourd'hui face, est immense, et je ne puis que dire ici ma fierté de solliciter leur jugement académique. C'est le Professeur Armogathe qui, le premier, me mit sur la voie d'un possible travail universitaire portant sur *L'Œuvre mathématique de Descartes*, en reconnaissant que mes denses fonctions d'enseignement retarderaient sans doute une soutenance de plusieurs années. J'acceptai bien entendu, et bâtis le plan d'une publication en deux volumes, respectivement intitulés *L'Œuvre mathématique de Descartes hors* La Géométrie, et *L'Œuvre mathématique de Descartes dans* La Géométrie, le total approchant les 1200 pages.

Bien entendu, mes nouveaux guides me firent alors découvrir toute une masse de documents cartésiens que je n'avais pas regardé, m'étant contenté de lire, à fond certes, un seul livre avec mes propres moyens limités. Devant ces textes, parfois contradictoires, de Liard, Milhaud, Alquié, Itard, Costabel, Rodis-Lewis, Beyssade, Marion, Bos (pour ne citer que ceux-là, mais la bibliographie concluant le travail que je soumets aujourd'hui montre combien ils ne furent pas mes sources uniques...), je dus battre en retraite et modifiai nettement mon point de vue initial sur *La Géométrie*, adoptant une attitude plus conservatrice : c'était une mise en œuvre de la Méthode, pour ne pas dire de la Mathesis universalis, fondée autour de l'invention des coordonnées et l'algébrisation de la géométrie classique qui en découle, alors que j'avais cru au contraire que c'était la géométrie qui était venue à la rescousse de l'algèbre. C'est à cette époque aussi que je m'initiai fortement à la science antique grecque, par le recours aux textes, en collectionnant - et creusant sans cesse - les traductions classiques des Heath, Ver Eecke et Vitrac par exemple, indispensables à qui veut connaître tant soit peu la science de Viète à Leibniz.

C'est également à la suite de la regrettable disparition du Père Costabel que je me vis proposer, par les Professeurs Jean-Marie Beyssade et Jean-Luc Marion, de collaborer à la publication prévue dans la bibliothèque de la Pléiade des œuvres complètes de Descartes, actuellement en cours sous la forme de sept volumes de la collection Tel de Gallimard, et également de participer le 29 mars 1996, par le biais d'un exposé dans l'impressionnant Grand Amphithéâtre de cette maison, au quadricentenaire de sa naissance.

Il s'agissait là de grands honneurs, dont je ne pense pas avoir été nécessairement digne. Cela dit, la préparation de ces différents textes m'obligea à revoir de très près, crayon main, le texte lui-même : finalement, l'abandon de mes premières thèses sur ce qu'est *La Géométrie* me parut peu à peu comme moins nécessaire, voire même quelque peu regrettable sur certains points pour lesquels mes lectures m'apparaissaient parfois comme confortant mes premières intuitions.

Vingt ans donc après l'achat de mon premier exemplaire de ce texte envoûtant, devenu par l'effet de beaucoup de patience, et d'une certaine humilité, un peu plus compétent sur un sujet plus difficile qu'il n'y paraît, j'eus l'audace de demander deux faveurs au Professeur Marion : celle de limiter, pour des raisons dues à mon âge, la soutenance au second volume, à savoir *La Géométrie* elle-même, et surtout la permission d'y revenir, pour l'essentiel, à mes anciennes convictions personnelles sur sa signification profonde, au moins présentées comme une grille de lecture réglant certains problèmes, et non des moindres, comme l'énigme de la structure des trois Livres. Qu'il soit ici très vivement remercié pour avoir répondu positivement à mes demandes.

Il a ainsi rendu possible la tenue, en ce jour, de ce passage rituel si important pour moi, même si la publication envisagée - vers 2012 - d'une étude plus générale et complète (touchant aux *Éléments des Solides*, aux *Regulæ* et à de nombreux autres sujets) reste l'horizon de mon travail sur Descartes mathématicien. Au contenu du deuxième volume en projet, j'ai ajouté en annexe un chapitre extrait du premier, qui apporte une vue singulière à partir d'un texte méconnu de 1641, originale semble-t-il, sur les rapports de Descartes avec la science géométrique au sens strict du mot et allant dans le sens de la grille de lecture que je propose : voilà le contenu de cette thèse.

Cette Préface a fait, jusqu'à présent, part belle - et parfaitement justifiée - aux cartésiens de mon déjà long passé, et tout particulièrement à ceux qui siègent dans ce jury. Cela dit, il va évidemment de soi que la présence à ce bureau de trois mathématiciens, dont bien sûr au tout premier rang Alain Connes, médaillé Fields, Professeur au Collège de France et membre de l'Institut, qui a bien voulu grandement m'honorer en abandonnant quelques instants ses mathématiques de très haut niveau pour se pencher dans la lecture critique d'un travail consacré aux débuts de la mathématique des temps modernes, apporte un singulier plus à cet aréopage.

Les deux compagnons du Professeur Connes sont le Professeur Jean-Pierre Desclés, spécialiste à Paris IV des mathématiques pour les sciences humaines, ancien Directeur de l'école doctorale *Concepts et Langages*, rompu à la double culture, et le Professeur émérite Jean Dhombres, qui a su ajouter à une thèse traditionnelle en analyse fonctionnelle d'innombrables travaux érudits sur l'histoire des mathématiques : je me plais à voir ici ce dernier comme représentant ses trois glorieux anciens Milhaud, Itard et Costabel, passés comme lui d'une rive à l'autre, et dont nous l'absence nous pèse. Qu'ils en soient tous trois tout particulièrement remerciés ici, même si leurs critiques évidemment justifiées seront certainement sans indulgence, et donc éminemment profitables.

Que ces six juges soient fortement salués pour avoir pris sans compter de leur temps, et accepté d'apporter leurs lumières à ce travail qui se veut utile pour que les générations suivantes puissent entrer plus facilement dans un livre aussi redoutable que passionnant.

Mais bien entendu tous ces remerciements seraient cruellement incomplets si je ne leur ajoutais ceux que je dois adresser tout particulièrement à mon épouse, qui m'aide depuis quarante ans à mieux comprendre le monde littéraire - comme on disait rue d'Ulm - *a priori* si différent du mien et pourtant si proche, et plus généralement à un environnement familial qui m'a permis de trouver le calme et le courage pour m'atteler à une tâche si lourde, dans le souvenir des talents incomplètement exploités de mon père à cause d'un siècle dont les cinquante premières années furent si dures. À tous l'expression de ma vive gratitude : qu'ils veuillent bien agréer l'expression de mon désir d'avoir pu, grâce à eux, être utile en m'attaquant à un sujet, si visiblement important, et posant néanmoins encore tant de questions ouvertes.

Ce 3 mai 2010, *André Warusfel*

Chapitre 1

Introduction à *La Géométrie*

La Géométrie est le dernier *Essai* accompagnant le *Discours de la Méthode*, paru en 1637 chez Ian Maire, et première œuvre publiée [1] par Descartes ; il est le moins connu et surtout le plus difficile à lire des trois. On n'en possède aucun manuscrit ; le livre ne figura pas dans la version latine autorisée de 1644 du *Discours* par Étienne de Courcelles, ce qui diminuera de beaucoup son influence immédiate, même s'il fut traduit en 1649 par Frans Van Schooten.

Écrit en français, il n'a pas été souvent édité dans sa langue originale depuis 1637 : il a fallu attendre 1664 et 1705 pour assurer une grande diffusion de ce texte. Aujourd'hui, on le trouve essentiellement dans le volume VI de la grande édition des *Œuvres complètes* de Descartes par Charles Adam et Paul Tannery [2]. À ce monument bien connu [3], ajoutons naturellement une publication du *Discours* en 1986 chez Fayard, sous la direction de Jean-Robert Armogathe, ou la réédition par Jacques Gabay en 1991 du texte établi par Célestin de Blignières chez Hermann en 1886. Mais il faut aussi noter une autre édition récente, parue en 2009 chez Gallimard dans la collection *Tel* (vol. III), cette fois-ci précédée d'une introduction et suivie de notes dues à l'auteur de ce travail. Signalons également la parution imminente d'une édition scientifique de *La Géométrie* dans la collection *Épiméthée* des Presses Universitaires de France dirigée par Jean-Luc Marion [4].

---

1. De façon absolument anonyme.
2. Existant notamment en petit format depuis 1996.
3. Auquel nous nous référerons systématiquement en indiquant, à côté de celle des *Essais*, sa pagination pour faciliter les retours au texte original.
4. Il faut notamment ajouter à ces livres les traductions latines de Van Schooten depuis

Grand livre ou travail contestable ?

Même s'il existe une sorte de consensus bien pensant pour reconnaître à notre essai un rôle important, par exemple comme écrin d'un joyau unique [5], ce Traité - un « **un tout pur de Mathematique** [6] » - a été attaqué, notamment par Leibniz, qui avec Newton construira à la fin du dix-septième siècle une nouvelle mathématique basée sur l'Analyse et non plus sur l'Algèbre et/ou la Géométrie. Lisons son *Projet et Essais pour arriver à quelques certitudes pour finir une bonne partie des disputes et pour avancer l'art d'inventer*, page 181 des *Opuscules* dû à Louis Couturat en 1903

« *Il faut savoir que l'Algebre, l'Analyse de Viete et des Cartes est plus tost l'Analyse des Nombres que des lignes : quoy qu'on y reduit la Geometrie indirectement, en tant que toutes lees grandeurs peuvent estre exprimees par Nombres ; mais cela oblige a de grands detours, et quelques souvent les Geometres peuvent demontrer en peu de mots, ce qui est fort long par la voye du calcul. Et quand on a trouvé une equation, dans quelque probleme difficile, il s'en faut beaucoup qu'on aye pour cela une demonstration courte et belle construction du probleme telle qu'on desire, la voye de l'Algebre en Geometrie soit assurée mais elle n'est pas la meilleure, et c'est comme si pour aller d'un lieu à l'autre on voulait toujours suivre le cours des rivières.* »

Ce texte est signalé par Yvon Belaval en la page 364 de son *Leibniz critique de Descartes*. Nous nous limiterons à deux longs chapitres [7] de ce livre qui étudie les différends entre les deux philosophes-mathématiciens. L'auteur partage les griefs du cadet par rapport à un aîné à qui il reproche d'être surtout un algébriste [8] n'ayant pas prévu l'irruption de l'infini dans les mathématiques.

1649 jusqu'en 1683, la reprise chez Dover d'une traduction anglaise face à une reproduction photographique de l'original due à Smith et Latham, et l'édition italienne du *Discours* en 1987 à Lecce, suivie de celle des œuvres complètes sous la direction de Giulia Belgioioso chez Bompiani en 2009.

5. Nous faisons naturellement allusion à la découverte des coordonnées, mise ici pour la première fois par écrit, même si elle a été partagée avec Fermat alors encore muet.

6. *Cf.* AT I p. 369 LXXIV, lettre de Descartes en mai 1637, peut-être pour l'abbé académicien Germain Habert de Cérizy [Clersellier I p. 493 CX].

7. Cent soixante-dix pages : *IV Géométrisme cartésien et arithmétisme leibnizien*, pp. 199-278 et *V La géométrie algébrique et le calcul infinitésimal*, pp. 279-368.

8. Position que nous partageons, mais évidemment sans en faire un argument négatif !

Nous nous contenterons de citer quelques extraits ; les commenter - ainsi que ceux d'autres contestataires moins célèbres - demanderait de longues pages. De toutes manières, nous nous sommes volontairement limité [9] à donner un éclairage de *La Géométrie* par l'étude de son texte et les références inévitables au passé, apollonien notamment, mais sans scruter systématiquement les réactions qu'il suscitera entre 1637 et nos jours. Il était cependant utile, sur le seuil de notre étude, de ne pas cacher ces réactions, parfois très acceptables comme la suivante, en page 285

« *En d'autres termes, la géométrie, juxtaposée encore à l'Algèbre dans les* Regulæ, *lui devient subordonnée dans la* Géométrie, *par la géométrie analytique* »

ou, en page 300

« *On s'en est étonné : Descartes, peu enclin à diminuer ses mérites, ne semble pas avoir aperçu l'originalité de sa Géométrie analytique et "n'est pas loin de présenter son œuvre essentielle comme le meilleur de l'Analyse des Grecs, traduit seulement dans le langage simplifié dont il dote l'Algèbre* [10]*"* [...] *Incontestablement, Descartes ne se fait pas gloire de sa géométrie analytique parce qu'il a conscience de rester fidèle à la méthode des anciens* »

voire en page 286

« *On ne doit pas perdre de vue que Descartes ne s'intéresse pas aux mathématiques pour elles-mêmes, mais, d'une part, pour y trouver un modèle de certitude, la clef d'une méthode, d'autre part pour les appliquer à la connaissance du monde étendu. Son projet est de physicien,* »

mais surtout souvent très agressives et très discutables, comme en page 292

« *La Géométrie - entendez : l'ouvrage de ce nom - étant ce qu'il estime le moins en Mons. des Cartes, Leibniz en critique sévèrement l'algèbre et les insuffisances de son application à la géométrie. En fait, médit-il, après Roberval, Descartes est un algébriste médiocre qui a plagié à tel point Harriot qu'à peu près la moitié du Livre III de la* Géométrie *semble transcrite de l'auteur*

9. À quelques rares exceptions près.
10. Gaston Milhaud, *Descartes savant*, p. 141.

anglais [...] *Le seul mérite de Descartes est d'avoir, par des équations, exprimé la nature des courbes dépassant le deuxième degré. En revanche, par son prestige, Descartes qui a si peu enrichi l'algèbre a fait croire à ses sectateurs qu'il laissait achevée cette science : ici encore les cartésiens montrent combien le sectarisme est contraire au progrès, puisque, sauf Hudde et Sluse, aucun d'eux ne l'a perfectionné ; et d'ailleurs les progrès en cette matière proviennent tous des mathématiciens qui, comme Leibniz, relèvent de la tradition d'Archimède, et non de ceux qui, comme Descartes, suivent la tradition d'Apollonius,* »

en page 298

« *Ainsi Descartes s'est trompé et sa* Mathesis generalis *n'est en réalité qu'une partie de la* Mathesis generalis, »

ou en page 321

« *En bref, nous le savons déjà, Descartes n'a su ni comprendre ni établir une exacte correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie, il n'a pas achevé l'Analyse véritable.* »

Nous terminerons par la très dure page 529, basée sur les références suivantes signalées par Couturat lui-même (*Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz* éd. Carl Immanuel Gerhardt, vol. IV, pp. 276, 278, 282, 301, 306, 330...)

« *Avec ses règles tant vantées, le* Discours *promet un trésor et il n'étale devant nous que des charbons. On le voit bien par la* Géométrie. *Lié à la soi-disant évidence, Descartes n'a pas connu l'Analyse supérieure. Il se borne, dans la tradition apollonienne, à mesurer des longueurs : il n'a pas assez médité les adresses d'Archimède. En excluant la considération de l'infini, il excluait les expressions par séries infinies dont il aurait contesté l'exactitude ; il devait échouer devant les transcendantes. Il a cru, ce qui est entièrement faux, que tous les problèmes se peuvent réduire à des équations : cette* Géométrie *n'est propre "qu'à chercher des petits problèmes", bien loin d'autoriser Descartes à y parler, comme il le fait, "avec une hauteur insupportable".* »

Le lecteur pourra se faire une idée personnelle sur ces commentaires acides, désagréables et généralement fort discutables de Leibniz repris à son compte par Belaval, s'il veut bien parcourir la suite de ce chapitre et, surtout, entrer dans le texte par lui-même.

Tout notre travail n'a pas d'autre but que de faciliter cette étape, difficile, mais nécessaire.

Traité sur les courbes, ou sur les équations ?

La question ici posée est évidemment essentielle pour la compréhension du travail de Descartes. Si la lecture de son livre est sans ambiguïté - on comprend toujours exactement de quoi il parle à une page donnée -, reconstituer quel fut son but en s'attelant à sa rédaction est autrement plus délicat à régler : est-ce même sensé ? Le livre est sans doute les deux à la fois...

Qu'il suffise de dire ici que la majorité des commentateurs penchent pour lui donner un contenu essentiellement tourné vers la géométrie, ne serait-ce qu'à cause de son titre. D'autres imaginent au contraire qu'il s'agit ici du « point final » (ou en tout cas rêvé comme tel) au problème antique de la résolution des équations. Il n'y a pas unanimité, loin s'en faut.

Une ébauche de solution de cette question se trouve sans doute dans la lecture de la *Table des Matières* de Descartes : dans la première hypothèse elle apparaît comme assez incohérente, surtout en ce qui concerne l'introduction du tracé des normales aux courbes algébriques et à ses applications aux Ovales de Descartes, qui semblent tomber de façon incongrue à la fin du Livre Second ; l'autre point de vue - illustré par la réécriture de cette table à laquelle nous avons procédé au début du dernier chapitre de ce livre - permet au contraire de retrouver une logique beaucoup plus forte dans l'étude de la structure de *La Géométrie*, qui cesserait en grande partie d'être une énigme pour ses lecteurs les plus attentifs. Nous nous permettons donc de renvoyer à cette consultation ; cela dit, pour pouvoir en observer avec plus d'acuité la justesse, il vaut sans doute mieux avoir auparavant examiné, dans les chapitres intermédiaires, ce qu'est une lecture d'aujourd'hui des mathématiques cartésiennes dans son grand Traité.

C'est un texte réputé, à juste titre, pour être plutôt obscur. L'orgueilleux avertissement qui le précède nous met bien en garde : par manque de temps peut-être, mais surtout par choix, Descartes n'a pas cherché à être ici le plus clair possible, et plus de trois siècles ont accentué la réelle difficulté du Traité. À cela il faut ajouter les brusques variations de sujet d'étude qu'impose Descartes en semblant changer brutalement le cours de sa pensée tout au long de ces trop courtes 117 pages de l'édition originale. Ces virages à angle droit rendent parfois pour le moins déroutant le plan de l'essai, dont les intentions restent le plus souvent cachées, au moins au lecteur qui parcourrait, seul et sans guide, ce labyrinthe plutôt touffu au premier regard.

Aussi ce livre, si souvent cité mais généralement de seconde main, est-il en fait très peu connu du public cultivé francophone. La longueur sans doute insolite de cette introduction et des chapitres suivants répond au désir de rendre abordable le contenu d'un Traité capital, non seulement pour l'histoire des sciences, mais aussi pour certaines spécificités de la pensée française, même si son influence immédiate n'a pu être, pour les raisons dites plus haut, qu'essentiellement indirecte.

Si ce texte a été fécond, ce n'est pas par ce que Descartes y avait placé en pensant avoir, peu ou prou, mis au point l'état définitif des mathématiques de tous les temps. Une certaine part des résultats qu'il y expose sont aujourd'hui bien oubliés mais non, heureusement, les méthodes puissantes et si nouvelles qu'il y emploie, les inventant pour les besoins de la cause s'il le fallait. En quelque sorte, le génie cartésien mathématique, qui vient aussitôt après ceux de Fermat et de Pascal parmi ses contemporains directs, s'est manifesté « à côté » de ce qu'il croyait être son chef d'œuvre - la résolution graphique des équations algébriques de tous degrés -, et son importance séminale, dont l'auteur était évidemment conscient, ne résidait pas exactement là où il le pensait. Les quelques pages qui suivent ont pour but d'essayer d'aider à comprendre la profonde originalité de sa démarche dans sa science de prédilection, mais aussi de démêler pour les non-spécialistes en quoi certaines recherches et triomphes (réels ou supposés) de la somme cartésienne sont encore aujourd'hui si importants pour tous.

Lire de nos jours *La Géométrie* ne demande que la maîtrise de quelques domaines élémentaires des mathématiques. Si l'on accepte de laisser de côté les développements techniques sur le Problème de Pappus dont nous parlerons plus loin (pour lequel des éléments de théorie générale des coniques sont indispensables), ainsi que la lourde théorie des *Ovales*, une bonne familiarité avec le calcul algébrique ordinaire sur les polynômes et quelques notions géométriques de base sur le cercle et la parabole suffisent largement.

Il faut surtout beaucoup de patience, et une certaine humilité pour accepter la pensée d'un chercheur né il y a quatre cents ans qui s'était par avance refusé à être un auteur facile. Après une première lecture qui ne peut guère être qu'un débroussaillage, une seconde étude plus sereine sera celle de la véritable compréhension d'un texte qui, pour avoir été au plus haut point fécond, exige d'être pénétré avec respect et détermination. Il en vaut la peine, même si la rédaction de 1637 aurait gagné à être mieux préparée en vue de l'édition. Cette désinvolture de l'auteur n'a rien à voir avec le fait que l'imprimeur ignorait le français (ce qui n'arrangeait pas les choses) ; il s'agit là d'un travail de mise au point préliminaire du manuscrit qui, pour des raisons qui nous échappent, n'a pas été fait sérieusement, ce qui ne va pas parfois sans conséquences fâcheuses quant à sa lisibilité.

Pourquoi *La Géométrie* a-t-elle été écrite

La Géométrie est un **traité de mathématiques** formé de trois Livres de 18, 54 et 45 pages [11]. Paru de son vivant, c'est essentiellement le seul ouvrage mathématique de Descartes [12]. Rédigé dans la hâte en 1637, il a été conçu bien auparavant : certaines méthodes ou résultats datent clairement des années vingt. Son contenu peut être considéré, d'une certaine façon, comme un travail préliminaire aux *Regulæ* dans la mesure où en 1628 Descartes possédait déjà quelques idées sur sa façon de renouveler les mathématiques, et surtout au *Discours*, qu'il a profondément influencé.

C'est une œuvre d'une originalité technique exceptionnelle, tranchant résolument sur tous les autres Traités scientifiques, passés ou futurs. C'est surtout, dans l'esprit de Descartes pensons-nous, un livre destiné à montrer au monde que les mathématiques étaient désormais closes, et closes par lui qui en avait résolu le dernier problème essentiel [13]. Il ne trouverait donc plus jamais dans cette science de défi assez fort pour y puiser encore quelque

11. Dans l'édition originale.

12. Les autres textes consacrés à cette discipline que nous lui connaissons consistent en des lettres ou des fragments publiés de façon posthume.

13. La résolution par des techniques géométriques des équations polynomiales $P(x) = 0$.

intérêt, comme le montre sa déclaration « *N'attendez plus rien de moi en Géométrie ; car vous savez qu'il y a longtemps que je proteste de ne m'y vouloir plus exercer, et je pense pouvoir honnêtement y mettre fin* [14] ».

Pierre Boutroux dit même [15] que la mathématique, pour Descartes, est « désormais à la portée du premier venu ». Et ce dernier affirme encore sans nuances (pages 302 des *Essais* et 374 de AT VI) que, grâce à un peu d'algèbre, il n'y a « *rien de si difficile que ceux* [...] *qui prendront garde à tout ce qui est dans ce traité, ne puissent trouver* » en mathématiques. D'où l'aveu final, bien désarmant de naïveté : « *les démonstrations* [...] *m'ont semblé si faciles* » (pages 389 des *Essais* et 464 de AT VI). Pour lui et grâce à lui, les mathématiques sont achevées, au sens de sa Règle VII, et par l'énumération justement introduite dans son énoncé. « *Adeo ut pene nihil in Geometria supersit inveniendum* » (il ne restera presque rien à trouver en Géométrie : lettre à Beeckman, 26/3/19, AT X 157).

Que ce livre soit, pour lui au moins, un adieu et un acte de décès est aussi corroboré, par exemple, par d'autres lettres à Mersenne (15/4/30, AT I 139, mais aussi 31/3/38, AT II 95, 27/5/38, AT II 149, 13/7/38, AT II 268 et, évidemment, 12/9/38, AT II 361).

Mais cette disparition supposée ne concerne que les mathématiques elles-mêmes, et nullement la méthode générale de pensée qui les sous-tend et reste la pierre angulaire de sa Méthode, avant de devenir celle de sa *mathématique universelle*, qui dépasse de beaucoup le simple raisonnement numérico-géométrique et dont la portée est beaucoup plus vaste [16]. Le reste de l'histoire de cette science, où des progrès ne peuvent éventuellement encore être envisagés que dans des domaines qui lui semblaient accessoires comme l'Arithmétique, ne pouvait pour lui apparaître désormais comme important [17] ; cette délicieuse illusion de la fin des mathématiques sera retrouvée à maintes époques de l'Histoire. Il est juste bon pour les « neveux » que de continuer dans la voie qui a été à tout jamais ouverte par *La Géométrie*, et ce pour ce qui ne devrait plus être après lui que simples promenades.

14. Lettre du 12/9/38 à Mersenne (AT II 361-362).
15. *L'idéal scientifique des mathématiciens*, 1920, p. 102.
16. À supposer qu'il ait pu croire un jour réalisable ce projet ambitieux, dont il ne parlera plus explicitement après la rédaction des *Regulæ* qui ne verront le jour qu'en 1701.
17. Voir la lettre à Mersenne de 12/37, AT I 480.

À part l'exposé de sa méthode générale qui résolvait la dernière énigme et constitue le cœur même de la démarche cartésienne, le livre contient essentiellement la description précise de tout le matériel géométrique et algébrique dont il a eu besoin. En étudiant de manière précise le plan de l'ouvrage, nous trouverons néanmoins ce qui apparaît *a priori* comme une exception majeure : la règle de construction des normales. En fait, Descartes l'a introduite ici, non seulement par admiration pour ce qui lui paraît un résultat sans précédent d'une remarquable qualité, mais surtout pour pouvoir justifier pleinement ses affirmations de *La Dioptrique* concernant l'utilisation des Ovales de son invention, introduisant ainsi un second algorithme, destiné pour sa part à mettre le point final à l'étude de la réfraction née de sa propre loi des sinus [18], et - ceci est capital - parce que son examen était rendu nécessaire par le concept même de *racine multiple* d'une équation.

Une autre exception troublant l'homogénéité de l'œuvre consiste en l'étude du fameux *Problème de Pappus*, sur lequel il revient deux fois : la première est l'occasion de définir comment ramener un problème géométrique à des calculs sur des nombres en introduisant le concept de coordonnées (et ce n'est certes pas le moindre passage de l'ouvrage) tout en donnant un moyen automatique de concevoir une infinité de courbes totalement hors du champ des géomètres de l'Antiquité ; et la seconde justifie l'intérêt de cette technique en prouvant qu'un lieu de Pappus « à quatre droites » est en général une conique, résultat connu des Anciens mais dont la démonstration semblait manquer jusqu'alors. Même si l'examen de ce problème prend une part non négligeable des deux premiers Livres, son importance est telle qu'il est difficile de lui contester une place dans le cadre de la description de deux algorithmes originaux entièrement basés sur une notion, celle de *coordonnées*, évidemment totalement inconnue et même impensable avant la publication de 1637.

Ces deux compléments mis à part mais reconnus comme assez importants pour mériter leur place, nous verrons que, si l'on accepte notre lecture du Traité, son plan général (souvent considéré comme chaotique, voire quelque peu mystérieux) apparaîtra au contraire comme construit avec cohérence, rigueur et lucidité.

18. Problème de nature essentiellement physique, mais soluble seulement par les mathématiques.

Ce que n'est pas *La Géométrie*

Ce livre est-il bien finalement un *Essai* du *Discours*[19] ? La réponse est, de manière surprenante, en grande partie négative. Dénombrer, classer, ordonner : ces procédés sont utilisés systématiquement, mais sans référence précise à la lettre des préceptes. Donnons juste un exemple (page 401 des *Essais* et 475 de AT VI) : « *dénombrement de toutes les voies* [...] *suffisant pour démontrer qu'on a choisi la plus générale, et la plus simple* ». Il ne serait pas facile d'exhiber beaucoup de citations explicites de ce type. De toutes façons, nous savons que l'*Essai* a été écrit pour l'essentiel plusieurs années avant le *Discours*, mais non pas avant 1619, date des événements (« *J'étais alors en Allemagne* ») que prétend rapporter dix-huit ans plus tard le *Discours* qui attribue les quatre préceptes à cet hiver en Bavière.

Par ailleurs, en dépit de son titre si facile à porter à la confusion (ou de la lecture moderne que nous en faisons), *La Géométrie* n'est pas un Traité de géométrie, science du point et des figures, comportant des listes de théorèmes comme ceux que l'on trouve chez Euclide et ses successeurs. Descartes n'est au demeurant l'auteur que d'un seul théorème de géométrie (qui porte son nom accolé à celui d'Euler), énoncé qui ne figure pas dans ce livre. Cela dit, son influence sur la géométrie moderne - à partir du dix-huitième siècle - a été sans égale, mais pour ainsi dire par raccroc.

Contrairement à l'opinion reçue, *La Géométrie* n'est pas non plus un Traité de *géométrie analytique* encore appelée *géométrie cartésienne*, technique ramenant toute démonstration sur les figures à un calcul, même si c'est là qu'elle apparaît pour la première fois dans un texte imprimé. Comme son autre inventeur (Pierre Fermat), Descartes n'en avait d'ailleurs compris l'importance que de façon très partielle, même si cela peut stupéfier aujourd'hui. Les coordonnées, encore qualifiées aujourd'hui à juste titre de *cartésiennes*, y trouvent bien là comme chacun sait leur acte de baptême, mais presque en catimini (page 310 des *Essais* et 383 de AT VI) : un lecteur rapide a toutes chances de ne pas les y apercevoir.

Ce dernier point, qui étonne toujours le néophyte, est prouvé par le fait même que l'on n'y trouve nulle part quelque chose du genre « *Nous appellerons*

19. Les pages qui suivent constituent un développement de la *Présentation*, par l'auteur, de *La Géométrie* dans le volume III des *Œuvres complètes* de Descartes chez Gallimard.

abscisse et ordonnée les deux nombres x et y tels que ... », ni de règles de changement d'axes [20], ni de formules donnant, par exemple, l'équation générale d'une droite ou d'un cercle.

D'autre part, ses x et y ne sont pas toujours exactement ce que nous appelons maintenant une abscisse et une ordonnée, comme le montre son étude des *Ovales* portant son nom. Cela l'empêchera notamment de concevoir ce qu'est une fonction, notion capitale encore à naître, qui ne sera, il est vrai, complètement claire que trois siècles plus tard. D'autre part encore, le fait de ne pas se servir de coordonnées négatives montre bien qu'il ne cherchait pas à faire de sa géométrie analytique un corpus complet et cohérent, mais qu'il ne s'agissait pour lui que d'un outil indispensable à la construction d'une nouvelle famille infinie de courbes utilisables dans l'algorithme fondamental de résolution des équations. Que ces deux petites lettres aient permis la numérisation de la physique et, partant, la domestication de la Nature qui occupera tellement l'Homme jusqu'à nos jours, restera très certainement inconnu de Descartes jusqu'à sa mort, même si l'on peut espérer qu'il en ait eu le désir inconscient.

Les finalités du Traité

Puisque nous avons écarté la possibilité que cet *Essai* soit un cours de Géométrie, classique ou moderne, il faut bien proposer une interprétation du texte qui remplace le lieu commun et justifie le projet cartésien de point final aux mathématiques [21], à savoir la solution complète du dernier problème qui restait encore face aux mathématiciens. On peut raisonnablement croire que cette question ultime, qui semblait réglée par Descartes et assez importante pour lui ouvrir le Panthéon d'Euclide et d'Archimède, était la suivante : **trouver une méthode de résolution générale des équations algébriques**, c'est-à-dire exhiber un algorithme permettant, étant donné un polynôme $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ écrit dans le système de notation justement introduit par ce Traité, permettant d'en expliciter les racines, définies comme étant les nombres z satisfaisant à l'égalité $P(z) = 0$.

20. Qu'il connaît pourtant au moins de façon heuristique : voir la lettre sur le Galand du 23/8/1638 à Mersenne (AT II 336).

21. Le mot de géométrie possédait d'ailleurs également un sens très général, englobant l'algèbre, comme le montre par exemple un texte fameux de Pascal sur l'esprit de finesse.

De la géométrie elle-même, portée à la perfection par Euclide, Apollonius et leurs successeurs, il n'y avait plus rien à attendre de fondamental. Il est bien exact que des théorèmes aussi simples et lumineux que ceux qui fondent les traités anciens seront rarement découverts à l'époque moderne : tout au plus peut-on citer l'*hexagramme mystique* de son contemporain Blaise Pascal, la théorie eulérienne de la droite qui porte son nom, certains résultats concernant les foyers et la polarité par rapport aux coniques dus au général napoléonien Poncelet, le théorème de Morley vers 1900 et enfin quelques résultats épars dans les deux derniers siècles obtenus grâce à l'usage intensif de transformations inconnues des Grecs (comme l'inversion).

Il est donc vrai que, pour l'essentiel, la science des figures planes ou solides était acquise trois siècles avant notre ère. Par contre, l'exploration des différents types de nombres n'avait pas été portée au même degré de perfection, mis à part quelques résultats fondamentaux sur l'arithmétique des entiers naturels, qui donneront naissance à la Théorie des Nombres à partir du dix-septième siècle [22]. Puisque l'Analyse, science des variations numériques à travers la Théorie des Fonctions, n'était pas encore née - elle ne prendra corps que trente ans plus tard, avec la révolution newto-leibnizienne et prendra plus de deux siècles avant d'être enfin clarifiée dans ses fondements -, l'étude de ce que nous appelons aujourd'hui curieusement l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres *réels* ne pouvait alors être entreprise que par le biais de la notion d'équation et des racines qui lui sont associées. De cette analyse à venir, Descartes ne devine pas le destin. Il cache dans son Traité tout ce qu'il sait sur les indivisibles [23], parce qu'ils manquent à son avis de fondement. Il avait parfaitement raison d'être prudent, en théorie, mais s'il avait osé ... peut-être aurait-il fondé le calcul différentiel et intégral. En tout cas Leibniz ne pouvait lui reprocher son manque de divination sans quelque mauvaise foi.

Descartes ne connaît, au moins dans ce premier et unique livre, que la géométrie (points et figures) et l'algèbre (nombres et équations) ; la première est grecque, la seconde finalement bien plus moderne, et plus importante à ses yeux. Il vient après Viète en algèbre, après Apollonius en géométrie ; au premier il empruntera quelques techniques sur les équations, mais assure l'avoir très largement dépassé (lettre de 12/37, AT I 479) ; du second auquel il empruntera ses définitions des coniques, déjà exprimées dans une

22. Notamment grâce au grand rival de Descartes qu'était Fermat.
23. Et qui est important : *cf.* sa *Correspondance*, AT II 136, 248 mais surtout 309.

sorte de géométrie cartésienne fort singulière, il transformera ce qui n'était qu'une « astuce » commode (l'équation d'une conique dans des axes liés à la courbe, pour étudier une figure très particulière) en une méthode générale toute puissante, dont la force réelle ne lui apparaîtra sans doute jamais.

Ce qu'il fait dans *La Géométrie*, c'est simplement **souder à jamais algèbre et géométrie** - donc toute la mathématique qu'il connaissait, conformément à son époque, la profonde influence de la découverte des logarithmes en 1614 étant encore trop balbutiante - *en plaçant la seconde sous l'autorité définitive de la première*[24]. Leibniz dit de Malebranche, pour s'en moquer : « *il croit l'Algèbre la première et la plus sublime des sciences* » dans une lettre à Tschirnhaus de décembre 1684. Pierre Boutroux traite d'ailleurs pour cela Descartes de « *premier parmi* [...] *les algébristes du XVIIème siècle* » (*L'idéal des mathématiciens*, p. 110). Le lien est évidemment l'emploi de la géométrie analytique, véritable opération de « chiffrement » des figures (selon l'heureuse expression de Pierre Costabel), mais la relation entre les deux disciplines est assez complexe.

• D'un côté **la géométrie est soumise à l'algèbre**, car tout problème la concernant est désormais (théoriquement) ramené à une simple vérification sur des nombres - c'est évidemment le point de vue traditionnel sur l'invention de la géométrie cartésienne. Mais d'un autre côté **la géométrie rend un service inestimable à l'algèbre** en réglant le « dernier problème » des mathématiques : expliciter par une méthode graphique les racines d'un polynôme arbitraire.

• En retour **l'algèbre conquérante paie ses dettes à la géométrie**, permettant de répondre à toutes les questions que pose une courbe, comme sa construction point par point à partir de son équation, ou l'algorithme de détermination de ses tangentes (« *Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus utile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye jamais désiré de sçavoir en Geometrie* », pages 342 des *Essais*, 413 de AT VI), qui apporte la brillante solution à une importante question de Physique et constitue justement la seule exception apparente, déjà signalée plus haut, à l'homogénéité d'un projet en principe tout entier tendu vers la résolution générale des équations algébriques.

24. Qu'il appellera « *mon Algèbre* », dans sa lettre à Mersenne de 12/37, AT I 479.

L'algorithme central de *La Géométrie*

Les équations de degré un et deux avaient été maîtrisées dès l'antiquité, et forment encore aujourd'hui la partie minimale des techniques exigibles d'un lycéen du monde entier : il suffit que chacun se souvienne du fameux symbole $\Delta = b^2 - 4ac$, qui permet théoriquement et pratiquement de déterminer les racines du polynôme ax^2+bx+c. Par contre, les équations de degré supérieur résistèrent si longtemps aux efforts des théoriciens que, seules, les résolutions de celles des troisième et quatrième degré purent être connues de Descartes, et encore cette prouesse doit-elle être datée de moins d'un siècle seulement avant *La Géométrie*[25].

Encouragée malgré tout par cette avancée significative, la recherche d'une méthode générale s'appliquant à toutes les équations $P(z) = 0$ était donc le problème majeur qui restait comme un défi infranchissable. Descartes crut sans aucune doute toute sa vie l'avoir résolu ; son Traité est, comme nous le montrerons, entièrement dédié à l'exposé de son *tour de force* : l'algorithme de résolution graphique de *toutes* les équations algébriques par *intersection d'un cercle et d'une famille de courbes nouvelles* nées d'une créativité et d'une liberté de penser exceptionnelles.

Si l'on sait aujourd'hui qu'il a été beaucoup trop présomptueux sur ce point, du moins devons-nous reconnaître que son effort l'a conduit, chemin faisant, à de telles découvertes que *La Géométrie* est, malgré son échec technique final au delà du degré six, l'un des livres de mathématiques les plus stimulants jamais écrits.

Comment déterminer graphiquement les racines d'une équation ?

Résoudre une équation donnée $P(z) = 0$, à cette époque, ne pouvait signifier qu'une chose : si l'on ne pouvait disposer d'une formule explicite, la seule façon de pouvoir exhiber la liste complète des solutions résidait en la maîtrise d'un algorithme théoriquement capable de les approcher autant qu'il est possible. Aujourd'hui cela se fait par table de logarithmes[26] ou surtout sur

25. La lecture des cahiers de brouillon de Descartes montre même qu'au début de ses recherches il ignorait la technique rapportée par Cardan pour le troisième degré.

26. Pour les nostalgiques.

ordinateur *par le calcul de décimales aussi nombreuses que nécessaire*. Au dix-septième siècle la connaissance d'une racine ne pouvait guère alors être mieux assurée que *par la construction d'une ligne dont la longueur est égale à cette racine*, même si Newton, moins de quarante ans plus tard, prendra ensuite une position plus moderne en montrant comment déterminer théoriquement le nombre cherché par l'acquisition, une à une, de toutes les décimales que l'on désire connaître. En ce sens, l'algèbre cartésienne ne pouvait s'exprimer qu'a travers des figures et des points.

La Géométrie est donc le Traité expliquant comment résoudre les équations les plus générales (polynomiales, puisque l'analyse, avec ses fonctions transcendantes, comme le sinus ou l'exponentielle, n'existe pas encore) *par des constructions géométriques de segments ayant pour longueurs respectives les différentes racines de l'équation*.

Pour trouver une méthode générale de résolution, il faut d'abord disposer d'un critère efficace de classification des équations, ce qui est fait en particulier, croira-t-il naïvement, grâce à l'utilisation du fameux Problème de Pappus, qui n'est pas pour rien dans la réputation d'obscurité du Traité. Ce problème figure dans les deux premiers Livres de *La Géométrie* avec deux fins bien précises : tout d'abord *légitimer* la qualité de l'auteur (assez fort pour avoir su résoudre un problème remontant à l'Antiquité) ; et surtout introduire à une *classification des équations* et une *extension* considérable du stock des *courbes* disponibles pour la recherche mathématique et qui s'imposèrent pratiquement comme indispensables pendant les siècles qui suivirent, dégageant de ce fécond travail de pionnier des outils théoriques et pratiques d'une puissance impressionnante, en tout cas inenvisageable à son époque.

La Géométrie est donc finalement la longue description d'un **algorithme** complexe, utilisant largement la notion relativement concrète (pour nous) de courbe géométrique, mais au caractère exclusivement théorique et abstrait. Descartes dit lui-même que l'intérêt pratique de la chose est parfois des plus douteux (pages 412 des *Esais*, 484 de AT VI) ; de toutes façons (pages 315 des *Essais* et 389 de AT VI) : « *c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche* ».

Comme les *Éléments* d'Euclide, ce n'est pas un Traité pour faciliter l'économie marchande de son temps, mais un ouvrage d'un intellectuel pour des intellectuels.

La résolution graphique est traitée, pour les équations de degré deux, dans une partie du Livre Premier et ne tranche guère sur les connaissances antiques ; elle sera étendue en grand détail aux degrés trois et quatre d'une part, cinq et six d'autre part - ce qui est alors d'une absolue originalité -, dans les deuxième et troisième parties du Livre Troisième, le passage au cas général n'étant que suggéré à la toute dernière page. Comme les équations des degrés deux, trois ou quatre sont susceptibles de résolution par formules (mais non au delà), Descartes a pris soin de montrer qu'il n'ignorait rien de ces méthodes particulières, mais en se payant quand même le luxe d'inventer une nouvelle façon de résoudre la difficile équation du quatrième degré (pages 383 des *Essais* et 457 de AT VI).

Il nous prouve ses connaissances et son habileté technique hors de pair tout au long de la première partie du Livre Troisième, et même dans la seconde (en discutant par exemple les formules de Cardan : pages 398 des *Essais* et 472 de AT VI ; il a soin de montrer au passage que ces formules peuvent être traduites en problèmes géométriques puisque tout le troisième degré est finalement ramené soit à la *duplication du cube*, soit à la *trisection de l'angle*, références prestigieuses à la problématique de l'Antiquité, justifiant ainsi l'unification des mathématiques qu'il est persuadé d'avoir pleinement réalisée. La phrase clef de l'œuvre est très certainement la suivante (pages 401 des *Essais* et 475 de AT VI) : « *par la methode dont ie me sers, tout ce qui tombe sous la consideration des Geometres, se reduit a un mesme genre de Problesmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation* », qui conforte parfaitement notre lecture des intentions de Descartes quant à la finalité de son Traité.

L'écriture de *La Géométrie*

Dans *La Géométrie* il n'y a que très peu de démonstrations, et beaucoup d'affirmations. Lorsqu'il y a des preuves (par exemple lors de l'exposé de la méthode de résolution graphique de l'équation du sixième degré, pp. 408-11 des *Essais* et 480-3 de AT VI), ou surtout à propos de la construction des normales (pp. 345-7 des *Essais* et 417-9 de AT VI), ces dernières suivent toujours la description des techniques à mettre en œuvre (comme si démontrer était subordonné à agir). Elles sont rarement explicatives ; il s'agit plutôt de justifications, assez fortes pour que le lecteur n'ait rien à redire et soit vraisemblablement conduit à admirer celui qui a su construire les algorithmes résolvant les problèmes, plutôt que d'explications éclairant les structures profondes du travail mathématique en question. Ce n'est donc pas un livre destiné à dévoiler les dessous de la science et de ses techniques, mais seulement un recueil froid devant lequel on ne peut que s'incliner.

Ce qui le fait pourtant ressembler parfois à un cours ou à un Traité moderne de mathématiques, ce sont les très nombreux calculs qui y figurent, quelquefois assez développés. Mais il n'est pas le seul chercheur de cette époque à présenter son travail de cette façon (qu'il suffise d'évoquer ici le nom de Viète) ; pour devenir un disciple de Descartes, il fallait être prêt à un rude effort. En tout cas, notre auteur ne cherche en aucune manière à exposer comment il en est arrivé à ses vérités : il les assène, comme pour obliger son lecteur à acquiescer faute de pouvoir comprendre les coulisses, forcé qu'il est d'admettre la vérification qu'on lui présente, mais frustré de la genèse et de l'analyse dont il ne voit que la synthèse irréfutable, synthèse qui prime sur l'analyse initiale bien dissimulée.

La caractéristique principale de *La Géométrie* quant à son style est certainement le fait qu'elle ait été écrite, comme le *Discours*, en langue vulgaire (notre français) ; mais les retombées à court terme de ce choix seront cruelles : elle mettra vingt ans à s'imposer dans le monde savant. Peu de temps auparavant encore, tout traité se devait d'être publié en latin (et aujourd'hui c'est l'anglais qui a repris le rôle de véhicule universel, sauf en mathématiques où un article ou un livre français ont encore des lecteurs). Orgueil de ne pas agir comme les autres ? Sans doute, plus que volonté pédagogique d'être compris par ses compatriotes (qui étaient souvent ses pires ennemis, ainsi Fermat ou Roberval). Ce choix présente un avantage immense pour ses neveux (c'est-à-dire finalement nous tous qui le lisons, dans quelque partie du monde où nous nous trouvons). En refusant d'utiliser le latin scientifique de son époque [27], il est obligé de créer pratiquement un nouveau langage et, dans une certaine mesure, un nouveau symbolisme d'une efficacité incontestable. Il croyait mettre un terme aux mathématiques ; mais il les couvrait d'habits neufs si confortables qu'il en doublait au contraire l'efficacité, notamment en leur ouvrant d'immenses champs nouveaux de recherche.

Il faut noter au passage le grand intérêt que présentent pour nous les deux traductions que l'on vient de citer en note : outre le fait que, sans elles,

27. Qui sera pourtant le seul moyen de se faire un peu reconnaître par la communauté scientifique grâce aux traductions de 1649 et 1659 de Van Schooten, *cf.* AT VI, *v-vi*.

Newton lui-même n'aurait pas pu y trouver la source d'inspiration qu'il a toujours reconnue chez son aîné, nous pouvons y trouver de nombreuses adjonctions par Van Schooten lui-même ou d'autres mathématiciens cartésiens qui complètent (à la mode de l'époque), ou éclairent, certains passages un peu rudes de l'édition originale. Qu'il suffise de dire, par exemple, que le calcul des tangentes y est présenté de façon plus aimable et commode, notamment en ce qui concerne sa faisabilité.

La Géométrie est donc pratiquement lisible dans son texte original, à quelques exceptions près dues par exemple à un emploi de la ponctuation qui nous rebute parfois ; mais c'est sans grande importance : les véritables obstacles à une compréhension fluide résident dans des problèmes de fond, et non de forme. Malgré ce prix à payer, l'attaque frontale du traité vaut la peine.

Le plan de *La Géométrie*

Contrairement à ce que l'on a pu penser (par exemple « *le désordre apparent de La Géométrie* », L. Brunschvicg, dans *Les Étapes de la philosophie mathématique*, 1912, p. 120), le plan de *La Géométrie* n'est pas si obscur qu'il y paraît au premier regard, il est même tout à fait rationnel, y compris dans le détail, au moins si l'on garde à l'esprit le projet cartésien supposé exposé plus haut.

Elle **s'ouvre** sur un exposé de constructions (comme celle de la racine carrée) parce que Descartes en a besoin pour les équations du second degré ; cela fait, il les traite aussitôt.

Elle **se ferme** sur la résolution des équations de degré cinq et six et sur une esquisse d'un algorithme général.

Après cela, il n'y a en effet pour Descartes plus rien à dire ni à faire d'important : ainsi est affirmée avec force ce qui est, à notre avis, l'épine dorsale de tout le Traité, consacré à sa technique originale et supposée définitive de résolution des équations algébriques.

Seule une partie du Traité pourrait en être enlevée sans mettre complètement à terre le projet cartésien : c'est la dernière du Livre Second, destinée à prouver la puissance de sa méthode. Mais, outre les arguments exposés plus haut, on peut facilement imaginer que l'orgueil de Descartes n'aurait pu admettre qu'il passât sous silence l'un de ses plus grands triomphes personnels, la découverte d'une construction (presque) générale des tangentes et des normales à une courbe, dont il a d'ailleurs besoin pour justifier, non sans peine mais avec brio, ce qu'il a dit dans *La Dioptrique* au sujet des Ovales et de la réfraction (pages 110 des *Essais* et 185 de AT VI).

On peut toutefois se demander pourquoi la résolution graphique des équations de degré trois et quatre, qui n'impose pas de recourir au nouvel outil qu'est la géométrie analytique, ne vient pas tout de suite après celle des équations du second degré. Une réponse possible est qu'elle exige un peu plus que règle et compas [28]. Une seconde est que sa place est liée à la grande difficulté et à la profonde originalité de la technique de résolution des équations de degré cinq et six, qui ne peut paraître naturelle que par analogie avec le cas immédiatement précurseur.

Le Livre Premier

Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites

Le Livre Premier, très court (moins d'un septième de l'ensemble), met en place les éléments fondamentaux sur desquels l'algorithme général de résolution des équations pourra ensuite s'appuyer : les règles fondamentales pour traduire géométriquement les opérations de base (addition, multiplication et même extraction de racine) sont tout d'abord exhibées, bien avant que ne soient introduites les techniques de la géométrie cartésienne (analytique) proprement dite, à travers l'évocation et un premier traitement du Problème de Pappus qui semble manifestement avoir servi de déclencheur à la démarche de Descartes.

Ce Livre donne donc d'abord les constructions géométriques élémentaires concernant le produit et le quotient de deux nombres, ainsi que la racine carrée d'un nombre à partir de segments donnés, qui peuvent s'obtenir à la règle et au compas. Il décrit ensuite les préceptes à suivre dans sa géométrie

28. Il faut une parabole.

à l'occasion d'un texte majeur (page 300 des *Essais* et 372 de AT VI), où il explique qu'il faut nommer les différentes grandeurs géométriques d'une figure, les classer en connues et inconnues, mettre en équation et résoudre ces équations. Il applique aussitôt constructions et règles ainsi introduites aux problèmes liés aux équations du second degré, faisant même au passage un peu mieux qu'Euclide, qui avait traité le même sujet mais de façon plus désordonnée.

La fin du Livre Premier introduit le Problème de Pappus dont il a été déjà abondamment parlé, avec une longue citation en latin, assez peu facilement lisible pour un œil d'aujourd'hui. Surprenante aux yeux d'un contemporain, cette partie est pourtant essentielle pour les deux raisons déjà indiquées : légitimation de la géométrie analytique par l'exposé d'une solution neuve à un défi ancien, et mise au point d'un atelier fournissant à la demande des courbes de plus en plus complexes définies par des équations de degré de plus en plus élevé, mais néanmoins introduites à partir d'une préoccupation géométrique, justification aujourd'hui incongrue mais qui était très certainement nécessaire pour l'époque.

C'est là qu'arrivent enfin, presque incidemment (pages 310 des *Essais* et 383 de AT VI), x et y, l'abscisse et l'ordonnée, qu'on retrouvera plus loin (par exemple pages 321 des *Essais* et 394 de AT VI, et plus généralement dans tout le Traité) : si essentielles qu'elles nous paraissent aujourd'hui, elles ne sont pourtant pour Descartes que des outils comme sa méthode des coefficients indéterminés (pages 347 et *sq.* des *Essais*, 418 et *sq.* de AT VI), ou sa Parabole, nécessaire pour résoudre le sixième degré par sa méthode (voir le Livre Troisième). Croire que cette dernière se résume à l'invention des axes de coordonnées, si extraordinaire qu'elle soit - et il le sait bien -, est donc une erreur grave ; c'est confondre le moyen et la fin.

L'auteur, au moins dans ce passage initiatique, ne considère les coordonnées x et y fixant un point variable que comme deux longueurs privilégiées, *à partir desquelles il se fait fort de déterminer tous les autres éléments géométriques de la figure*. D'une certaine manière, on peut retrouver là un souci de classification, voire d'automatisation, nous ramenant au *Discours de la Méthode*, mais il n'y est pas fait explicitement allusion.

En ce qui concerne le Problème de Pappus lui-même, dont l'examen minutieux peut être évité par un lecteur non spécialiste malgré son importance capitale dans l'élaboration de la révolution cartésienne, un moderne ferait évidemment plus court. Sans doute se dispenserait-il de reproduire, en tout cas *in extenso*, la traduction latine du texte grec original. Mais surtout il pourrait, par exemple, commencer par établir un lemme proche de ceci : étant donnés un repère Oxy, une droite Δ et un angle φ, la distance CC', séparant un point variable C de coordonnées x et y du point C' de Δ tel que CC' et cette droite fassent entre elles l'angle φ, s'exprime par la valeur absolue d'une expression du type $ax + by + c$, où a, b et c sont indépendants de la position du point mobile C. Ce lemme n'est autre qu'une variante du théorème selon lequel l'équation d'une droite est un polynôme du premier degré en x et y. Dès lors il devient évident qu'un lieu de Pappus « à quatre droites » est une conique qui a une équation de la forme

$$(ax + by + c)(dx + ey + f) = \lambda\,(gx + hy + i)(jx + ky + l)$$

puisque c'est l'ensemble des points C tels que quatre distances du type CC' ci-dessus soient liées de façon que le produit des deux premières reste proportionnel à celui des deux autres. Cet exemple est celui sur lequel Descartes s'étend longuement (avant d'y revenir au Livre Second), dont la figure singulière est même exhibée en deux endroits (pages 309 et 311 des *Essais*, 382 et 384 de AT VI), avant d'être reprise, et parfois même complétée, à cinq autres occasions, à savoir pp. 325, 327, 329 et 334 avec un cercle ajouté, puis 331 avec une branche d'hyperbole, soient 398, 400, 404 et 406, puis 402 de AT VI (attention à l'inversion, 402 $\leftrightarrow$ 404, due à une faute des éditeurs).

Les lieux à $2n$ droites, et leurs variantes à $2n-1$ droites, sont reconnus de la même manière comme étant ce que l'on appelle aujourd'hui des courbes algébriques de degré n, définies par des équation de la forme $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme de degré n (que, réciproquement, toute courbe de ce genre admette une définition à la Pappus est un problème difficile, dont la solution est négative, et que Descartes ne se pose pas). Ainsi notre géomètre et ses neveux disposent-ils, pour la première fois dans l'histoire, d'objets d'étude - et d'outils pour un algorithme fondamental de résolution des équations algébriques - aussi complexes qu'on le désire, ayant une définition « à l'ancienne » leur assurant un lien solide avec les maîtres de l'Antiquité qui, en dehors de quelques cas spéciaux inventés pour les besoins de la cause (courbes trisectrices par exemples) n'avaient dans leur besace qu'une famille assez courte, essentiellement limitée aux sections coniques. Le saut quantitatif et qualitatif est considérable, et l'auteur est visiblement fier de son travail, lorsqu'il annonce, pour finir, qu'il doit maintenant établir les propriétés des nouveaux êtres qu'il vient d'engendrer par sa découverte.

Le Livre Second

De la nature des lignes courbes

Le Livre Second, occupant presque la moitié de la longueur du Traité, est donc nécessairement consacré à la mise au point d'ingrédients introduits par le Premier Livre et indispensables à la résolution graphique des équations : il s'agit bien entendu des courbes algébriques (selon le vocabulaire moderne), éventail d'une richesse inimaginable auparavant et désormais disponible.

Une réflexion sur ces courbes occupe toute la première partie du Livre Second : Descartes introduit d'abord une classification subtile basée sur leur nature même (géométrique, mécanique) ; puis il indique au passage l'importance d'instruments (compas de son invention) destinés à agrandir encore le stock admissible ; et enfin, toujours dans le même but, il explicite sa *Transformation*, jusqu'à ces dernières années peu mise en valeur, qui va jouer un rôle crucial en engendrant la *Parabole Cartésienne* et ses suivantes. Il peut alors reprendre le Problème de Pappus, donnant pour la première fois une étude de courbes à partir de leurs équations (les coniques vues à partir du problème à quatre droites). Il y traite donc en détail de courbes, ou bien toutes nouvelles (à savoir sa *Parabole* et ses *Ovales*), ou bien très anciennes mais sur lesquelles il apporte du nouveau sensationnel (les tangentes aux *Conchoïdes de Nicomède*), dont il coupera, en silence, le cordon ombilical d'avec les lieux « à $2n$ droites » : petite faiblesse bien excusable, lorsque l'on réfléchit à la difficulté de ramener une Ovale à un complexe de huit droites, même avec tout l'arsenal des mathématiques d'aujourd'hui ...

Quant à la Transformation de Descartes (pages 319 des *Essais* et 393 de AT VI), qu'il essaie d'abord sur une droite pour retrouver une propriété connue de l'Hyperbole, *reconnue à partir de son équation* (page 322 des *Essais* et 394 de AT VI), et qui lui servira de matrice pour engendrer sa Parabole en prenant bien soin d'indiquer qu'il ne fait qu'utiliser une variante d'une méthode ayant servi à définir une Conchoïde (pages 322 des *Essais* et 395 de AT VI), elle n'est pas explicitement montrée comme une nouveauté directement issue de sa géométrie analytique, mais il ne fait aucun doute qu'elle n'aurait pas pu être conçue en dehors de ce cadre. Le rattachement à la tradition n'est ici que l'effet d'une fausse modestie, peut-être destinée à mieux faire accepter un concept dont l'originalité profonde pourrait sans cela rester incomprise.

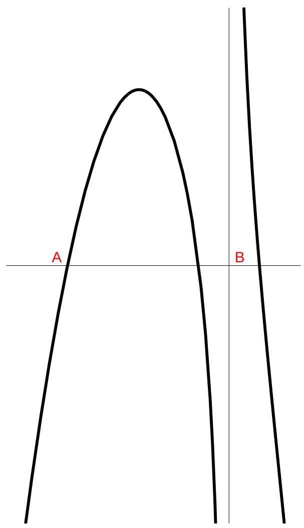


Figure 1.1 – *Une Parabole de Descartes*

Dans toute cette partie, nous trouvons une débauche de calculs, qu'il s'agisse d'analyser les capacités d'un compas qu'il a inventé (pages 317-9 des *Essais* et 391-2 de AT VI) ou d'établir l'équation d'une Hyperbole euclidienne et de sa propre Parabole Cartésienne (pages 319 et *sq.* puis 337 et *sq.* des *Essais*, soient 393 et *sq.* puis 408 et *sq.* de AT VI), où ils ne sont en fait que suggérés, ou qu'il s'agisse de la longue reprise du Problème de Pappus (pages 325-34 des *Essais* et 397-406 de AT VI) dont la complexité est telle que le recours explicite aux équations est devenu indispensable. Cette dernière étude, justement, qui n'est autre (en termes modernes) que l'exposé d'un traitement systématique d'un polynôme du second degré jusqu'à aboutir à l'une des formes réduites caractérisant les trois types de coniques [29], est un modèle de géométrie analytique, et ne diffère pas fondamentalement des démonstrations modernes (cette question est toujours à l'ordre du jour au lycée).

29. Quatre si l'on place le Cercle à part.

Une telle dissection technique, brillante en dépit de sa longueur inévitable, est présentée brutalement, sans autre justification que son succès final. Profondément et nécessairement originale, elle est évidemment sans précurseur à cette époque. Certes, son intérêt pour l'algorithme fondamental n'est pas évident, mais il était indispensable pour Descartes de montrer que sa géométrie était capable de justifier une affirmation sans preuve donnée par un Ancien illustre ; par ailleurs, on peut accepter sa présence dans *La Géométrie* comme celle d'un exercice de style, destiné à montrer comment fonctionnait le nouvel outil, si éloigné des concepts des mathématiques anciennes qu'il devait en désarçonner plus d'un.

Vient ensuite l'étude d'un lieu de Pappus à cinq droites (donc une cubique), dont le lien plus qu'étroit avec la Parabole Cartésienne est mis également en évidence par un calcul d'équations, ici reconnues comme identiques (pages 337-8 des *Essais* et 408-10 de AT VI) : c'est la première fois que deux objets géométriques, issus de définitions différentes, sont identifiés l'un à l'autre par un tel procédé.

La présence de cette cubique en cet endroit s'explique par le fait qu'elle constituera le *deus ex machina* indispensable à la résolution graphique des équations du sixième degré ; on en verra même une troisième définition dans le Livre suivant (pages 407-9 des *Essais* et 479-81 de AT VI), qui prouve le soin extrême que Descartes a pris pour établir les propriétés de sa courbe fétiche, dont la détermination de ses tangentes.

Retournant pour un instant aux considérations générales, Descartes s'explique sur sa mise à l'écart de courbes comme la Spirale (pages 340 des *Essais* et 411 de AT VI), et met au centre de son étude l'idée (pages 341 des *Essais* et 412 de AT VI) que toute courbe est entièrement déterminée par le *rapport* entre ses points et leurs abscisses x (on pourrait même dire qu'elle est toute entière « contenue » dans son équation, - concept alors évidemment sans signification pour la Spirale). Il justifiera ensuite cette proposition par toute la longue deuxième et dernière partie du Livre Second, avec notamment la construction des normales dont nous avons déjà parlé.

La théorie des normales chez Descartes

Stricto sensu disjointe de la démarche générale du Traité, cette fameuse digression n'en constitue pas moins l'un de ses joyaux incontestables (également brillant exercice d'application de la puissance de la géométrie cartésienne). Chacun connaît aujourd'hui une définition élémentaire de ce qu'est une tangente à une courbe, par un processus de limite du support d'une corde pivotant autour du point considéré. Cette présentation, qui a triomphé peu après la publication de *La Géométrie*, est plus ou moins inspirée d'une technique développée à la même époque par Pierre Fermat et appelée « *De Maximis et Minimis* », titre donné par Fermat lui-même en Juin 1638 (voir notamment les *Œuvres* de Fermat, vol. II, page 154) mais alors non encore publiée. Elle ne sera jamais acceptée par Descartes, même sous la forme spéciale que Fermat lui communiquait justement dans cette lettre, au cours d'une polémique restée célèbre (voir par exemple AT II, 272 et 320 *etc*).

Sa propre idée de construction des tangentes, ou plus précisément des normales, est totalement différente. Même si elle a vite disparu pour des raisons d'incommodité, son influence sur les mathématiques sera très profonde, car elle repose sur une idée fondamentale sans laquelle la toujours très vivante géométrie algébrique, grâce à laquelle par exemple le Grand Théorème de Fermat a été démontré, ne serait qu'une coquille vide : c'est Descartes qui a introduit un concept de tangente qui s'étend aussitôt à des courbes même définies sur un corps sans topologie.

La première remarque est en effet que la méthode qui nous est dévoilée ici concerne les *normales*, c'est-à-dire les perpendiculaires aux tangentes, et non les tangentes elles-mêmes : cette apparente bizarrerie s'explique naturellement par le fait que Descartes avait recherché pendant longtemps la solution d'un problème d'optique mettant en œuvre les normales à certaines surfaces, et surtout par le recours à un cercle auxilaire [30] qui sera justifié plus bas.

Cela dit, la présentation de la technique cartésienne, issue de son invention de la géométrie analytique, est assez simple : pour déterminer la normale en un point C d'une courbe connue par son équation, il suffit d'examiner la famille des cercles passant par ce point et centrés sur l'axe des ordonnées, une droite horizontale sur la figure (pages 342 des *Essais* et 414 de AT VI) et non une verticale comme c'est aujourd'hui l'usage. Lorsque le centre P d'un tel cercle appartient à la normale cherchée, c'est que l'équation $f(y) = 0$ qui donne les ordonnées des points communs au cercle et à la courbe, évidemment vérifiée par l'ordonnée e du point C, admet en fait ce nombre e comme une *racine*

30. Dans son grand algorithme de résolution graphique des équations algébriques.

double : alors le cercle et la courbe ont, en C, même tangente qui est la perpendiculaire au rayon PC.

De manière précise, notant v l'ordonnée de P et s la longueur du rayon, l'équation $f(y) = 0$ a été obtenue en remplaçant systématiquement l'abscisse x par $\sqrt{s^2 - (v-y)^2}$ (et aussi, bien que Descartes ne le dise pas, par l'expression conjuguée $-\sqrt{s^2 - (v-y)^2}$), et il ne reste plus qu'à chercher à quelle condition portant sur l'ordonnée inconnue v de P le polynôme $(y-e)^2 = y^2 - 2ey + e^2$ divise le polynôme $f(y)$.

Une justification assez rigoureuse de l'efficacité de cette technique est donnée à l'aide de considérations de nature topologique (pages 346 des *Essais* et 418 de AT VI) où l'on voit deux racines inégales (dont l'une est naturellement e) devenir *entièrement égales* lorsque le cercle est celui qui est recherché. La méthode est particulièrement efficace lorsque l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe, puisque x ne figure dans l'équation $P(x, y) = 0$ que par son carré, ce qui rend immédiat le calcul de $f(y)$ (alors égal à $P(\sqrt{s^2 - (v-y)^2}, y)$ au lieu de $P(\sqrt{s^2 - (v-y)^2}, y)\, P(-\sqrt{s^2 - (v-y)^2}, y)$ dans le cas général) et assez praticable la détermination de P, mais ce n'est pas indispensable puisqu'il nous est présenté au moins un cas - celui de sa Parabole du troisième degré - pour lequel cette simplification est impossible.

Après l'exposé théorique de la méthode, d'abord donnée sans justification (pages 342 des *Essais* et 414 de AT VI), Descartes exhibe de nombreux exemples d'obtention de normales (et donc de tangentes) à un certain nombre de courbes. Assez curieusement, il ne les examine pas à fond l'une après l'autre, comme dans un livre moderne, mais travaille en deux temps : il commence d'abord par établir les équations générales et à préparer le travail d'intersection avec un cercle variable, en prenant dans l'ordre l'Ellipse, la Parabole cartésienne et, surtout, l'Ovale qui porte également son nom (pages 344 des *Essais* et 416 de AT VI). Notons dans ce cas une particularité remarquable spécifique : ici le rôle des deux coordonnées est assigné à d'autres longueurs qui les remplacent, à savoir les distances à deux points fixes appelés foyers (*points brûlants*) de l'Ovale ; cela étant, abscisse et ordonnée ne sont pas tout à fait absentes du calcul, mais sont rapidement éliminées tour à tour avec une facilité tenant à la nature des choses, qui s'arrangent d'elles-mêmes de façon déconcertante : Descartes a eu ici beaucoup de chance.

Ce n'est qu'après toutes ces mises en scène qu'il consent à justifier tout le processus dans un paragraphe brillant (pages 345-7 des *Essais* et 417-9 de AT VI) où, comme nous l'avons signalé plus haut, l'on frôle sans avoir l'air d'y toucher une intuition sous-jacente de ce qu'est un processus de limite (*si ce point* [...] *est tant soit peu plus proche, ou plus éloigné* [...] *qu'il ne doit*), et enfin à passer aux déterminations effectives pour les trois types de courbes envisagées plus haut, ce qui ne va pas sans demander quelque effort, d'abord à l'auteur mais aussi à ses lecteurs !

Il ajoutera d'ailleurs aussitôt, ce qui n'est pas sans faire un peu désordre, une quatrième détermination de normale, à savoir pour une *Conchoïde de Nicomède*, courbe du quatrième degré utilisée par les anciens pour la trisection de l'angle (pages 351-2 des *Essais* et 423-4 de AT VI). Contrairement aux autres exemples, nous n'avons pas droit ici à une préparation minutieuse suivie des détails des calculs, mais à une simple construction géométrique d'une élégance à couper le souffle. L'absence de toute justification technique (et une erreur d'inattention, consistant à échanger le rôle de x et de y) font que ce passage très court a toujours frappé l'attention des lecteurs aguerris. On peut voir à ce sujet par exemple une note de Paul Tannery placée *in fine* du Livre Second (AT VI 441), où il parle d'une « *remarquable divination* » de l'historien danois Hieronymus Georg Zeuthen selon laquelle la construction serait en fait issue d'un argument cinématique que Descartes ne pouvait décemment placer dans un ouvrage d'où les infiniment petits avaient été bannis ; nous proposerons dans le chapitre sur les Normales une autre solution, heureusement plus conforme à l'esprit du Traité, et qui sauve le philosophe d'une accusation de dissimulation injustifiée.

Les Ovales de Descartes

Enfin cette partie se termine, trop longuement à nos yeux sans doute, par une bien lourde application au problème fondamental qu'il avait évoqué sans preuve dans *La Dioptrique* : la construction des normales à une Ovale cartésienne, naturellement issu de la loi de réfraction qu'il avait lui-même trouvée. Rares, avouons-le, sont ceux qui ont eu le courage de lire avec toute l'attention nécessaire cette justification de son travail d'optique, qu'il nous faut cependant regarder avec respect, puisqu'il a dû coûter une peine incroyable à Descartes.

C'est d'ailleurs une énigme restée entière que de démêler les tentatives infructueuses et les intuitions qui ont pu le guider vers une solution aussi miraculeuse de cette très difficile question. À ce sujet, les maigres indices que l'on trouvera dans les *Excerpta* ne sont pas d'un réel secours. Une analyse malheureusement un peu trop succincte de Paul Tannery (AT X 325-8) peut apporter quelques lumières sur la lecture de ces pages touffues [31]. Qu'il suffise au lecteur pressé, ou non spécialiste, de savoir que la rigueur de cette fin de Livre est égale à celle du reste du Traité, et que Descartes avait bien gagné son pari, mais au prix de subtilités techniques sans grand intérêt intrinsèque. Les nombreuses illustrations qu'elle comporte, parfois maladroites et toujours délicates à interpréter, donnent une bonne image de la complexité du sujet.

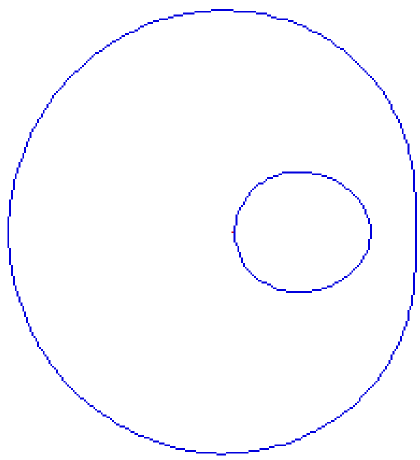


FIGURE 1.2 – *Une Ovale de Descartes*

Au lieu de suivre fidèlement les explications et les résultats cartésiens, nous croyons donc plus utile de donner ici une idée générale de ce qu'est une Ovale, courbe définie « *à l'ancienne* » comme extension naturelle d'une propriété

31. Seule la publication ultérieure d'un ouvrage spécialement consacré à la théorie de ces courbes mal connues et complexes pourrait permettre aux lecteurs d'entrer plus aisément dans cette longue digression qui couvre une étendue égale à celle du Livre Premier tout entier, mais dont la postérité n'a guère retenu à juste titre que l'aspect de prouesse mathématique, et non les résultats eux-mêmes.

caractéristique commune à l'Ellipse et l'Hyperbole, indépendamment de la géométrie analytique. Étant donnés deux points fixes F et G (appelés foyers) et deux constantes non nulles a et b (mais de signes arbitraires), une telle courbe est alors définie comme le lieu des points C tels que $CF = a\,CG+b$ (le cas particulier $a^2 = 1$ est à écarter, car correspondant justement à une Ellipse ou à une branche d'Hyperbole, les modèles primitifs résolvant le problème fondamental de la réflexion optique, mais non celui de la réfraction).

C'est du moins ainsi que Descartes les a conçues et utilisées, sans vérifier qu'il s'agissait bien là d'une courbe algébrique, donc « *recevable en Géométrie* », et non « *mécanique* ». Nous ignorons s'il s'était rendu compte que sa définition ne donnait qu'une partie d'une courbe « géométrique ». D'ailleurs, à la différence de sa Parabole, il n'exhibera jamais de figure montrant la totalité d'une Ovale et il distinguera toujours quatre genres. Il est donc peu probable qu'il ait vu que, pour obtenir un polynôme en x et y dont l'annulation fournirait une équation, il fallait considérer l'expression complète

$$(a\,CG - CF + b)(a\,CG + CF + b)(a\,CG + CF - b)(a\,CG - CF - b) = 0,$$

seul moyen d'éliminer les racines carrées implicitement introduites par les longueurs CF et CG.

Cette rationalisation donne automatiquement à l'Ovale considérée une « compagne », dont elle est aussi indissociable que le sont les deux branches d'une hyperbole. *A fortiori*, il ne cherchera pas si cette courbe est bien un lieu à la Pappus. Il est donc légitime de s'interroger sur la réelle maîtrise mathématique qu'avait Descartes sur l'objet de l'un des résultats dont il était le plus fier, ainsi que sur la cohérence même de l'introduction un peu parasite de ce long passage dans le Traité.

Cela dit, le sujet était très complexe, et n'a d'ailleurs jamais été complètement approfondi par ses successeurs, qui se sont contentés de vérifier la pertinence de la propriété optique fondamentale (souvent par l'introduction d'une équation différentielle simple, totalement étrangère à l'esprit de 1637), de tracer le graphe avec ses deux branches - une petite, de forme ovale, entièrement intérieure à une plus grande, qui est soit encore une ovale convexe, dite oviforme, soit une ovale dont la frontière a été légèrement creusée, dite cordiforme - et d'en obtenir une équation cartésienne comme indiqué (du quatrième degré : voir le chapitre sur les *Ovales*).

Vers l'espace

Les toutes dernières lignes du Livre Second sont le seul témoignage de ce que Descartes avait bien vu que sa méthode des coordonnées pouvait s'appliquer à l'espace et non seulement au plan. Mais elles comportent une bévue de taille : les projections horizontale et verticale de « la normale »[32] à une courbe gauche n'ont aucune raison d'être les normales de ses projections. Cette erreur célèbre jette malheureusement un doute sur la pertinence des intuitions de l'auteur sur une géométrie cartésienne à trois dimensions[33], mais elle résulte certainement d'une écriture trop rapide dont a visiblement souffert *La Géométrie*.

Quoi qu'il en soit, avec ses erreurs et ses scories, ce Livre est certainement une pièce maîtresse des mathématiques de tous les temps, en particulier parce qu'il contient la première méthode jamais publiée de construction des tangentes à une courbe. Même si Fermat possédait la sienne à la même époque, plus simple et plus efficace, il ne la portera à la connaissance de tous que plus tard, et sous une forme toujours assez énigmatique, tranchant avec la clarté de Descartes, même si ce dernier avait fait un choix moins heureux.

De la nature des lignes courbes contient les plus belles preuves de ce que son auteur était un mathématicien d'une originalité et d'une habileté remarquables, et qu'il a sa place indiscutable parmi la demi-douzaine de génies qui ont fait du dix-septième siècle le point de départ d'un renouveau scientifique qui ne s'est pas arrêté depuis. Il le tenait pourtant comme moins important que le Livre suivant, qui contenait enfin la clef de son grand algorithme ; qu'il soit permis aux modernes de n'être peut-être pas de son avis.

---

32. Alors qu'il en existe bien entendu une infinité. Mais nous devons reconnaître que Descartes a quand même été assez prudent dans sa formulation, puisqu'il n'évoque que l'existence d'« *une ligne droite, qui couppe cete courbe au point donné a angles droits* (pages 369 des *Essais* et 440 de AT VI). Cela dit, en toute fin du texte, il parle en passant de « *la ligne droite cherchée* », ce qui ne laisse plus de doute : pour Descartes, il n'y a qu'une normale en un point donnée à une courbe gauche.

33. Comme on le verra dans le chapitre consacré à la *Propositio demonstrata*, notre auteur n'était vraiment à l'aise que dans les limites de la géométrie plane. L'idée d'ajouter un z au couple (x, y) est absente de toute son œuvre, et ses figures en souffrent.

Le Livre Troisième

De la construction des problèmes qui sont solides, ou plus que solides

Après ces longues mais riches digressions, le Livre Troisième peut enfin passer à l'essentiel du programme central cartésien : résoudre les équations de degré trois et quatre, puis cinq et six, voire les suivantes (évoquées à l'ultime page) dont la complexité *monte peu à peu, comme par degrés*, chaque Parabole en engendrant à son tour une autre, *d'un degré plus composé*, et ainsi *a l'infini* (pages 389 et 413 des *Essais*, 464 et 485 de AT VI).

Cette progression jusqu'au chef d'œuvre final est orchestrée en trois temps : une introduction aux manipulations élémentaires sur les polynômes (avec de nombreuses innovations qui feront date), une reprise des solutions de Cardan et Ferrari au siècle précédent revisitées dans l'esprit de résolutions graphiques par intersections d'un cercle et d'une parabole ordinaire bien choisis - nouvelle par l'esprit à partir de formules dont il n'est pas l'inventeur -, et enfin leur extension totalement inédite aux équations suivantes à l'aide de Paraboles Cartésiennes, inventées pour la circonstance. À l'exception du dernier paragraphe, où une récurrence qui n'est d'ailleurs qu'évoquée sans approfondissements est malheureusement fort imprudente, et même à strictement parler fausse, tout est techniquement parfait.

Si ce Livre n'a pas, pour nous, le même poids que le Second dont la postérité est évidente, il n'en reste pas moins qu'il prouve tout autant l'audace, l'esprit de pionnier et les qualités de virtuose du calcul qui caractérisent notre philosophe mathématisant. Signalons que son titre, obscur pour un lecteur moderne, fait simplement référence à des constructions qui ne peuvent être menées qu'à condition de disposer de courbes respectivement de degré deux (« solides ») ou strictement supérieur (« plus que solides »), parmi lesquelles celles de degré trois (« sursolides », comme la Parabole Cartésienne) figurent évidemment en bonne place.

En premier lieu, près de vingt pages sont consacrées à des considérations fort pertinentes sur ce qu'est une équation algébrique. Contrairement à d'autres passages plus complexes du Traité, leur lecture est aisée pour qui a quelque habitude du calcul littéral enseigné dans les écoles, et il serait sans grand intérêt d'en disséquer ici chacun des paragraphes. Certains des calculs qui sont jetés un peu comme par hasard et sans introduction particulière sont en fait, comme le montrera la suite, utiles pour telle ou telle question que l'on rencontrera ultérieurement. Seules sont peut-être plus déroutantes l'introduction elle-même, où nous retrouvons un compas cartésien qui rend automatique la détermination de moyennes proportionnelles mais dont la compréhension ne demande qu'un effort assez modeste (pages 370 des *Essais* et 443 de AT VI), et la résolution qui semble bien banale d'un problème également dû à Pappus (sans rapport avec celui que nous connaissons déjà), qui est un exemple où une équation *a priori* complexe peut néanmoins être résolue par racines carrées si l'on sait s'y prendre (pages 387 des *Essais* et 462 de AT VI). Ces deux paragraphes anodins sont en fait, une fois encore, le prétexte pour Descartes à prouver sa virtuosité, toujours en se mettant à l'abri de la critique par le choix d'une question classique dont, à la différence du premier problème, la solution figurait dans Pappus. Quelques lignes de calcul au hasard montreront vite combien son traitement par la géométrie analytique est beaucoup moins simple et naturel qu'il n'y paraît.

Peut-être était-ce là l'occasion de montrer que ces mathématiques qu'il se flattait d'avoir domptées étaient en fait, même après son intervention, un monde bien ardu, ce qui ne rendait pas moins grande sa prouesse d'en être devenu le dernier Grand Maître.

Les équations de degrés 3 ou 4

Après les hors-d'œuvre, plus utiles que ne l'indique une première lecture, vient une solution des équations de degrés trois et quatre par intersection d'une parabole et d'un cercle [34]. Le premier type se ramène au second en ajoutant une racine supplémentaire (par exemple 0), ce qui élève artificiellement le degré d'une unité.

La lecture de cette seconde étape, nécessairement crayon en main, est tout à fait possible, et il est indispensable de s'y livrer si l'on veut pouvoir ensuite passer aux degrés cinq et six. Elle ne présente pas de grandes difficultés, si elle demande évidemment de l'attention. La rédaction est, ici encore, en deux

34. Deux coniques ayant bien en général quatre points communs.

temps : d'abord la description de l'algorithme, suivie de sa justification (« *Et la demonstration en est fort aysée* ... (pages 393 des *Essais* et 467 de AT VI) par vérification pure et dure qu'une certaine expression était bien nulle comme il le fallait. Cette façon de faire est assez moderne, mais certains la jugeront bien peu pédagogique ; il est vrai que son auteur ne cherchait pas à passer pour un bon professeur dévoilant quelques-uns de ses trucs de magicien, mais ne répugnait sans doute pas à apparaître comme possédant une science supérieure qu'il suffisait de recevoir !

Ce qui est sans doute le plus notable dans toute cette partie intermédiaire et préparatoire à l'assaut final, ce sont les remarques, *a priori* anodines, selon laquelle la recherche de moyennes proportionnelles - essentiellement le vieux défi de duplication du cube - et la trisection de l'angle sont solubles par sa méthode (pages 395-7 des *Essais* et 469-71 de AT), suivies, par une interprétation profonde des formules de résolution explicite par radicaux, de l'affirmation selon laquelle tout problème du troisième degré peut se ramener à l'un de ces deux cas particuliers (pages 397 des *Essais* et 471 de AT VI). À remarquer en particulier la façon très subtile dont Descartes traite la trisection : sa méthode consiste au fond à démontrer une formule trigonométrique un peu complexe (celle qui donne le sinus d'un angle triple d'un autre), mais en recourant à de bons vieux triangles semblables : pour un moderne, le dépaysement est total.

Avant de passer au bouquet final, l'auteur s'offre une transition (pages 401-2 des *Essais* et 475-6 de AT VI) pendant laquelle il justifie la nécessité de n'employer, pour résoudre un problème - *ie.* trouver graphiquement les racines de quelque équation -, que des courbes de degré le plus simple possible. C'est pour nous le lieu de formuler une hypothèse sur l'origine de la méthode de construction des normales du Livre Second : lors des manipulations préparatoires qu'il a multipliées en coupant une parabole par un cercle, Descartes n'a certainement pas manqué de tomber sur un exemple où il y a une racine double ; nous devons même supposer, bien qu'il n'y en ait pas d'exemple précis dans *La Géométrie*, qu'il a certainement dû rechercher systématiquement ce qui se passait lors d'un tel cas particulier dont l'importance n'avait pu lui échapper. Or le fait que cercle et parabole soient alors tangents est parfaitement évident si la figure tracée est tant soit peu fidèle.

Inversement, cette constatation lui a permis, pensons-nous, de vérifier sur l'exemple que la tangente à la parabole était bien ce que l'on savait qu'elle était depuis les Anciens. De là à en déduire une méthode générale, il n'y avait qu'un pas, et l'on comprend mieux pourquoi c'est un *cercle* variable qu'il a fait pivoter autour du point considéré et non, comme Fermat et les modernes, une *droite*. Même si on peut le regretter aujourd'hui, c'est certainement une observation de ce genre qui l'a conduit à la conception de son algorithme secondaire qui, se trouvant ainsi rattaché à l'algorithme fondamental, méritait donc parfaitement de trouver sa place dans *La Géométrie*[35].

Les équations de degrés 5 ou 6

Le sommet est évidemment atteint lorsque Descartes, pour la première fois dans l'histoire, offre une résolution des équations de degré six (et donc également de celles de degré cinq, par ajout d'une racine artificielle). Cette fois-ci, la mathématique de son temps ne fournissait pas de formules donnant les racines à l'aide de radicaux (et nous savons depuis, grâce à Galois, que ce n'était pas par manque de chance ou d'opiniâtreté, mais parce que de telles formules ne peuvent exister). Là résidait donc un défi de taille, et qui a été effectivement relevé et rigoureusement réglé à sa manière par Descartes, qui a montré ainsi toute la puissance de sa créativité et la subtilité de ses interventions calculatoires.

Le tout est présenté en moins de quatre pages (403-6 des *Essais* et 477-9 de AT VI), avec par surcroît une nouvelle et curieuse construction point par point de la Parabole cartésienne (pages 406-9 des *Essais* et 479-81 de AT VI). Comme pour les degrés immédiatement inférieurs, *la démonstration de tout ceci est assez facile* (pages 408 des *Essais* et 480 de AT VI), et elle suit immédiatement l'exposé de la méthode. Il est sans grand intérêt de décrire cette dernière, en détail, dans cette introduction : elle se lit sans problèmes majeurs, surtout si l'on fait l'effort de patiemment déchiffrer la figure fondamentale (pages 404 et 410 des *Essais*, 477 et 481 de AT VI), emblématique du Traité tout entier, mais rarement discutée et interprétée comme elle devrait l'être.

35. Cette remarque ne pouvait être proposée lors de l'étude des normales au Livre précédent, puisqu'elle demande d'avoir déjà quelque idée de la méthode générale de résolution graphique des équations à l'aide de cercles et de courbes auxiliaires ; à la lumière du contenu du Livre Troisième, elle devient compréhensible et, espérons-nous, presque évidente en apportant une preuve supplémentaire de la profonde homogénéité d'un Traité qui, jusqu'ici, avait plutôt mauvaise réputation sur ce point.

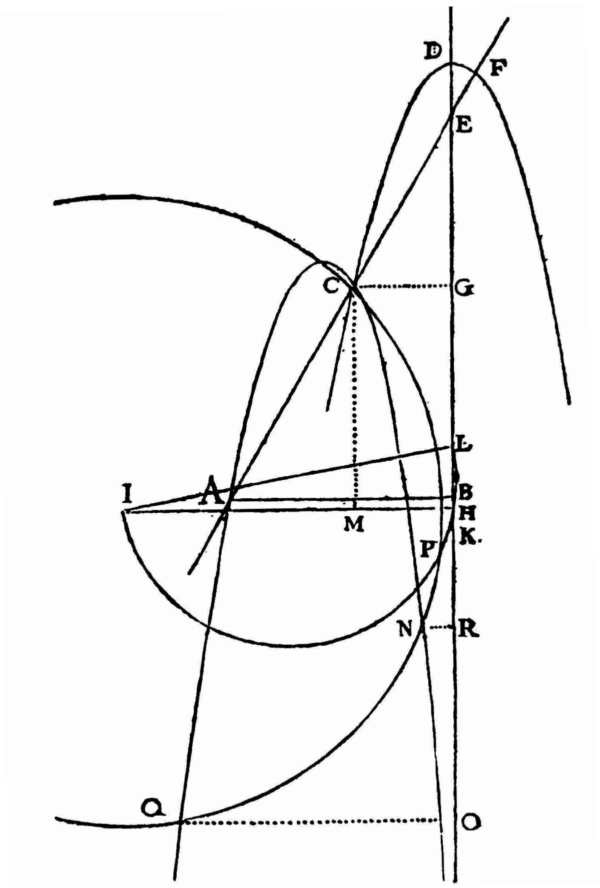


FIGURE 1.3 – *La résolution graphique d'une équation du sixième degré*

Enfin, à la toute dernière page, Descartes livre *in extremis* (mais sous une forme plus qu'évasive) ce qu'il croit être la clef des constructions réglant le cas des degrés supérieurs. Nous savons aujourd'hui de manière indiscutable que cette récurrence non prouvée est fausse, et que la mécanique si brillante qui avait bien fonctionné jusqu'au degré six est inopérante dès l'étape qui devrait la suivre immédiatement. Si donc l'algorithme fondamental voit ainsi brutalement amputé son domaine de validité, un lecteur d'aujourd'hui - pour qui le problème de résolution des équations a pris d'autres couleurs évidemment incompatibles avec les valeurs d'un homme du dix-septième siècle - s'en console facilement. Ce qui en subsistera à jamais, c'est que la méthode inventée pour qu'une technique de ce genre puisse se mettre en place a eu de telles autres retombées qu'elle suffit pour mettre Descartes en première ligne des novateurs dans une science où, en dépit des efforts d'un Viète par exemple, l'on avait désespérément besoin de créativité.

Même si l'explosion, trente ans plus tard, du Calcul Différentiel et Intégral dont il n'avait pas pressenti l'arrivée rejettera dans l'oubli les deux subtils algorithmes dont *La Géométrie* est porteuse, il n'en reste pas moins que l'histoire de la pensée newtonienne aurait été différente sans ce livre qui a joué un rôle essentiel dans sa genèse [36]. Bien qu'il n'ait été dans le domaine mathématique qu'un créateur exactement situé entre le dernier des classiques et le premier des modernes, le Descartes des *Essais* du *Discours de la Méthode* a néanmoins bien mérité, même par cette seule œuvre, la place privilégiée qu'il occupe encore aujourd'hui dans le Grand Amphithéatre de la Sorbonne : celle d'un observateur aigu et d'un grand acteur d'une Renaissance scientifique sans pareille, dont il fut en définitive le précurseur, le parrain et le prophète exigeant.

La réception de *La Géométrie*

Même si le volume de ses ventes a été très faible (« *vu le peu d'exemplaires que le libraire dit en avoir vendu, je ne vois pas grande apparence qu'il les doive réimprimer* » (9/1/39, lettre à Mersenne, AT II 481), même s'il a fallu à des étrangers comme Newton en attendre la traduction latine de Van Schooten de 1649 puis 1659, l'influence de ce livre a été exceptionnelle, pour les raisons indiquées plus haut.

Mais sur le moment, sa publication a surtout été l'occasion de vives querelles assez vaines entre Descartes et quelques contemporains, parmi lesquels Fermat, Roberval et Étienne Pascal. Pierre Fermat chassait sur les mêmes terres que lui ; la différence entre eux est moins grande qu'on ne l'a longtemps cru, car Fermat, même dans sa méthode « *De maximis et minimis* », est parfois presque aussi algébriste que Descartes lui-même ! Vues aujourd'hui, les deux inventions simultanées de la géométrie analytique par Fermat et Descartes sont très distinctes, ce qui s'explique par la différence des buts poursuivis :

36. Même si l'œuvre de Fermat, plus génial et plus profond, fut peut-être davantage proche par l'esprit de ce qui deviendra le *Calculus*.

mais à leur époque, elles semblaient identiques, et une publication qui ôtait au Toulousain toute possibilité d'affirmer une éventuelle priorité ne pouvait que lui porter ombrage. Surtout, le fait que paraisse une construction de tangentes complètement indépendante de l'algorithme personnel de Fermat ne pouvait que conduire à la discorde. Sur ce qui était justement leur deuxième grand domaine de concurrence, champ clos où intervient également Roberval, c'est Fermat qui l'emportera par la simplicité et la puissance de la méthode ; même si c'est sans doute le troisième qui est peut-être le plus proche du calcul différentiel et intégral à naître, par son inspiration cinématique du problème des tangentes. Mais Descartes avait été le premier à publier.

La très vive querelle qui éclata à cette occasion entre ces deux mathématiciens prestigieux, dont Descartes ne se tira pas à son avantage, a sans doute été heureuse dans la mesure où elle a conduit ce dernier à faire encore quelque peu de mathématiques, comme nous le montre sa correspondance des années suivant 1637. Mais sur ce plan Fermat et Descartes sont, en un certain sens, des hommes du passé - qu'ils parachèvent avec génie - ; l'avenir est plutôt du côté d'un Blaise Pascal, voire même d'un Roberval et, évidemment, du couple Newton/Leibniz. L'influence immédiate de ce Traité a donc été un peu dérisoire, sauf peut-être en Hollande dans un petit cercle de mathématiciens. Mais Desargues, Huygens, puis justement Newton et Leibniz [37], ont tous trouvé dans *La Géométrie* une grande source d'inspiration, en attendant qu'un d'Alembert par exemple lui rende pleinement justice dans l'*Encyclopédie*.

Dans la seconde moitié du siècle, le calcul différentiel et intégral, pièce triomphante d'analyse d'origine géométrique évidente, n'aurait pas été possible sans la géométrie analytique, et donc sans ce Traité. L'œuvre mathématique de Descartes a été parfaitement reconnue à partir du dix-neuvième siècle [38], même s'il semble que des notes discordantes se soient fait entendre à la fin du siècle dernier quant à cette postérité, qui aurait pollué notre conception française de l'éducation. Laissons-le répondre lui-même plutôt rudement, à son habitude : « *Pour ceux qui se mêlent de médire de ma Géométrie sans l'entendre, je les méprise* (AT II 13). Que ce texte désormais abordable fasse enfin que le mathématicien soit *intelligible à tous*, et que l'on « entende » son

37. Dont on connaît les vives critiques.
38. Par exemple par un Auguste Comte dans son *Cours de philosophie positive*.

génie à l'aune des hauts critères qu'il fixait lui-même le 1/3/38 (AT II 16) : **selon la justice et la vérité**.

Annexe I : Les figures de *La Géométrie*

Il existe trente figures différentes dans l'édition de 1637 de *La Géométrie*, certaines pouvant être reprises jusqu'à quatre fois (d'où finalement quarante-neuf occurrences). Leurs qualités sont assez variables, certaines comprenant des erreurs manifestes comme celle de la page 331 des *Essais* (402 de AT VI). D'une manière générale, elles ne brillent pas spécialement par leur clarté.

L'auteur des figures des *Essais* est très certainement Frans Van Schooten [39]. Dans sa *Vie de Descartes*, Baillet n'est absolument explicite qu'à propos des figures de l'édition de 1644 (les *Specimina* : voir le vol. II, pages 216 et 376) ; il ne dit pas avec précision qui est l'auteur des figures de 1637. Mais, comme nous le verrons, l'examen de la correspondance Huygens-Descartes permet de confirmer Baillet et de le compléter avec certitude.

Descartes a eu conscience de la difficulté d'exécution des gravures des *Essais* et, en conséquence, de la nécessité de combiner un talent de graveur à l'intelligence du texte scientifique, afin de donner à ces figures leur véritable fonction dans l'économie des textes. Cela apparaît en particulier au moment où Mersenne propose de s'occuper de l'impression en France : ≪ *il le* [Mersenne] *prévint* [...] *sur les figures tracées de sa main, c'est-à-dire assez mal, qu'il aurait à rectifier et à faire comprendre au Graveur de Paris* ≫ (Baillet, I 274) qui renvoie aux Lettres éditées par Clerselier, vol. II, p. 527.

Lisons aussi ce texte : ≪ *et que les figures n'y sont tracées que de ma main, c'est-à-dire très mal ; en sorte que si vous n'en tirez l'intelligence du texte pour les interpréter après au graveur, il lui serait impossible de les comprendre* ≫ (À Mersenne, mars 1636, AT I 339). Descartes reconnaît donc qu'il dessine mal : voir par exemple la remarque sur les dessins illustrant l'Explication des engins du 5 octobre 1637 (AT I 447).

Cela dit, la lettre à Huygens du 20 septembre 1643 (AT IV 753) pourrait sembler poser problème ≪ *Et cela n'empêche pas que je n'attende ici cette*

39. Je suis heureux de remercier ici Frédéric de Buzon de m'avoir fourni les éléments de cette Annexe.

semaine le fils du Professeur Schooten, qui a tracé les figures de ma Dioptrique, pour lui faire tracer celles de ma Philosophie, que le libraire m'a promis d'avoir achevée avant Pâques ». S'agissait-il de la *Dioptrique* ou de la *Dioptrica* ? Cela n'est pas évident à partir de cette lettre, où rien n'est dit des *Météores* ni du reste : ce texte n'est donc pas décisif contre Schooten.

En revanche, la lettre de Descartes à Huygens du 13 juillet 1636 (AT I 610) est sans ambiguïté

« *Mon libraire me promet que dans trois semaines toutes nos figures seront faites, et que nous commencerons à faire aller la presse, mais selon le cours des choses humaines qui est de n'effectuer jamais rien en si peu de temps qu'on l'a espéré, je ne crois pas que nous commencions de six semaines. Les figures seront presque toutes en bois et on les mettra en chaque page vis à vis du texte ainsi que vous m'avez fait la faveur de me conseiller. Le fils du Professeur Schooten qui est peintre et mathématicien les trace toutes et s'en acquitte fort bien ; ce qui m'exemptera de faire cet effort dont vous parlez, qui ne serait véritablement pas moindre que celui du fils de Crésus, à cause de mon peu d'adresse, mais qui serait bien moins admirable.* »

Cet échange n'était pas connu de Baillet. On voit donc que Descartes s'est rallié à la proposition de Huygens de faire disposer dans le texte des figures en bois autant de fois qu'il était nécessaire ; il faut cependant voir la portée exacte du « presque » indiqué par Descartes et préciser quelles sont les planches en cuivre (en principe, on doit pouvoir le voir à partir des bords et de la finesse relative du trait). C'est sans doute une solution plus onéreuse que celle des planches de cuivre disposées en cahier hors-texte (comme c'est le cas des *Principes* en français). Il semble aussi que les bois (ou cuivres éventuels) ont servi d'une édition à l'autre : apparemment, dans les traductions latines de 1649 puis 1659, il n'y a pas de différence entre les bois de l'original français et ceux de la traduction latine, ce qui n'a rien de surprenant puisque Schooten en est le traducteur, et également l'auteur certain du portrait de Descartes figurant en frontispice.

Par contre les éditions de 1664, 1705 et 1886, entre autres, ont conduit les auteurs à dessiner de nouvelles figures, sans en améliorer nécessairement les défauts, à la différence d'Adam et Tannery qui ont repris les originaux. Une étude précise de toutes ces figures reste à faire, en liaison avec le texte qu'elles jouxtent, bien entendu. Elle devrait naturellement être menée sur l'ensemble du *Discours*, et étendue à d'autres textes cartésiens : par exemple, certaines illustrations de l'édition d'Adam et Tannery diffèrent des originaux comme par exemple pour les *Cogitationes Privatæ*.

Annexe II : Erratum de l'édition originale

L'édition de 1637 est loin d'être parfaite. À la page 445 des *Essais*[40] on trouve une liste d'erreurs concernant tout le *Discours*, dont certaines portent sur *La Géométrie*. Il nous est apparu intéressant de relever ici, sans commentaire particulier, certaines de ces corrections à faire, généralement observées d'ailleurs par les éditeurs modernes.

Dans ce qui suit, un symbole tel que « datam (datum) » signifie : lire le mot *datam* en place du mot *datum*. Les pages sont celles des *Essais*.

a) **Neuf erreurs repérées par Descartes**

- 305 $\ell 8$: datam (datum)
- 326 $\ell 12$: ez^3 $(e^3 z)$
- 326 $\ell 18$: *idem*
- 343 $\ell 1$: $v + \sqrt{\ldots}$ $(x + \sqrt{\ldots})$
- 377 $\ell 12$: 1/4 (3/4)
- 378 $\ell 24$: $-b$ (-6)
- 398 $\ell 10$: $-\sqrt{\mathrm{C.} - \frac{1}{2}q \ldots}$ $\left(+\sqrt{\mathrm{C.} + \frac{1}{2}q \ldots}\right)$
- 398 $\ell 15$: $\frac{1}{2}q$ $\left(\frac{1}{4}q\right)$
- 401 $\ell 17$: me (ne).

b) **Douze autres erreurs importantes**

- 337 $\ell 1$: données (cherchées)

40. Non numérotée.

- 381 $\ell{-}6$: -16 (16) [deux fois]
- 385 $\ell{-}1$: $-20x$ $(-20x - 20x)$
- 386 $\ell 9$: -64 $(+64)$
- 391 $\ell 6$: échanger A et C
- 393 $\ell{-}1$: $-pzz$ $(-pz)$
- 399 $\ell{-}8$: $\dfrac{3q}{p}$ $\left(\dfrac{3p}{q}\right)$
- 400 $\ell 16$: $+pz + q$ $(-qz + p)$
- 400 $\ell{-}4$: $-pz - q$ $(+q - p)$
- 409 $\ell{-}1$: $4n^2v$ $(2n\sqrt{v})$
- 411 : oubli d'une note en marge « *L'invention de quatre moyennes proportionnelles* »
- 412 $\ell 1$: $\dfrac{a}{3n}$ $\left(\dfrac{2a}{3n}\right)$.

c) Il existe par ailleurs de très nombreuses autres imperfections, que l'on appellerait de nos jours des « fautes de frappe ». Les relever ici serait sans intérêt ; que l'on sache seulement que leur nombre est d'environ une trentaine. La plus grave est lourde, puisqu'elle concerne le tableau de la page 382 des *Essais* (456 de AT VI) qui est à réécrire, si l'on désire pouvoir le comprendre dans ses détails.

Annexe III : Erratum d'Adam et Tannery

- Les figures des pages 402 et 404 doivent être échangées afin de respecter leur ordre de 1637 et d'être mieux en adéquation avec le texte.
- Supprimer celle de la page 432, qui fait double emploi et n'existe dans les *Essais* que quatre fois, aux pages 342, 344, 350 et 360.
- Lire « augmentant » au lieu de « diminuant » en ligne 13 de la page 448 (c'est d'ailleurs incohérent avec le texte en marge).
- Rétablir le texte « l'un de ces deux termes » en ligne 13 de la page 449, où le mot « deux » a disparu.

Chapitre 2

Les équations de degrés 1 et 2

Les titres des principaux paragraphes en lesquels se découpe *La Géométrie* sont placés dans les marges du livre. Le tout premier vaut d'être mis en exergue (en facteur pourrait-on dire) pour tout le Traité. Il contient, et résume à merveille, tout ce que ses non-lecteurs en retiennent. Donnons-lui ici toute sa place

Comment le calcul d'Arithmétique se rapporte aux opérations de Géométrie

Cette revendication d'un rôle, qui plus est, majeur des applications des calculs usuels au sein des problèmes géométriques n'est pas tout à fait nouvelle. Dès Euclide déjà en effet, certaines démonstrations se ramènent à des vérifications mettant en jeu des longueurs, introduites en particulier par les théorèmes de Thalès (Proposition 2 du sixième Élément, Heath II, p. 194) [1] ou de Pythagore (Proposition 47 du deuxième Élément, Heath I, p. 349) [2].

1. Rappelons que l'on n'appelle ainsi l'utilisation des relations métriques mises en jeu dans la théorie des triangles homothétiques qu'en notre seule France et sa sphère intellectuelle scolaire.

2. En plus des deux théorèmes métriques fondateurs, on doit également citer ce que l'enseignement français appelle à tort *la formule d'Al-Kâshi* : pour un triangle ABC on dispose de l'égalité

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AC \cos \widehat{A}.$$

En fait, elle recouvre exactement les Propositions 12 et 13 du second Élément (Heath I, pp. 403-406), évidemment sans trigonométrie, mais avec l'introduction de la projection

Parmi dix exemples, citons les propositions 9 et 10 du deuxième Élément (Heath I, pp. 392 à 395), consacrées à un cas particulier du premier théorème de la médiane[3] où le théorème de Pythagore est appelé sept fois[4]. L'introduction de nombres en géométrie n'est donc pas si récente !

Mais la révolution cartésienne n'en est pas moins essentielle, comme nous le montrerons tout au long du reste de ce travail.

Construire des produits ou des rapports

La figure ci-après se lit à la seconde page de *La Géométrie*. À elle seule, elle permet de résoudre « à la Descartes » un problème tel que le suivant (p. 350 des *Essais*, p. 422 de AT VI) : construire un point P d'une droite donnée connaissant le nombre

$$AP = v = \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2zs}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z} \cdot$$

Laissant de côté pour l'instant le problème de la division, que Descartes résout également grâce à cette figure considérée comme un algorithme en soi (*cf.* page 72), l'on voit qu'il suffit de connaître le numérateur et le dénominateur, qui s'expriment par des formules polynomiales, et donc de pouvoir appliquer un certain nombre de fois des additions, soustraction et multiplications ramenées à des constructions géométriques.

---

orthogonale D de B sur AC qui permet d'écrire

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 \pm 2\,CA \cdot AD$$

suivant que l'angle $\widehat{A}$ est obtus ou aigu.

3. Si C est le milieu du segment $[AB]$ et D un point de la droite AB, alors

$$AD^2 + DB^2 = 2\,(AC^2 + CD^2).$$

Le théorème général ne suppose pas D nécessairement aligné avec A, B, C.

4. Il peut arriver que le recours à des relations métriques soit plus enfoui : ainsi la preuve euclidienne (astucieuse) du théorème de Thalès repose-t-elle finalement sur la formule donnant l'aire d'un triangle en fonction d'une base et de la hauteur correspondante.

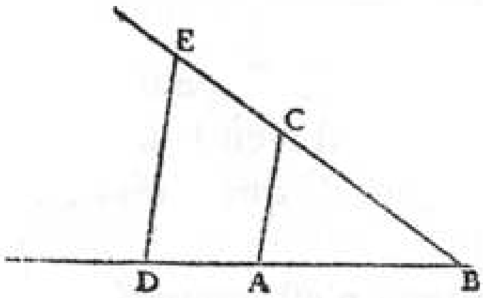


FIGURE 2.1 – *Le premier degré chez Descartes*

Seule la dernière opération pose un problème, à vrai dire sans grande difficulté. Bien entendu sa solution [5] était essentiellement connue d'Euclide, mais Descartes va lui donner un tour inattendu. Sa figure se lit en effet déjà dans le sixième Élément [6], dans les Propositions 11 et 12 (Heath II, pp. 214-5). La première, cas particulier de la seconde, permet de construire la troisième proportionnelle de deux nombres a et b (c'est-à-dire le quotient b^2/a) introduits comme longueurs de segments donnés, alors que la dernière conduit à la quatrième proportionnelle bc/a de trois nombres a, b et c.

L'idée de Descartes est si simple que son côté révolutionnaire échappe en général. Avant lui, les longueurs des segments étaient des données *absolues* ; il en fera des notions relatives en décrétant tel segment de sa figure, pris à sa guise, être une unité. À la page suivante, il écrira

« *Toutes les parties d'vne mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est point déterminée en la question* [7] [...], *mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est déterminée, a cause qu'elle peut être sousentendue par tout où il y a trop ou trop peu de dimensions.* »

5. Trouvée selon la légende par Thalès pour connaître la hauteur d'une pyramide connaissant celle de son bâton.

6. Avec les notations de Descartes, Euclide prouve l'égalité des rapports $\dfrac{BC}{CE}$ et $\dfrac{BA}{AD}$, alors que Descartes utilisera plutôt celle de $\dfrac{BC}{BE}$ et de $\dfrac{BA}{BD}$, mais cette différence est sans grande importance.

7. Ainsi, b^2/a et bc/a ont un sens, mais b/a, rapport de deux longueurs, ne peut être compris comme étant une longueur

Il donne dans la foulée l'exemple de $\sqrt[3]{aabb - b}$, pour laquelle « *il faut penser que la quantité aabb est divisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme* ». Cette liberté conceptuelle nouvelle lui permet de dire que la figure peut bien donner des quantités comme b^2/a et bc/a, mais aussi b/a ou bc selon le cas, à condition de pouvoir prendre arbitrairement l'une des longueurs de la figure égale à l'unité.

Poser ainsi *a priori* $AB = 1$ lui permet donc d'écrire l'égalité $BE = BD \cdot BC$ et résout le problème de la traduction géométrique de la multiplication entre nombres, donc celui de la construction du numérateur et du dénominateur de la quantité v ci-dessus.

Mais Descartes n'a pas pour seul but de donner des interprétations ponctuelles des opérations d'addition/soustraction et multiplication/division auxquelles il ajoute l'extraction de racine carrée en reprenant exactement la figure de la Proposition 13 du sixième Élément (Heath II, p. 216)[8]. Il va en avoir besoin pour traiter le cas $n = 2$ de son programme essentiel : **résoudre par la géométrie toutes les équations de la forme** $P(x) = 0$, où P est un polynôme de degré n. Nous entrons ici dans le cœur du Traité.

Géométrie et solutions d'équations algébriques

Le thème de la résolution des équations algébriques a constitué le cœur de l'algèbre, depuis la plus haute Antiquité jusqu'au dix-neuvième siècle. Ses problèmes sont clos depuis 1830.

À côté de techniques purement algébriques de détermination des racines (par exemple à l'aide d'extractions de racines carrées ou cubiques - la double intervention de ce mot n'étant naturellement pas un hasard), la géométrie a aussi joué un rôle essentiel dans ces résolutions ; étudier avec quelques détails ses interventions est à la base de ce texte-ci qui permet de placer Descartes dans cette très longue histoire.

8. Cette figure suit immédiatement dans Euclide les précédentes ; ce n'est pas une coïncidence, mais la preuve de la connaissance approfondie de cet auteur chez Descartes.

Le calendrier

Voici les dates essentielles (et approximatives : ainsi plusieurs années peuvent s'écouler entre la conception et la diffusion d'une idée). Elles concernent tantôt l'œuvre de créateurs (Del Ferro, Descartes, Galois...), tantôt celle de compilateurs qui ont joué un rôle essentiel de dissémination des techniques (Euclide, Cardan...), les noms d'Euclide et Descartes se détachant tout particulièrement pour ce qui concerne les méthodes géométriques

- Babylone (∼1800 avant Jésus-Christ ?)
- Euclide (∼300 avant Jésus-Christ)
- Diophante (∼250 après Jésus-Christ)
- Al Khwârizmi (∼825)
- Del Ferro (1515)
- Cardan (1545)
- Viète (1593)
- Descartes (1637)
- Newton (1671) et Raphson (1690)
- Lagrange (1770)
- Abel (1821)
- Galois (1830).

Cet ensemble de recherches couvre donc approximativement trente-cinq siècles, ou même davantage.

Équations du premier et du second degré

Les premières ($ax+b=0$) sont immédiates à résoudre : il existe une solution unique, à savoir $x = -\dfrac{b}{a}$ car a est supposé non nul (sinon l'on ne parlerait pas de premier degré).

Les secondes ($ax^2+bx+c=0$) sont bien connues de nos élèves de lycée. Leurs résolutions dépendent du corps dans lequel figurent les coefficients (a, b, c) et les diverses racines possibles (x).

Le cas le plus simple est celui des nombres réels. Le calcul commence par la détermination du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$; si celui-ci est strictement positif, il existe deux solutions (distinctes) données par les égalités

$$x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;$$

s'il est nul, il y en a une seule, à savoir $x = -\dfrac{b}{2a}\cdot$ Enfin, si Δ est strictement négatif, il n'y a aucune solution.

La notion de racine unique (nous disons *racine double*) était connue par exemple de Diophante au troisième siècle après Jésus-Christ puisqu'il étudie l'équation $x^2+4=4x$ pour lequel 2 est racine double (IV 22, trad. Ver Eecke p. 139). Nous verrons que cette notion joue un rôle très important dans la naissance de l'algorithme cartésien pour déterminer des normales à une courbe.

La règle de Colin MacLaurin

Voici le texte de la traduction française par Le Cozic de 1753 du *Traité d'Algèbre, et de la manière de l'appliquer* publié en 1748 deux ans après la mort de son auteur écossais Colin MacLaurin, pour ce qui concerne l'équation générale du second degré [9].

9. À la différence de notre usage, cet algorithme est donné de façon purement verbale, sans aucune formule : il est vrai que la règle en question est immédiatement suivie de l'exemple de l'équation $y^2+ay=b$. On doit noter également qu'il n'y a aucune allusion au cas des racines complexes, mais que le calcul effectif en tient compte de manière correcte.

`Règle.`

`1`^{o}`. Transportez tous les termes qui contiennent l'inconnue dans un membre de l'équation, & tous les terme connus dans l'autre membre.`

`2`^{o}`. Si le quarré de l'inconnue est multiplié par quelque quantité, divisez tous les termes de l'équation par cette quantité.`

`3`^{o}`. Formez le quarré de la moitié de la quantité qui multiplie l'inconnue simple, ajoutez-le dans l'un & l'autre membre de l'équation, & par ce moyen, le membre qui renferme l'inconnue sera un quarré parfait.`

`4`^{o}`. Tirez la racinne quarrée de l'un & l'autre membre, qui, dans l'un, sera toujours l'inconnue avec la moitié de la quantité qui multipliait l'inconnue simple ; de sorte, qu'en transposant cette moitié, on aura la valeur de l'inconnue.`

On peut reconnaître ici, non sans quelque peine, notre mode opératoire. Rappelons pour sourire une histoire qu'aimait raconter le grand mathématicien Laurent Schwartz : lors d'une inspection un élève, ayant à résoudre l'équation $x^2 + x + 2 = 0$ et voulant honorer son professeur, calcule soigneusement $\Delta = -7$ et lance la litanie traditionnelle : « *Si* -7 *est strictement positif, alors...* ».

Ce mode opératoire est connu sous le nom de *complétion du carré*. Il peut naturellement se justifier de façon purement algébrique, par exemple en démontrant l'une des identités remarquables suivantes

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \qquad a^2-b^2 = (a-b)\,(a+b), \qquad (x+y)^2-(x-y)^2 = 4xy.$$

Elles-mêmes ont souvent été prouvées géométriquement au cours de l'histoire. Voici par exemple une figure permettant de justifier les deux dernières [10]

10. Celle de gauche suit la Proposition 4 du deuxième Élément (Heath I, p. 379).

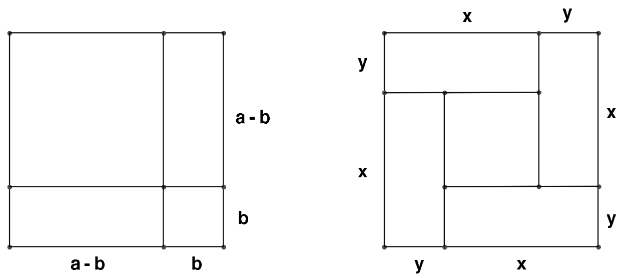


FIGURE 2.2 – *Deux identités très remarquables*

À chaque fois, il suffit en effet de calculer de deux manières différentes l'aire d'un carré, ce qui donne respectivement

$$a^2 = b^2+2b\,(a-b)+(a-b)^2 = b^2+(a+b)\,(a-b), \qquad (x+y)^2 = (x-y)^2+4xy.$$

Ainsi, il suffit de poser $y = 2p - x$ (supposé positif ou nul) sur la seconde figure pour en déduire l'équivalence des deux relations $x^2 - 2px + q = 0$ et $(x - p)^2 = p^2 - q$.

Les équations du second degré sur un corps quelconque

Dans le cas général d'une équation du second degré sur un corps quelconque, la méthode précédente s'étend facilement : on remplace par exemple la condition $\Delta < 0$ par le fait que Δ n'appartient pas à l'ensemble des carrés du corps. C'est notamment le cas pour l'ensemble des nombres complexes, connu dès le seizième siècle, dans lequel toute équation du second degré a toujours au moins une solution (deux si Δ n'est pas nul).

Il y a pourtant exception notable lorsque le corps est de caractéristique 2 (c'est-à-dire où $1 + 1 = 0$) : ici la question est bien plus complexe (sauf si $b = 0$, auquel cas l'équation est du type $x^2 = d$ et a une solution, unique, si et seulement si d est un carré du corps ; c'est toujours le cas si le corps est fini, car l'application $x \mapsto x^2$ est injective). Dans le cas général, l'équation se met sous la forme $x^2 + x = d$ en remplaçant l'inconnue x par $\frac{b}{a}\,x$; on ne peut guère aller plus loin vers un algorithme de résolution qui puisse s'appliquer à tous les cas [11].

11. Signalons simplement que dans le cas particulier où le corps est fini, c'est-à-dire ici

Les formes réduites

Dans les exemples qui suivront, pour la simplicité de l'exposé, nous ne nous intéresserons qu'aux équations particulières commodes

$$x^2 + 2px = q, \qquad x^2 = 2px + q, \qquad x^2 + q = 2px$$

respectivement appelées équations *positives*, *négatives* et *ambiguës* (ces dénominations sont dues à Viète).

Naturellement les nombres x, p et q sont positifs ou nuls. Mais il ne faut pas oublier que ces formes réduites sont modernes, et que Viète, comme les anciens, étudiait plutôt ce que nous écririons, avec les notations dues à Descartes, sous les formes générales $ax^2+bx = c$, $ax^2 = bx+c$ et $ax^2+c = bx$.

Il existe également une quatrième forme, à savoir $x^2 + 2px + q = 0$, qui ne possède aucune racine positive sauf peut-être 0 ; elle se ramène immédiatement aux équations ambiguës en changeant x en $-x$. Jusqu'à Descartes y compris, cette forme restera donc volontairement ignorée.

Dans ces trois cas, l'équation considérée admet comme solutions (nécessairement positives)

- une racine unique $x = \sqrt{p^2 + q} - p$ pour une équation positive ;
- une racine unique $x = p + \sqrt{p^2 + q}$ pour une équation négative ;
- aucune racine si $p^2 < q$, une racine unique $x = p$ si $p^2 = q$ et deux racines distinctes $x = p + \sqrt{p^2 - q}$ et $x = p - \sqrt{p^2 - q}$ si $p^2 > q$ pour une équation ambiguë.

---

de cardinal 2^n, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait des racines s'écrit

$$\sum_{m=1}^{n} x^{2^{m-1}} = 0.$$

Mais, même dans ce cas favorable, la recherche effective des racines n'est pas simple et repose essentiellement sur une série d'essais successifs (pas de formules générales comme chez les nombres réels). On voit donc ainsi que, si innocente qu'elle puisse paraître, la simple équation du second degré peut cacher des coins assez sombres, même pour l'arsenal perfectionné de notre siècle.

Il existe un lien fort entre ces types de racines : en effet, la racine négative d'une équation non ambiguë admet évidemment pour valeur absolue la racine positive de l'autre équation non ambiguë ayant les mêmes coefficients [12]. Mais ce n'était pas clair à l'époque.

Naturellement, x et p sont de dimension 1 (longueurs de segments) et q de dimension 2 (par exemple aire de rectangle) alors que dans le cas général a et x sont de dimension 1, b de dimension 2 et c de dimension 3.

Les calculs babyloniens

Sans aucun doute les motivations babyloniennes pour résoudre des équations du premier et du second degré étaient-elles principalement géométriques ; cela dit, ce que nous lisons sur les tablettes qui nous sont parvenues est essentiellement constitué de calculs sans figures.

Rappelons que la base de numération est soixante : nous noterons ainsi, par exemple pour des commodités de lecture, les rationnels $\dfrac{49}{16} = 3 + \dfrac{3}{60} + \dfrac{45}{3600}$ et $\dfrac{275}{4} = 1 \cdot 60 + 8 + \dfrac{45}{60}$ sous les formes respectives $3'3''45'''$ et $1^0 8'45''$ qui rappellent les unités de temps et d'angles [13].

• Le premier exemple présenté ici est celui de la tablette YBC 4663, où il s'agit de déterminer les côtés x et y d'un rectangle d'aire $xy = 7'30''$ $\left(= \dfrac{15}{2}\right)$ et de demi-périmètre $x + y = 6'30''$ $\left(= \dfrac{13}{2}\right)$, donc, pour un moderne, de résoudre l'équation ambiguë

$$x^2 + \frac{15}{2} = \frac{13}{2}\,x$$

de racines $1'30''$ $\left(= \dfrac{3}{2}\right)$ et $5'$ $(= 5)$.

12. Il suffit en effet de remarquer que si $x < 0$ vérifie l'égalité $x^2 \pm 2px = q$, alors $-x > 0$ vérifie l'égalité $x^2 \mp 2px = q$.
13. Ce n'est naturellement pas une simple coïncidence.

Voici le détail des calculs, qui sont très faciles à suivre en dépit de leur caractère déroutant au premier abord

$$
\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &= 3'15'' \quad \left(=\frac{13}{4}\right),\\
\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &= 10'33''45''' \quad \left(=\frac{169}{16}\right),\\
\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy &= 3'3''45''' \quad \left(=\frac{49}{16}\right),\\
\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} &= 1'45'' \quad \left(=\frac{7}{4}\right),\\
\frac{x+y}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} &= 5' \quad (=5),\\
\frac{x+y}{2} - \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} &= 1'30'' \quad \left(=\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Ces calculs sont effectués sans justification d'aucune sorte ; ils reposent sur l'identité remarquable déjà citée

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$$

qui n'est qu'une variante de l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et était donc connue depuis une époque très reculée.

Aurait-t-on ici une preuve que les Babyloniens connaissaient la *formule* magique $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$? Il n'en est naturellement rien, on peut seulement en déduire qu'ils connaissaient l'*algorithme* aujourd'hui encrypté dans notre formule moderne.

• Une seconde tablette, BM 13901, traite notamment, toujours sans démonstration, de l'équation positive $ax^2 + bx = c$, particularisée en $11x^2 + 7x = 6'15''$ $\left(=\dfrac{25}{4}\right)$, de racine positive unique $30'$ $\left(=\dfrac{1}{2}\right)$.

Voici le détail des calculs

$$\begin{aligned}
ac &= 1^0 8'45'' \quad \left(= \frac{275}{4}\right), \\
\frac{b}{2} &= 3'30'' \quad \left(= \frac{7}{2}\right), \\
\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= 12'15'' \quad \left(= \frac{49}{4}\right), \\
\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac &= 1^0 21' \quad (= 81), \\
\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} &= 9' \quad (= 9), \\
\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2} &= 5'30'' \quad \left(= \frac{11}{2}\right).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à diviser par a, c'est-à-dire multiplier par l'inverse de a, que nous notons aujourd'hui $\frac{1}{11}$.

Malheureusement, ce nombre n'est pas dans l'arsenal des Babyloniens, qui ne connaissent que les inverses qui s'écrivent avec un nombre fini de « décimales » à base soixante (comme d'ailleurs il en va de même dans notre système actuel de base 10). Heureusement, quelques tâtonnements montrent aussitôt que $5'30'' = 11 \cdot 30''$, ce qui permet de conclure [14].

La même tablette contient aussi l'équation positive $x^2 + x = 45''$, de racine évidente $x = 30''$, obtenue de la même manière. Ces fois-ci, la légitimation de la technique repose certainement sur une méthode voisine de notre *complétion du carré* [15].

14. Bien entendu le nombre de coïncidences qui font que cet exemple peut être correctement traité - la rencontre d'un carré parfait et cette divisibilité par 11 - ne laisse aucun doute sur la nature du problème : c'est un exercice ardu de formation pour de futurs calculateurs, et non la solution d'un problème concret.

15. S'il n'existe pas à notre connaissance de tablette babylonienne portant une figure géométrique très simple mais suffisante pour justifier les techniques de ces deux résolutions (et de nombreuses autres), cela ne signifie nullement que de telles preuves n'aient pas existé (voir le livre de référence sur ces questions : Jens Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces*, 2002, Springer Verlag).

Les équations chez Euclide

C'est ici que, pour la première fois, sont réunies de manière organisée des techniques générales de résolution d'équations du premier et du second degré. Cela dit, il est difficile de voir au premier coup d'œil quelles sont les parties qui en traitent : non seulement elles ne sont pas annoncées en tant que telles, mais pour les trouver il faut explorer plusieurs *Éléments*, dont le premier, le deuxième et le sixième.

Il ne s'agit pas en effet, comme on le ferait aujourd'hui d'algorithmes numériques. Preuves et résolutions sont basées sur la géométrie classique (tracé de parallèles, perpendiculaires, arcs de cercle *etc.*) ; il faut dire que les algorithmes géométriques présentés ici ne peuvent pas être retrouvés tels quels dans les *Éléments*.

Ces livres écrits par un intellectuel pour des intellectuels n'avaient pas pour but d'aligner des recettes, mais bien des méthodes générales qui, mises bout à bout, permettent de résoudre de nombreux problèmes comme ceux-ci.

Le premier degré

Pour les Grecs, qui ne connaissent pas les nombres négatifs, la forme générale de l'équation du premier degré est $ax = b$, de solution $x = \dfrac{b}{a}$, où a, x et b sont des nombres positifs ou nuls.

En fait, les deux premiers d'entre eux sont des mesures de longueurs, le dernier étant une mesure d'aire (on dirait aujourd'hui qu'il est de dimension 2). Pour le représenter, Euclide utilise systématiquement une surface, triangulaire ou polygonale par exemple : pour simplifier, nous nous limiterons au cas où b est l'aire d'un rectangle.

Les Grecs connaissaient ce problème sous le nom d'*application des aires parabolique*.

La résolution repose essentiellement sur le théorème dit de Thalès : on la trouve dans la Proposition 44 du premier Élément (Heath I, p. 341). On part d'un segment AB de longueur a et d'un rectangle $ACDE$ d'aire b, le point

A étant aligné avec les points B et E et situé entre eux. On peut suivre sur la figure la construction successive des points F, G, H et I en respectant les parallélismes et les alignements de la figure. L'inconnue x mesure la longueur BH : en effet les triangles FGH et GFD (resp. FAB et AFC, AGI et GAE) ont des aires égales par symétrie, d'où il découle que les rectangles $ACDE$ et $ABHI$ ont aussi des aires égales, respectivement égales à b et ax.

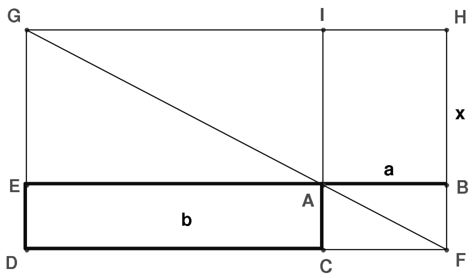


FIGURE 2.3 – *Le premier degré chez Euclide (application parabolique)*

Comme souvent chez Euclide la figure joue ici un double rôle : permettre la démonstration d'une certaine égalité *si l'on suppose dans un premier temps le problème résolu*, et sinon indiquer un algorithme de construction effective de x à partir de a et b (pour lequel le point I est d'ailleurs inutile).

On verra plus loin qu'un Descartes, par exemple, partant du même théorème de Thalès, introduira une construction du même nombre x nettement plus naturelle, mais cela supposait un pas en avant psychologique essentiel : considérer, grâce à un segment unité donné à l'avance, que b pouvait être considéré comme un nombre analogue à a et x, pas que les anciens n'avaient évidemment pas franchi.

Désormais, dans la suite de cette partie, nous ne traiterons plus que des équations de degré supérieur ou égal à deux.

Le second degré

On ne trouve dans Euclide qu'une seule équation du second degré complètement résolue, à savoir $x^2 + ax = a^2$ (*couper en moyenne et extrême* *raison*), dans la trentième Proposition du sixième Élément (Heath II, p. 267). Mais l'essentiel de la théorie s'y trouve magistralement décortiqué.

Toutes les résolutions algébriques de l'équation générale du second degré reposent essentiellement sur la recherche de racines carrées.

Construire géométriquement la racine carrée d'un nombre h demande l'intervention d'au moins un cercle. La méthode que nous trouvons dans Euclide est, encore aujourd'hui, insurpassable de simplicité ; tous ses successeurs l'emploieront comme nous l'avons déjà vu pour Descartes.

Dans la figure ci-dessous, où JL est un diamètre, la longueur KM est la *moyenne géométrique* (ou la *moyenne proportionnelle*) des longueurs KJ et KL puisque l'on a, dans le triangle rectangle JML, l'égalité $KM^2 = KJ{\cdot}KL$. Pour construire $KM = \sqrt{h}$, il suffit donc que le produit $KJ \cdot KL$ soit égal à h, ce qui se peut par exemple en posant $KJ = 1$ et $KL = h$ ou toute autre combinaison possible comme $KJ = \lambda$ et $KL = \dfrac{h}{\lambda}\cdot$

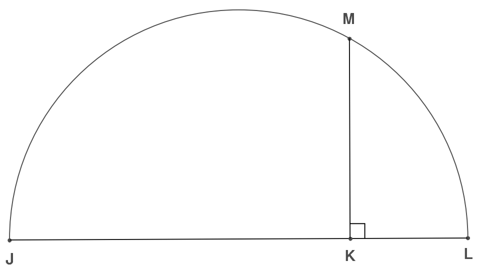


FIGURE 2.4 – *La racine carrée chez Euclide... et Descartes*

Cette égalité $KM^2 = KJ \cdot KL$ joue, chez Euclide, le rôle de notre équation de cercle ; on pourra se rapporter aux Propositions 14 du deuxième Élément (Heath I, p. 409), puis 31 du troisième Élément, 8 et 13 du sixième (Heath II, pp. 61, 209 et 216) [16]. Tout cela sera suivi à la lettre par Descartes dans les toutes premières pages de *La Géométrie*, sans référence particulière à

16. À vrai dire, il ne s'agit là que d'une condition nécessaire pour que M appartienne au cercle de diamètre JL ; que cette condition soit aussi suffisante n'est pas écrit, mais résulte aussitôt de la Proposition 13 du sixième Élément.

Euclide, mais c'est parce que ces choses simples étaient supposées être très familières à son lecteur.

Le travail de résolution géométrique d'une équation du second degré, disons par exemple ambiguë $x^2 + q = 2px$, se fait en deux temps : d'abord justifier (ici géométriquement) une identité algébrique qui permette d'affirmer que l'une des deux racines est $p - \sqrt{p^2 - q}$ lorsque cette expression a un sens, puis donner une construction de cette quantité à partir d'un segment de longueur p et d'un rectangle - par exemple - d'aire q.

Justifications d'identités remarquables

Bien que le contenu de cette partie appartienne à Euclide, nous préférons en donner une interprétation plus proche de nos habitudes pour gagner en clarté (la lecture du texte original n'est pas toujours commode).

On en trouvera les textes sources en se reportant aux Propositions 5 et 6 du deuxième Élément (Heath I, pp. 382 et 385), et 27 à 29 du sixième Élément (Heath II, pp. 257 à 265) - ici le coefficient de x^2 n'est pas nécessairement égal à 1 -, où ces problèmes sont nommés *application des aires elliptique*, pour l'équation ambiguë, et *application des aires hyperbolique*, pour les deux autres types.

Commençons donc par le premier cas (pour lequel Euclide ne considérera que la racine $x = p - \sqrt{p^2 - q}$, négligeant l'autre dont il connaissait pourtant évidemment l'existence et la valeur, puisque la méthode qu'il donne s'applique à elle pratiquement sans changement).

La figure ci-dessous suppose, comme c'est normalement le cas dans l'analyse d'un problème, que le problème est résolu et que nous connaissons donc un segment de longueur x solution de $x^2 + q = 2px$. Elle exhibe une plaque polygonale en forme d'équerre hexagonale, réunion de quatre plaques rectangulaires dont les longueurs des côtés sont explicitées.

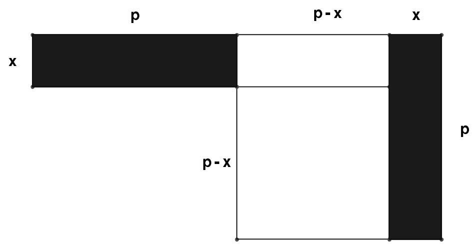


FIGURE 2.5 – *L'égalité remarquable* $p^2 = (2px - x^2) + (p - x)^2$

En décomposant de deux manières différentes cette plaque en deux ou trois plaques rectangulaires simples, on aboutit facilement à l'égalité visuelle

$$px + p^2 = x\,(2p - x) + (p - x)^2 + px$$

soit encore $p^2 = (2px - x^2) + (p - x)^2$. Par suite, pour que $x^2 + q = 2px$, il faut, et il suffi,t que l'on dispose de l'égalité

$$(p - x)^2 = p^2 - q$$

quantité supposée positive (voir à ce sujet la vingt-septième proposition).

Cette première intervention d'une figure géométrique permet de ramener, comme nous l'avions dit, la résolution à une prise de racine carrée. Il en sera de même pour les équations non ambiguës.

La nouvelle figure ci-dessous concerne une équation positive $x^2 + 2px = q$, dont il s'agit de montrer que l'unique racine positive est $x = \sqrt{p^2 + q} - p$.

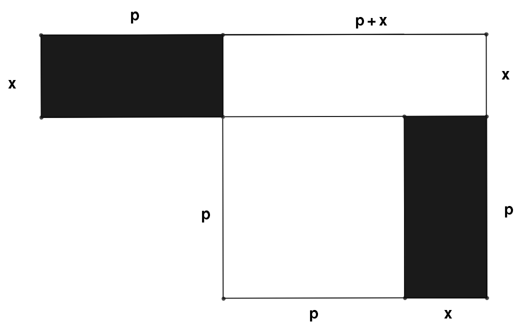


FIGURE 2.6 – *L'égalité remarquable* $(p + x)^2 = (2px + x^2) + p^2$

Cette fois-ci, l'égalité visuelle est

$$px + (p + x)^2 = x\,(2p + x) + p^2 + px$$

soit encore $(p + x)^2 = (2px + x^2) + p^2$. La condition nécessaire et suffisante $x^2 + 2px = q$ s'écrit donc bien $(p + x)^2 = q + p^2$.

Comme il arrive souvent dans son livre qui ne veut donner que des méthodes générales et non pas être un recueil complet de recettes prêtes à l'usage, Euclide laisse à son lecteur le soin de découvrir lui-même le cas d'une équation négative $x^2 = 2px + q$, de racine $x = p + \sqrt{p^2 + q}$; une illustration adaptée à ce cas, négligé dans les Éléments, est identique à la précédente à ceci près qu'il suffit de changer x en $x - 2p$, c'est-à-dire $(x, p + x)$ en $(x - 2p, x - p)$ dans la figure[17].

Nous sommes donc désormais en possession d'identités algébriques, justifiées par la géométrie, qui équivalent à notre méthode de *complétion du carré*.

Construire les racines

Il reste donc à montrer comment, avec une règle et un compas, construire une racine d'une équation du second degré à partir de p et q donnés géométriquement. Nous avons déjà indiqué qu'Euclide ne l'a pas fait explicitement ; c'était en effet inutile à son point de vue, puisque son traité contient tout le matériel nécessaire : Descartes à son tour dira bien en 1637 « *ie tascheray d'en mettre la demonstration en peu de mots. car il m'ennuie désia d'en tant escrire* » (*La Géométrie*, Livre Premier, p. 309 des *Essais*, AT VI p. 382).

Le mathématicien écossais Robert Simson (1687-1768), traducteur et commentateur d'Euclide, croira bon d'ajouter en 1756 au texte grec une construction effective très ingénieuse de $p - \sqrt{p^2 - q}$; il fera d'ailleurs de même pour $\sqrt{p^2 + q} - p$. Cela partait bien entendu d'un bon sentiment, mais l'introduction des arcs de cercle simsoniens est plus que maladroite. Si les mathématiques sont correctes, il s'agit d'une addition étrangère au corpus euclidien, alors qu'un peu d'attention aurait pu conduire à une construction

17. Les relations qui s'en déduisent alors sont respectivement $p\,(x - 2p) + (x - p)^2 = (x - 2p)\,x + p^2 + p\,(x - 2p)$, $(x - p)^2 = (x^2 - 2px) + p^2$ et $(x - p)^2 = q + p^2$.

obtenue par simple concaténation du contenu des Éléments, que l'on trouvera ci-dessous pour l'équation ambiguë $x^2 + q = 2px$ et ses deux racines $p \pm \sqrt{p^2 - q}$.

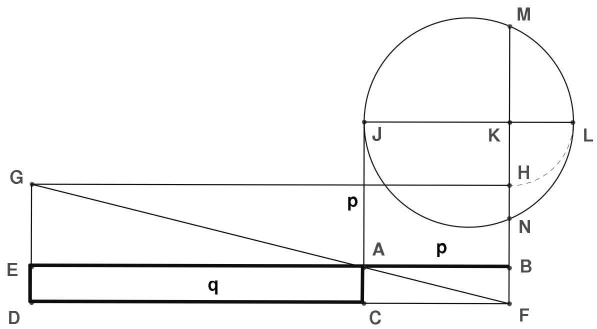


FIGURE 2.7 – *Le second degré chez Euclide (application elliptique)*

Pour construire cette figure, on se donne d'abord un carré $ABKJ$ de côté p et un rectangle $ACDE$ d'aire q avec EAB alignés. Ensuite on détermine successivement les points F, G, H en respectant les parallélismes et les alignements en évidence, puis L tel que $KH = KL$, le cercle de diamètre JL et enfin M et N sur ce cercle et la droite FBH.

La lecture de la figure est facile ; on reconnaît évidemment le rectangle $GHFD$ de l'équation du premier degré, qui conduit à l'égalité $BH = \frac{q}{p}$, et le cercle de diamètre JL, qui permet la construction des longueurs $KM = KN = \sqrt{KJ \cdot KL} = \sqrt{p \cdot KH}$ à cause de l'arc de cercle de centre K. Puisque $ABKJ$ est un carré de côté p, on a $KH = KB - BH = p - \frac{q}{p}$, ce qui donne finalement $KM = KN = \sqrt{p^2 - q}$, puis

$$BN = BK - KN = p - \sqrt{p^2 - q}, \qquad BM = BK + KM = p + \sqrt{p^2 - q}$$

c'est-à-dire les deux racines de l'équation ambiguë $x^2 + q = 2px$.

Une condition nécessaire et suffisante de leur existence est que $p^2 - q$ soit positif. Sur la figure, cela se retrouve en notant que la construction n'est possible que si, et seulement si, la droite GH coupe bien le côté BK du carré $ABKJ$ entre B et K, c'est-à-dire la condition annoncée.

La figure finale de cette partie n'est pas davantage extraite d'Euclide. Elle donne une variante possible de la construction ci-dessus, cette fois-ci appliquée à la fois aux deux équations $x^2 \pm 2px = q$; la racine de l'équation positive est naturellement la longueur de BM, alors que celle de BN est la racine de l'équation négative de mêmes paramètres p et q.

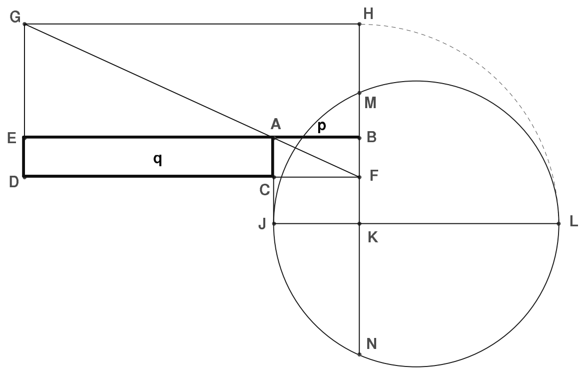


FIGURE 2.8 – *Le second degré chez Euclide (application hyperbolique)*

En fait cette construction donne même davantage : en effet, les deux racines de l'équation positive $x^2 + 2px = q$ sont BM et $-BN$, alors que celles de l'équation négative $x^2 = 2px + q$ sont BN et $-BM$. Même s'il restait très méfiant devant les racines négatives d'une équations - qu'il appelle *fausses* (*La Géométrie*, p. 372 des *Essais*, AT VI p. 445) -, Descartes a très probablement été tenté de faire de telles remarques.

Diophante d'Alexandrie

L'importance de Diophante en algèbre et théorie des nombres ne saurait être surestimée, ne serait-ce qu'à cause des commentaires de Fermat. Sans donner de théorie générale, se limitant à des cas particuliers, il montre qu'il connaissait naturellement les techniques de réduction à des racines carrées des équations du second degré. Il les appliquait d'ailleurs également à des inéquations, comme $x^2 + 60 > 22x$ ou $2x^2 > 6x + 18$: voir la traduction de Ver Eecke, p. 231 (V 30), et surtout p. 178 (IV 39).

Ce dernier trinôme $2x^2-6x-18$ ne possède pas de racines rationnelles car 45 n'est pas un carré parfait ; toutefois l'auteur s'intéresse à trouver des rationnels satisfaisant à l'inéquation (négative) $2x^2 > 6x + 18$. Au départ, il fait comme s'il voulait résoudre l'équation, et nous donne à ce propos un précieux témoignage de la technique grecque de l'époque. Rappelons qu'*arithme* est alors synonyme d'inconnue et que, de même, *quantité* signifie ici coefficient

`Lorsque l'on résout une telle équation, nous multiplions la moitié de la quantité d'arithme [`*i.e.*`6/2] par elle-même, ce qui donne 9, et nous multiplions 2, la quantité des carrés d'arithme, par 18 <`*quantité des*`> unités. Ajoutons à 9, ce qui donne 45 [`$= 2{\cdot}18+9$`] dont la racine est à ajouter à la moitié de la quantité d'arithme...`

Pour l'équation générale $ax^2 = bx+c$, cela signifie : calculer $\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}^2$, ac, $ac+\frac{b}{2}^2$ et enfin $\sqrt{ac+\frac{b}{2}^2}+\frac{b}{2}\cdot$ Pour retrouver l'algorithme moderne, il faut juste ajouter la division par a (lacune comblée par Paul Tannery dans son édition).

Aucune justification n'est donnée, dans les *Arithmétiques*, de cette technique, évidemment bien connue depuis des siècles.

La géométrie ne semble jouer ici aucun rôle dans ses calculs, portant exclusivement sur des nombres. Par suite nous passerons rapidement sur Diophante, indiquant simplement qu'il traite d'au moins trois équations positives, de cinq équations et deux inéquations négatives. Il prend soin par exemple de mettre côte à côte $84x^2 + 7x = 7$ (*sic*) et $84x^2 = 7x + 7$ (VI 6 et 7, pp. 242 et 244), de racines respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, ce qui montre qu'il connaissait bien ce que nous appelons aujourd'hui les racines négatives des équations non ambiguës ; il recommencera d'ailleurs aussitôt (VI 8 et 9, pp. 246 et 247) avec $630x^2 + 73x = 6$ et $630x^2 = 73x + 6$, de racines respectives $\frac{1}{18}$ et $\frac{6}{35}\cdot$

Naturellement, il s'occupe également de quatre inéquations ambiguës et, surtout, de l'équation ambiguë $x^2+4 = 4x$, déjà signalée, qui possède une *racine double* ($x = 2$). Ce dernier point est très important, car il montre que les

Grecs connaissaient ce concept dont Descartes fera un très grand usage, mais sans paraître y insister dans son Traité, affectant de n'en parler qu'en passant, évoquant le fait qu'une droite peut ne pas couper ni *toucher* un cercle donné (*La Géométrie*, p. 303 des *Essais*, AT VI p. 376), puis en parlant plus clairement de racines *entièrement égales* (*id.* p. 347 des *Essais*, AT VI p. 418). Cela dit, si la notion de racine multiple n'a pas été totalement étrangère aux Grecs, il ne semble pas qu'elle ait alors fait l'objet d'une étude systématique.

Al-Khwârismi

Dans son *Kitab al-jabr* il traite de certaines équations du second degré telles que $x^2 + 10x = 39$ ($x = 3$) et $x^2 + 10x = 56$ ($x = 4$), $x^2 + 21 = 10x$ ($x = 3$, ainsi que $x = 7$) et $x^2 = 3x + 4$ ($x = 4$), couvrant ici par quelques exemples les trois formes classiques. Il donne, comme Euclide bien avant lui, des preuves géométriques justifiant les réductions à des extractions de racines carrées grâce à des figures élémentaires supposant le problème résolu. Certes il ne le fait que sur des cas particuliers, mais c'est une attitude alors très fréquente, qui perdurera, pour certaines démonstrations lourdes, jusqu'au début du vingtième siècle.

La figure ci-dessous, avec le choix de x comme longueur commune aux quatre rectangles, justifie l'identité remarquable $(x+p)^2 = p^2 + 2px + x^2$ comme on le voit en calculant de deux façons différentes l'aire du carré extérieur. Cela montre que l'égalité $x^2 + 2px = q$ équivaut à $(x+p)^2 = q + x^2$, ce qui donne $x = \sqrt{p^2+q} - p$ et règle le cas des équations positives. De la même manière, le choix de $x - p$ (implicitement supposé positif) comme longueur des rectangles conduit à

$$x^2 = p^2 + (x-p)^2 + 2p\,(x-p) = (x-p)^2 + 2px - p^2.$$

Cela montre que l'égalité $x^2 = 2px + q$ équivaut à $(x-p)^2 = q + p^2$, ce qui donne $x = p + \sqrt{p^2+q}$ et règle le cas des équations négatives.

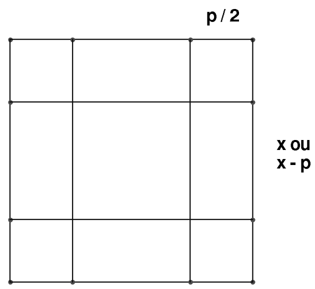


FIGURE 2.9 – *Le second degré chez Al-Khwârismi (1)*

Les équations ambiguës posent un problème plus délicat. Cette fois-ci, toujours en calculant de deux façons différentes l'aire de l'équerre hexagonale de la figure ci-dessous où $y = p - x$ est supposé positif, on obtient l'identité remarquable

$$x^2 + xy + p^2 = 2px + y^2 + xy$$

c'est-à-dire $x^2 + p^2 = 2px + y^2$. Cela montre que l'égalité $x^2 + q = 2px$ équivaut à $p^2 = q + y^2 = q + (p - x)^2$, ce qui donne $x = p - \sqrt{p^2 - q}$ grâce à la convention faite sur le signe de $p - x$, et règle le cas de la plus petite racine des équations ambiguës lorsque $p^2 - q$ est positif (ce qui est imposé par la figure même puisque le petit carré de côté y est inclus dans le grand carré de côté p).

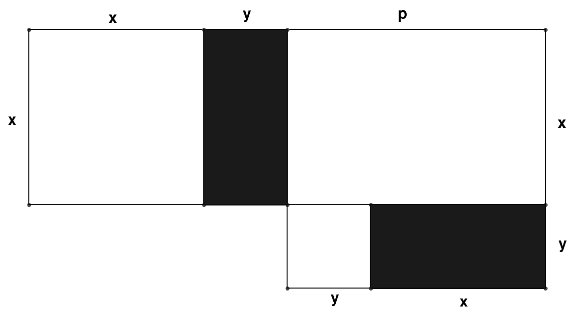


FIGURE 2.10 – *Le second degré chez Al-Khwârismi (2)*

Enfin la dernière figure de ce paragraphe est presque la même que la précédente, aux notations près (échange de p et de x) : elle appartient donc aussi au traité d'Al Khwârizmi, et aurait pu lui servir à déterminer la plus grande racine des équations ambiguës. Il suffit en effet de poser ici $x = p + z$ pour trouver, toujours de la même façon,

$$p^2 + pz + x^2 = 2px + z^2 + pz$$

c'est-à-dire $p^2 + x^2 = 2px + z^2$ et enfin la condition nécessaire et suffisante $p^2 = q + z^2 = q + (x - p)^2$, qui donne $x = p + \sqrt{p^2 + q}$.

Pour déterminer effectivement les valeurs de toute ces racines, l'auteur avait alors le choix entre : travailler exclusivement sur des nombres, comme Diophante, ou donner des constructions géométriques à partir du cercle comme Euclide l'avait expliqué.

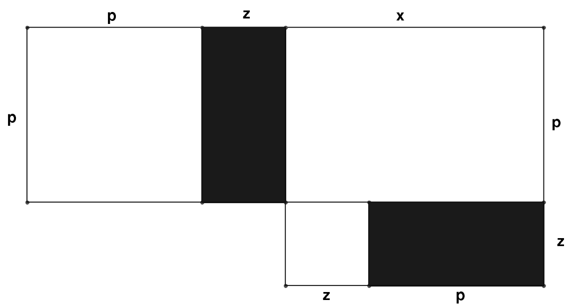


FIGURE 2.11 – *Le second degré chez Al-Khwârismi (3)*

Les Italiens du seizième siècle

Le rôle des Del Ferro, Cardan et autres Tartaglia dans la résolution des équations du troisième puis du quatrième degré est très connu ; nous n'en parlerons pas, sauf pour indiquer qu'au milieu du seizième siècle on savait transformer une équation de façon à annuler un coefficient (faisant passer par exemple de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ à $z^3 + pz + q = 0$), et donner explicitement les racines par des formules telles que

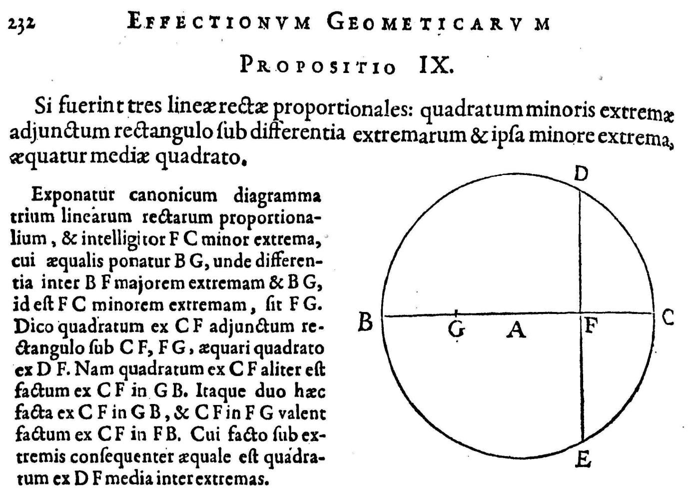
$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Ces formules étranges frapperont tous les mathématiciens, y compris Descartes qui les exhibera dans sa *Géométrie* (p. 398 des *Essais* pour $z^3 + pz = q$, AT VI p. 472).

Indiquons simplement que cet énorme succès invitait évidemment de manière pressante à résoudre de même les équations du cinquième degré et même au delà. Cela devint donc le problème crucial des mathématiques : le régler donnerait certainement la gloire. Toutefois, les innombrables échecs rencontrés dans cette voie finirent par faire naître un doute ; il en résultera par exemple qu'un Descartes, conforme à son tempérament de trancheur de nœud gordien, cherchera une direction entièrement nouvelle, qui lui permettra même d'atteindre le sixième degré, bien entendu en employant d'autres armes que la superposition de radicaux.

Viète

Le grand précurseur de Descartes a longuement travaillé le champ de la résolution des équations algébriques (notamment du troisième degré). Nous ne le citons ici que pour une construction géométrique originale des racines des équations du second degré grâce à un outil unique, que l'on pourrait appeler le *cercle universel* de Viète (Proposition IX et suivante de l'*Effectionum Geometricam Canonica Recensia*, 1593, Witmer p. 375, Peyroux p. 339) [18].


232 EFFECTIONVM GEOMETICARVM

PROPOSITIO IX.

Si fuerint tres lineæ rectæ proportionales: quadratum minoris extremæ adjunctum rectangulo ſub differentia extremarum & ipſa minore extrema, æquatur mediæ quadrato.

Exponatur canonicum diagramma trium linearum rectarum proportionalium, & intelligitor F C minor extrema, cui æqualis ponatur B G, unde differentia inter B F majorem extremam & B G, id eſt F C minorem extremam, ſit F G. Dico quadratum ex C F adjunctum rectangulo ſub C F, F G, æquari quadrato ex D F. Nam quadratum ex C F aliter eſt factum ex C F in G B. Itaque duo hæc facta ex C F in G B, & C F in F G valent factum ex C F in F B. Cui facto ſub extremis conſequenter æquale eſt quadratum ex D F media inter extremas.

FIGURE 2.12 – *Le texte de Viète édité par Schooten en 1646*

18. *Étant donnés trois segments en proportion, le carré de l'extrême le plus petit, augmenté du produit de la différence des extrêmes par ce plus petit, est le carré du moyen* : autrement dit, si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \geqslant 1$, alors $CF^2 + CF \cdot FG = c^2 + (a-c)\,c = b^2 = DF^2$.

Les formes explicites des racines sont connues depuis au moins vingt siècles, mais il les justifie par des égalités telles que $(u \mp v)^2 \pm 4uv = (u \pm v)^2$ (voir le second livre de ses *Zetetiques* : Witmer p. 102, Peyroux p. 92, qui date de 1591 ou 1593, ou son *De Aequationem Recognitione* de 1615 : Witmer p. 161, Peyroux p. 147).

François Viète étudie notamment le triplet d'équations $x^2 + 144 = 26x$ (ambiguë de racines $x = 8$ et $x = 18$), $x^2 + 10x = 144$ (positive de racine $x = 8$) et $x^2 = 10x + 144$ (négative de racine $x = 18$).

Les trois figures ci-dessous parlent pratiquement d'elles-mêmes. La première permet de résoudre les équations ambiguës $x^2 + q = 2px$; si le rayon du demi-cercle est égal à p et s'il est coupé par une droite à distance $FD = \sqrt{q}$ (ce nombre est supposé par exemple avoir été construit par la technique euclidienne). Le théorème de Pythagore donne aussitôt que les deux racines $x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$ ne sont autres que les longueurs des segments FB et FC, déterminés sur le diamètre par le pied F de l'angle droit.

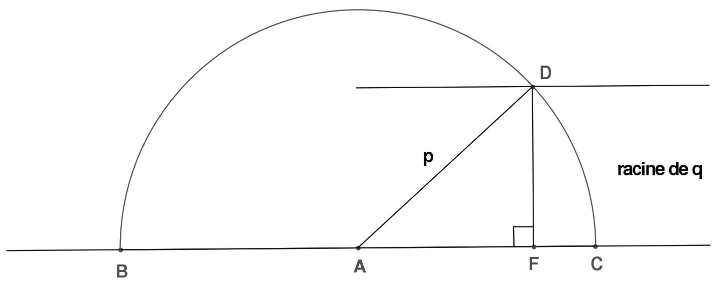


FIGURE 2.13 – *Le second degré chez Viète (1)*

La suivante sert à la fois aux équations positives et négatives. Si la droite sécante est la même, le rayon $\sqrt{p^2 + q}$ est obtenu en plaçant le pied F de l'angle droit à la distance p du centre, ce qui détermine le cercle. Ici encore F sépare le diamètre en deux segments, dont le plus grand FB mesure la racine de l'équation négative $x^2 = 2px + q$, et le plus petit FC celle de l'équation positive $x^2 + 2px = q$, à savoir respectivement $x = p + \sqrt{p^2 + q}$ et $x = \sqrt{p^2 + q} - p$.

Cette figure a peut-être été inspirée à Viète par la construction classique euclidienne d'une racine carrée. En effet, le théorème de Pythagore et l'égalité $FD^2 = FC \cdot FB$ impliquent

$$CF^2 + FG \cdot CF = DF^2, \qquad BF^2 = FG \cdot BF + DF^2$$

c'est-à-dire exactement une équation positive et une équation négative (pour obtenir une équation ambiguë, il suffit de remplacer $FD^2 = FC \cdot FB$ par $CD^2 = CF \cdot CB$, autre propriété très connue du triangle rectangle CDB, ce qui conduit à $FC^2 + DF^2 = BC \cdot FC$).

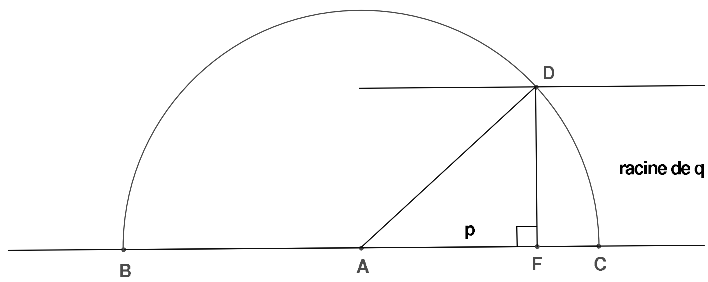


FIGURE 2.14 – *Le second degré chez Viète (2)*

Enfin la dernière de nos trois figures nous introduit à la technique cartésienne de résolution générale, et ce n'est sans doute pas un hasard. Elle n'est pas explicitée par Viète, mais résulte pratiquement de la première des deux figures autres, après une rotation d'angle droit : les racines de $x^2 + q = 2px$ sont respectivement $FC = HD$ et $FB = CG = HE$. Nous la retrouverons telle quelle[19] dans *La Géométrie* (p. 303 des *Essais*, AT VI p. 376).

Il suffit de se reporter aux pages précédentes pour constater que Viète est ici très en avance, du point de vue de la clarté, de la simplicité et de la concision, sur ses prédécesseurs. Nous allons voir cependant que Descartes le battra sur ce point, sans lui rendre hommage bien qu'il soit clair qu'il a pu voir son travail sur notre sujet.

19. Sans aucun doute, cette rotation est un subterfuge de Descartes pour cacher l'endroit d'où il a tiré son inspiration.

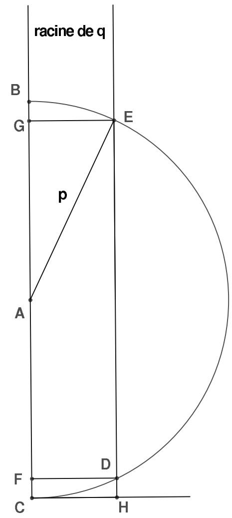


FIGURE 2.15 – *Le second degré chez Viète (3)*

Enfin Descartes vint

Au début du dix-septième siècle, les choses étaient suffisamment mûres pour qu'un homme de génie puisse transformer de façon radicale notre sujet, mais non l'assécher : il faudra pour cela encore deux siècles.

Pourquoi les équations algébriques chez Descartes ?

Comme il a déjà été signalé, après les succès italiens - que Descartes ne connaîtra que relativement assez tard - il restait en mathématiques un défi majeur : résoudre les équations de degré strictement supérieur au quatrième. On peut parfaitement avancer que ce problème a longtemps hanté Descartes, persuadé que s'il parvenait à le régler (et donc à clore l'histoire des mathématiques), la gloire qu'il en tirerait lui permettrait d'être écouté dans son projet de science universelle.

Les cahiers de brouillons de Descartes (ici les *Cogitationes privatæ*, AT X p. 234) nous montrent, par exemple à propos de l'équation $x^3 = 7x + 14$, qu'il était déjà intéressé, très jeune, par le sujet. On trouvera d'ailleurs en plusieurs endroits (dont *La Géométrie*, p. 318 des *Essais*, AT VI p. 391) l'image d'un compas qu'il avait mis au point pour résoudre certaines équations du second degré, avec au départ l'espoir de pouvoir les traiter toutes.

Descartes parviendra d'ailleurs à ramener toute équation du quatrième degré à une du troisième, ce que Ferrari avait déjà obtenu par une autre technique. Pour ce faire, il utilise avec brio la généralisation naturelle de la complétion d'un carré qui consiste, par une translation des racines, à faire disparaître le second coefficient du polynôme P (≪ *oster le second terme* ≫, *La Géométrie*, p. 376 puis 385 des *Essais*, AT VI p. 449 puis 457). C'est un succès assez mineur, mais qui prouve bien qu'il a poussé assez loin l'étendue de ses recherches, et ce peut-être même avant d'avoir lu l'*Ars Magna* de Cardan.

Nous verrons plus loin l'importance des connaissances qu'il a sorties de sa plume, de nombreuses pour la première fois, au sujet des racines des équations algébriques considérées de façon abstraite : la règle des signes, la diminution d'un degré d'une équation dont on connaît une racine a grâce à la division par $x - a$ *etc.*

Il n'y a donc aucun doute que notre thème n'a cessé d'être présent à son esprit pendant ses années de mathématicien, même s'il avait également en vue un tout autre problème : déterminer la forme optimale des verres de lunettes. Il sera d'ailleurs ébloui de découvrir que sa méthode lui permit de résoudre les deux à la fois (voir *La Géométrie*, p. 342 des *Essais*, AT VI p. 413 : ≪ *Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus utile, & le plus general, non seulement que je sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie* ≫).

Rappelons que son traité s'ouvre sur les résolutions des équations du premier et du second degré, et se termine sur celles des troisième, quatrième, cinquième et sixième degré. Pour ces dernières, qui méritent évidemment une étude très approfondie, il emploie une méthode révolutionnaire : ayant réussi à définir des courbes de degré quelconque (grâce à son invention des coordonnées) il cherche à ramener toute résolution d'équation algébrique à la détermination des abscisses des points d'intersection d'un cercle avec une courbe convenable. Jusqu'au degré quatre, il vérifie que c'est possible - n'étant là pas très loin de constructions de Viète -, et il y parvient, de manière tout à fait originale, pour le degré six (le degré cinq s'en déduisant très facilement). Son affirmation selon laquelle, à l'extrême fin de *La Géométrie*, il n'y a qu'à continuer dans cette voie pour atteindre n'importe quelle équation est, au sens strict, erronée. Mais il n'en reste pas moins qu'il a réalisé ici une percée aujourd'hui bien oubliée, par des voies entièrement nouvelles, mais qui a eu des conséquences inattendues et considérables qui l'auraient sans doute bien étonné tout en flattant naturellement son ego.

Ses constructions pour les premier et second degré ont été portées à un niveau de simplicité sans aucun doute insurpassable, complétant ainsi son cher Euclide (comme il avait tenté de le faire autrefois avec le court traité *De Solidorum Elementis*).

Dans les toutes premières pages de *La Géométrie* (pp. 298 à 303 des *Essais*, AT VI pp. 370 à 376), Descartes nous donne sa propre version de la résolution de l'équation du premier degré $ax = b$, en employant pour cela deux triangles homothétiques de côtés respectifs $BD = a$ et $BE = b$ pour le premier, et $BA = 1$ et $BC = x$ pour le second. Nous avons déjà souligné (page 45) que cette application du théorème de Thalès est évidemment la plus simple de toutes les constructions possibles, mais qu'elle supposait un saut conceptuel essentiel, celui de pouvoir *fixer une unité en choisissant pour telle un segment arbitraire*[20].

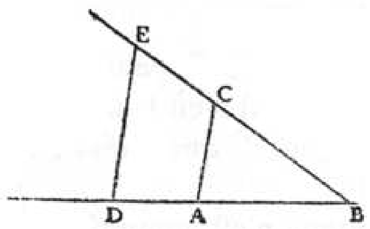


FIGURE 2.16 – *Le premier degré chez Descartes*

La géométrie et les équations du second degré

Après avoir recopié la détermination des racines carrées d'Euclide (voir la quatrième figure de ce chapitre), il donne - toujours sans démonstrations - une très nouvelle méthode de résolution des équations du second degré.

20. Lire notamment la Règle XIV, p. 70 dans la traduction de Jean-Luc Marion.

La figure ci-dessous donne à la fois la racine positive $AB = \sqrt{p^2+q} - p$ de l'équation positive $x^2 + 2px = q$ et la racine positive $AC = p + \sqrt{p^2+q}$ de l'équation négative $x^2 = 2px + q$ puisque le théorème de Pythagore montre que A est situé à la distance $\sqrt{p^2+q}$ du centre du cercle

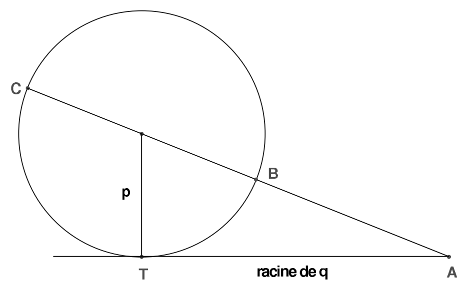


FIGURE 2.17 – *Le second degré chez Descartes (1)*

Sa résolution des équations ambiguës est nettement moins originale, car elle reprend (involontairement ?) la construction de Viète. Sur la figure ci-dessous, on lit en effet les longueurs des deux racines $DE = p - \sqrt{p^2-q}$ et $DF = p + \sqrt{p^2-q}$ de l'équation ambiguë $x^2 + q = 2px$). La preuve repose sur une simple application du théorème de Pythagore (projeter orthogonalement le centre sur la droite DEF)

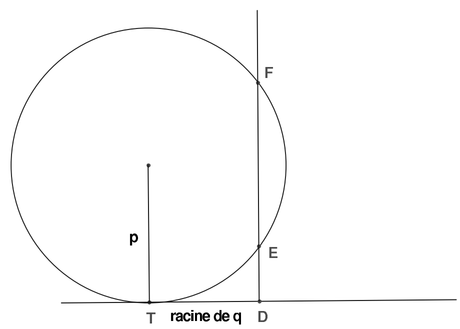


FIGURE 2.18 – *Le second degré chez Descartes (2)*

En fait, Descartes n'a pas écrit (pas vu ?) que son outil précédent (diamètre et tangente à un cercle) pouvait justement être aussi universel que le cercle de

Viète. Il est plus que probable que son silence, s'il est volontaire, est justifié par son refus de reconnaître toute influence autre qu'antique.

La figure ci-dessous donne en effet, toujours par simple application du théorème de Pythagore, que les longueurs AB et AC sont les racines de l'équation ambiguë $x^2 + q = 2px$ (ici, p n'est plus le rayon du cercle, mais la distance séparant le centre du point A d'où l'on mène la tangente AT)

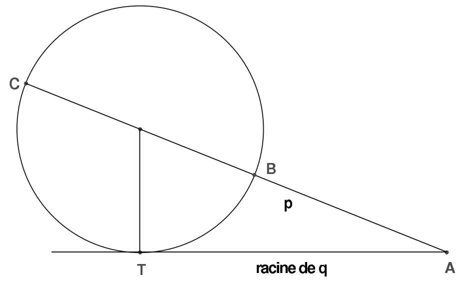


FIGURE 2.19 – *Le second degré chez Descartes (1 bis)*

Descartes connaissait l'existence et la valeur des racines complexes des équations ambiguës dans le cas $p^2 < q$. Il n'aurait aucun mal à construire une figure assez analogue aux précédentes sur laquelle lire la partie réelle commune $TO = p$ et la valeur absolue $TA = \sqrt{q - p^2}$ des parties imaginaires de ces racines

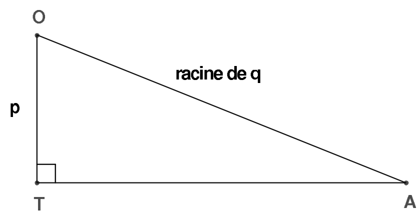


FIGURE 2.20 – *Comment exhiber « à la Descartes » des racines imaginaires*

Sur ces constructions, Descartes a émis une évaluation manquant plutôt d'humilité (*La Géométrie*, p. 304 des *Essais*, AT VI p. 376), dont nous laissons le soin au lecteur de décider s'il a eu raison, ou tort, de se placer si haut

Au reste, ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens, & i'ay seulement voulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de *faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geométrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.*

Ce que le mathématicien philosophe Pierre Boutroux confirmera, pour l'essentiel, en écrivant en 1920 [21] « *La méthode de Descartes répondit bien aux espérances de son auteur et que très vite elle accrut son rendement dans des proportions absolument inconnues auparavant. Une ère nouvelle s'ouvre alors en mathématiques, que M. Zeuthen compare fort justement à l'ère de la grande industrie dans le monde moderne* ».

Rabattons toutefois un peu de la superbe de Descartes : il avait aussi, par exemple, les moyens de mettre au point, par des dichotomies ou des approximations affines (fausse position) des techniques donnant des décimales d'une racine (le concept de décimale est par exemple déjà présent chez Stevin). Il n'en fera naturellement rien. Pas davantage qu'il ne deviendra le Galois de son siècle.

Cela dit, même en se restreignant à de si bas degrés, on voit que Descartes prend grand soin à développer, à côté du calcul algébrique *littéral* tel qu'il est encore enseigné dans nos écoles, un autre calcul, à base d'opérations géométriques, donc en quelque sorte *mécanique* [22]. Nous y reviendrons page 137 dans le cadre d'une (trop brève) comparaison d'avec Fermat [23].

---

21. *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'Antiquité et dans les Temps Modernes*, page 110.

22. Très différent de la machine de Pascal et de nos moyens informatiques d'aujourd'hui, mais analogue dans l'esprit : par exemple, connaissant deux nombres a et b (ici deux longueurs de segments donnés) construire effectivement un segment de longueur $a + b$, en recourant à un parallélogramme ou à une autre manipulation géométrique équivalente.

23. Notons simplement ici, à propos de ces deux grands créateurs, que Léon Brunschvicg écrira finement en 1912 dans *Les étapes de la philosophie mathématique*, p. 101, que « La Géométrie *est l'œuvre d'un* méthodique, *qui procède d'une conception de la science et lègue à ses successeurs une notion générale de la vérité scientifique. L'*Isagoge, *par contre, est l'œuvre d'un technicien* [Fermat], *qui est en même temps un érudit, qui reprend et qui approfondit les procédés pratiqués avant lui pour les porter à leur plus haut point d'élégance et de simplicité.* ».

Chapitre 3

Pappus et coordonnées

Ouvrons le *Discours de la Méthode*.

« *Ces longues chaisnes de raisons toutes simples & faciles, dont les Geomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles demonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer, que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon, & que pourvû seulement qu'on s'abstienne d'en reçevoir aucune pour vraye qui ne le soit, & qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les deduire les unes des autres*[1]*, il n'y en peut avoir de si esloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ny de si cachées qu'on ne découvre. Et je ne fus pas beaucoup en peine de chercher par lesquelles il estait besoin de commencer : car je sçavais dejà que c'estait par les plus simples & les plus aysées à connaistre ; & considerant qu'entre tous ceux qui ont cy devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls Mathematiciens qui ont pu trouver quelques demonstrations, c'est à dire quelques raisons certaines & evidentes, je ne doutais point que ce ne fust par les mesmes qu'ils ont examinées ; bienque je n'en esperasse aucune autre utilité, sinon qu'elles accoustumeraient mon esprit a se repaitre de veritez, & ne se contenter point de fausses raisons. Mais je n'eu pas dessein pour cela de tascher d'apprendre toutes ces sciences particulieres, qu'on nomme communement Mathematiques : & voyant qu'encore que leurs objets*

1. On retrouve ici la première et la troisième règle que Descartes vient d'exposer (pages 20 du *Discours* et 18 de AT VI) : *ne recevoir jamais aucune chose pour vraye, que je ne la connusse évidemment estre telle*, et *conduire par ordre mes pensées, en commenceant par les objets les plus simples et les plus aysez a connaistre.*

soient differens, elles ne laissent pas de s'accorder toutes, en ce qu'elles n'y considerent autre chose que les divers rappors ou proportions qui s'y trouvent, je pensay qu'il valait mieux que j'examinasse seulement ces proportions en general, & sans les supposer que dans les sujets qui serviraient a m'en rendre la connaissance plus aysée ; mesme aussi sans les y astreindre aucunement, affin de les pouvoir d'autant mieux appliquer aprés a tous les autres ausquels elles conviendraient. Puis ayant pris garde que pour les connaistre, j'aurais quelquefois besoin de les considerer chascune en particulier ; & quelquefois seulement de les retenir, ou de les comprendre plusieurs ensemble : je pensay que pour les considerer mieux en particulier, je les devais supposer en des ***lignes****, à cause que je ne trouvais rien de plus simple, ny que je pûsse plus distinctement représenter à mon imagination et à mes sens ; mais que pour les retenir, ou les comprendre plusieurs ensemble, il fallait que je les expliquasse par quelques* ***chiffres*** *les plus courts qu'il serait possible. Et que par ce moyen j'emprunterais tout le meilleur de l'Analyse Geométrique et de l'Algebre, & corrigerais tous les defaus de l'une par l'autre* » [2].

Ce texte est évidemment capital : il montre d'abord quels sont les liens de sa méthode avec la *mathesis universalis* des *Regulæ* [3]. Ce n'est évidemment pas la *mathématique* elle-même, mais une compilation ordonnée et logique de *toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes*, et en particulier de toutes les sciences. Pour bâtir cette somme, il faut de multiples techniques : elles doivent toutes être inspirées de celles que les mathématiciens utilisent dans leur propre discipline, car ce sont les seuls qui ont, jusqu'à présent, su démontrer et mettre en ordre les objets de leur domaine. La *méthode* consiste alors à bâtir, pour chaque secteur de la Connaissance, un ensemble de règles aussi proches que possible de l'esprit des démonstrations des géomètres. D'une certaine façon, on peut d'ailleurs dire aujourd'hui que le projet cartésien est, d'une manière optimiste, en bonne voie de réalisation, l'esprit de rigueur apparenté à la mathématique déductive ayant largement pénétré les autres disciplines, au moins scientifiques [4].

2. Pages 20-2 du *Discours* et 19-20 de AT VI, juste après l'énonciation des quatre célèbres préceptes. Les termes en gras sont de notre fait.

3. Voir la Règle IV à la page 378 de AT X : « *generalem quamdam esse debere scientiam, quæ id omne explicet, quod circa ordinem et mensuram nulli speciali materiæ addictam quæri potest* [...] *Mathesim universalem nominari* », soit « *une certaine science générale, qui explique tout ce, qu'on peut chercher touchant l'ordre et la mesure qui n'est liée à aucune matière particulière* » (trad. Marion, p. 15).

4. Et même quelques-unes touchant davantage aux études sur l'homme : par exemple,

Ayant placé ainsi la mathématique en position de phare, Descartes se devait de les mettre au plus haut niveau compatible avec cet honneur. Nous sommes maintenant dans la seconde partie du texte : comment achever algèbre et géométrie en les rendant les plus dignes possibles de leur fonction de modèle.

Il indique ici, en des termes assez obscurs, il faut bien l'avouer, le but de *La Géométrie*. Nous avons mis en évidence deux mots : *lignes* et *chiffres* qui paraissent évoquer l'essentiel de sa démarche.

a) Le mot *lignes* signifie ce que nous appelons aujourd'hui des longueurs de segments. Ce sont des concepts symboliques, plus simples à visualiser, et surtout plus généraux que ceux du mot *nombres*, notamment parce que l'on peut évoquer grâce à des lignes tous les rapports de grandeurs concevables, au lieu que certains, incommensurables (irrationnels), ne peuvent pas facilement s'exprimer par des nombres [5].

   Descartes dit ici que connaître une figure géométrique peut se ramener à connaître toutes les lignes qui la composent, et ainsi maîtriser tous les problèmes de courbes telles que des Coniques ou autres plus générales.

   Il est difficile ici de ne pas penser à son invention des coordonnées [6], qui consistent simplement à choisir deux de ces lignes parmi d'autres, qui pourront être calculées par rapport à elles. Mais le texte n'en dit rien : il semble possible de tirer de cet oubli (sûrement volontaire) l'impression que pour lui l'essentiel de l'application de sa méthode aux mathématiques réside bien davantage dans l'idée de soumettre la figure géométrique à la connaissance de toutes les longueurs de segments qui s'y rattachent qu'à l'outil particulier qui consiste à en privilégier deux quasiment prises au hasard. **L'usage systématique des coordonnées n'est pas la méthode restreinte aux mathématiques** : c'est tout au plus une technique particulière dans le domaine de la géométrie, puissante mais qui n'a pas à occuper la première place dans sa construction d'une nouvelle science.

---

l'historien moderne étudie les documents du passé avec un souci de rigueur que n'auraient pas renié Euclide et Descartes.

5. Que l'on pense au scandale de $\sqrt{2}$, constructible en un tour de main, mais dont la place au sein des nombres fut longue à être parfaitement admise.

6. Essentiellement rectilignes, mais qui peuvent aussi prendre d'autres formes, comme les bipolaires (voir page 105).

Nous verrons dans la suite de ce travail que cette découverte fut capitale pour lui permettre, au moins à l'aune de ses espoirs trop gourmands, de résoudre définitivement le dernier problème majeur des mathématiques connu à son époque : **la résolution des équations algébriques**. Ce sera de cela qu'il sera très fier, et de sa résolution des Problèmes de Pappus, mais non du bond en avant conceptuel que représentait ses couples (x, y).

b) Le mot *chiffres* est tout aussi important. Nous pensons naturellement à la révolution cartésienne de l'algèbre due à son introduction des notations qui sont aujourd'hui les nôtres, comme ax^n. C'est délibérément que nous avons choisi de ne pas traiter ici comme il le devrait de cet aspect essentiel de sa postérité : c'est que les travaux récents de Michel Serfati (voir la bibliographie) ont apporté suffisamment de lumière sur la question pour qu'il soit inutile d'essayer de les démarquer.

Nous voici maintenant prévenus et armés pour aborder, dans ce chapitre, une étude de sa conception des coordonnées. Mais il nous faut d'abord rappeler ce qu'était alors le *Problème de Pappus*, ou plus exactement les deux Problèmes de Pappus, qui sont indissolublement liés aux motivations de sa découverte.

Le Problème de Pappus jusqu'à Descartes

Citons dès le départ, sur le Problème de Pappus, l'article fondamental de Sébastien Marrone, *Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637-1649* figure in *DesCartes et DesLettres. « Epistolari » e filosofia in Descartes e nei cartesiani*, 2008, pages 62-91, ainsi que sa thèse du 19 septembre 2007 *La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne : 1637-1661*, en cours de publication.

Précédemment, Henk Bos avait publié plusieurs articles profonds sur ce sujet (et plus généralement sur *La Géométrie*), que nous serons naturellement conduits à citer en plusieurs occasions.

Ce problème est longuement introduit par Descartes au Livre Premier, pages 304-6 des *Essais*, 377-9 de AT VI sous sa forme latine [7], puis repris en

7. Il semble que Descartes n'était pas aussi à l'aise avec le grec.

français[8] respectivement pages 306-7 et 379-80. Nous avons placé en Annexe I (page 143) notre propre traduction proche du texte de Commandin[9].

Une interprétation en termes d'aujourd'hui

Un certain nombre de lignes[10] D_i étant données, non nécessairement deux à deux distinctes, les Anciens s'intéressaient aux longueurs des segments issus d'un point variable C faisant avec les D_i des angles donnés et d'extrémités situées sur elles[11]. Dans notre langage, cela signifie que l'on s'intéresse à des segments CM_i avec $M_i \in D_i$ tels que l'angle des droites CM_i et D_i ait une mesure connue φ_i : M_i résulte donc d'une *projection oblique* de C sur D_i, dite *effectuée sous l'angle* φ_i. Si l'on note d_i la distance euclidienne de C à D_i, on dispose de l'égalité $CM_i = \dfrac{d_i}{\sin \varphi_i} \cdot$ En d'autres termes, assimiler CM_i et d_i est admissible à un coefficient multiplicatif donné près.

• Si n est un entier strictement positif, le Problème de Pappus à $2n$ lignes s'exprime comme suit : que peut-on dire de l'ensemble des points C vérifiant une égalité de la forme

$$CM_1 \cdot CM_2 \cdot CM_3 \cdots CM_n = \lambda \cdot CM_{n+1} \cdot CM_{n+2} \cdot CM_{n+3} \cdots CM_{2n}$$

où λ est une constante donnée, soit encore

$$d_1 d_2 d_3 \dots d_n = \mu \cdot d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} \dots d_{2n}$$

où μ est une autre constante, supposée connue comme λ ?

Nous allons encore exhiber une autre forme, plus commode, de cette question. Si $\Delta_i(x,y) = a_i x + b_i y + c_i = 0$ est une équation de D_i dans un repère cartésien non nécessairement orthonormé, on a $|\Delta_i(x,y)| = d_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$, et le Problème à $2n$ lignes s'écrit aussi

$$|\Delta_1(x,y)| \cdot |\Delta_2(x,y)| \cdots |\Delta_n(x,y)| = k \cdot |\Delta_{n+1}(x,y)| \cdot |\Delta_{n+2}(x,y)| \cdots |\Delta_{2n}(x,y)|$$

8. L'on doit parler ici d'une transposition, relativement fidèle, mais abrégée.

9. Les éditions de 1588, 1589 et 1602 sont identiques sur ce point. Voir aussi les propositions 53-57 du Livre III d'Apollonius, pp. 273-80 de la traduction Ver Eecke.

10. Cette fois-ci ligne reprend son sens habituel de droite.

11. On notera que le nombre positif CM_i est invariant si l'on change φ_i en son supplément $\pi - \varphi_i$, ou si l'on remplace C par son symétrique relatif à D_i.

où k est constant. Par exemple $|y+x|\,|y-x| = |x|\,|2p-x|$ est un Problème de Pappus à quatre lignes. Cette égalité équivaut aux suivantes : $y^2 = 2p\,x$, équation d'une Parabole, et $y^2 - 2x^2 + 2p\,x = 0$, équation d'une Hyperbole.

Les commentateurs modernes ont souvent l'habitude commode de simplifier $\Delta_i(x,y)$ en D_i, ce qui donne enfin la forme usuelle du Problème de Pappus à $2n$ lignes

$$D_1 D_2 D_3 \dots D_n = k \cdot D_{n+1} D_{n+2} D_{n+3} \dots D_{2n}$$

en admettant que k, jusqu'ici positif, puisse prendre en réalité les deux valeurs k et $-k$. C'est ce nous ferons ci-après.

• Pour n entier supérieur ou égal à 3, le Problème de Pappus à $2n-1$ lignes est très voisin du précédent. Avec les mêmes conventions, il s'écrit sous la forme [12]

$$D_1 D_2 D_3 \dots D_n = k \cdot D_{n+1} D_{n+2} D_{n+3} \dots D_{2n-1}.$$

• Par exception, le Problème de Pappus à trois lignes est le suivant

$$D_1 D_2 = k \cdot D_3^2.$$

C'est donc en fait un Problème à quatre lignes, puisque nous avons permis aux droites de ne pas être nécessairement deux à deux distinctes : mais la tradition est là. Dans notre texte, nous parlerons du Problème *spécial* à trois lignes s'il faut le distinguer du Problème *normal* à trois lignes défini par extension à $n = 2$ du problème à $2n-1$ lignes exprimé par

$$D_1 D_2 = k \cdot D_3.$$

Les deux Problèmes de Pappus

Par commodité, nous parlerons de manière plus précise de Problème I de Pappus ce que nous venons de définir, à savoir

Que peut-on dire des points C *définis par l'une des relations ci-dessus ?*

12. Pour respecter la règle alors importante d'homogénéité, il conviendrait de remplacer D_{2n} par une constante a, mais nous pouvons considérer qu'elle est en quelque sorte « absorbée » dans le coefficient k ci-dessous.

Nous verrons plus loin (page 111) que Descartes l'a vaincu par un *tour de force* dont la hardiesse surprend encore.

Le Problème de Pappus II est un cas particulier du précédent : il s'agit plus précisément *des cas de quatre et trois lignes (au sens spécial)*. D'après ce que nous savons, Apollonius aurait connu une preuve (de sa main ?) du fait que ces lignes sont des Coniques [13]. Descartes a retrouvé, non sans grande fierté, une démonstration de ce fait (voir page 237, dans un chapitre suivant). Il n'a pas parlé de la réciproque, qui est pourtant évidente ou presque.

Disons en effet dès maintenant comment construire une équation à la Pappus d'une Conique non décomposée. Choisissons-y cinq points (A, B, C, D, E) deux à deux distincts, et notons $D_1 = AB$, $D_2 = CD$, $D_3 = AC$ et $D_4 = BD$. Alors la courbe peut être définie par une équation $D_1 D_2 = k \cdot D_3 D_4$ où k est calculé [14] grâce au point E. Si maintenant deux points tels que A et B par exemple sont confondus, on remplacera la droite AB par la tangente en A.

Dans le cas de la Parabole $y^2 = 2p\,x$, on peut prendre $A = B = O$, C et D ayant $2p$ comme abscisse et $\pm 2p$ comme ordonnée, ce qui redonne le cas à quatre lignes déjà rencontré

$$x\,(x - 2p) = (x - y)\,(x + y).$$

L'équation *adjointe* $x\,(x - 2p) = -\,(x - y)\,(x + y)$ définit une autre Conique, à savoir l'Hyperbole d'équation $y^2 - 2x^2 + 2p\,x = 0$. Une étude plus complète d'équations pappiennes des Coniques peut être trouvée page 117.

Le problème de Pappus dans la *Correspondance*

Nous possédons au moins quatorze lettres de Descartes parlant du problème de Pappus, auxquelles nous renvoyons le lecteur. Six sont antérieures à la publication de *La Géométrie*, les autres sont, en général, des témoignages d'auto-satisfaction et des critiques, notamment contre Roberval

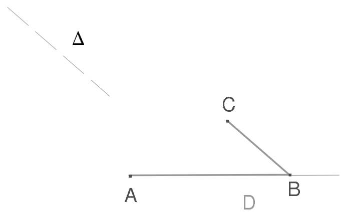
a) à Golius, janvier 1632, AT I p. 232 (il propose d'envoyer sa solution, ou de la dire, au professeur de Leyde qui lui a posé le problème) ;

13. Voir notamment ses propositions déjà citées III 53 et *sq.* et Heath en sa page cxxxviii.
14. Lorsque k varie, la Conique décrit un *faisceau linéaire* à points de base (A, B, C, D).

b) à Mersenne, 5 avril 1632, AT I p. 244 (il avoue que la résolution de la question lui a pris cinq à six semaines) ;
c) à Mersenne, 3 mai 1632, AT I p. 245 (« je pense l'avoir résolu ») ;
d) à Mersenne, juin 1632, AT I p. 256 (il dit que Golius a d'abord posé le problème à Mydorge en 1630) ;
e) à Stampioen, fin 1633, AT I p. 278 (il dit que Golius lui a posé le problème en 1631) ;
f) à Mersenne, mai 1634, AT I p. 288 (idem).
g) à Mersenne, fin décembre 1637, AT I p. 478 ;
h) à Mersenne, 18 ? janvier 1638, AT I p. 491 ;
i) à Mersenne, 31 mars 1638, AT II p. 83-4 ;
j) à Mersenne, 9 février 1639, AT II pp. 495, 502 ;
k) à De Beaune, 20 février 1639, AT II pp. 510-1 (très importante) ;
l) à Mersenne, 2 mars 1646, AT IV p. 363 ;
m) à Mersenne, 12 octobre 1646, AT IV p. 526 ;
n) à Mersenne, 4 avril 1648, AT V p. 142.

La découverte des coordonnées cartésiennes

Voici la découverte majeure de Descartes : le point C a pour coordonnées $x = AB$ et $y = BC$ dans un repère où A est l'origine, AB l'axe des abscisses et Δ la direction de l'axe des ordonnées (non nécessairement dessiné)



Que le ſegment de la ligne A B, qui eſt entre les poins A & B, ſoit nommé *x*. & que B C ſoit nommé *y*.

FIGURE 3.1 – *L'introduction des coordonnées cartésiennes*

Il n'en a pas vu toute l'importance, puisqu'il ouvre ainsi brutalement son exposé : « **il m'ennuie desia d'en tant escrire**[15] » (voir notre page 106) !

Les premiers calculs sur la ligne à quatre droites

Descartes utilise d'abord son invention pour résoudre le Problème de Pappus, en partant du cas particulier d'une ligne à quatre droites.

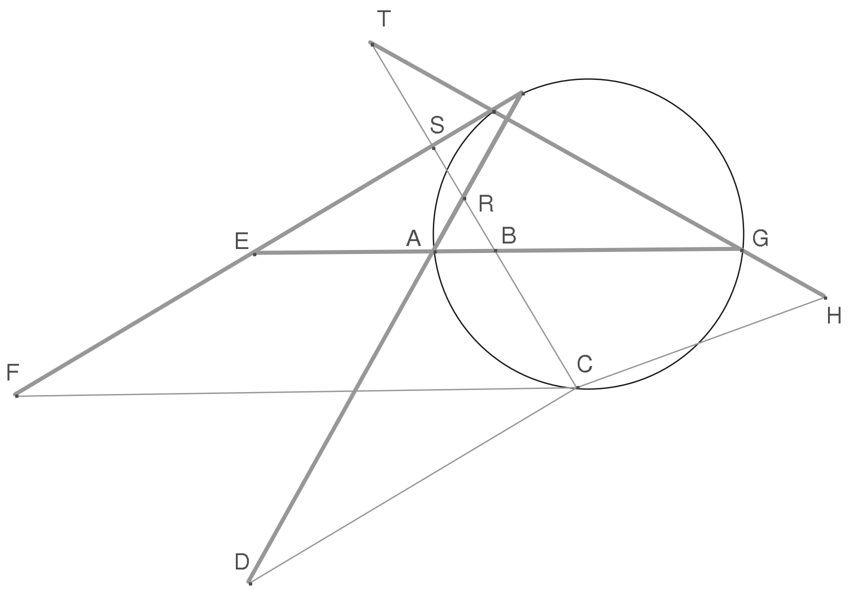


FIGURE 3.2 – *La figure fondamentale du Problème* $D_1D_2 = D_3D_4$

L'établissement de l'équation de la ligne à 4 droites

Il est important, et intéressant, pour comprendre la portée de l'innovation cartésienne des (x, y), de comparer le début de son calcul avec ce qu'en aurait pu faire un Ancien comme Euclide ou Apollonius. Il s'agit, toujours page 310 des *Essais* (383 de AT VI), du calcul d'une longueur CD. Le point de départ

15. Pages 309 des *Essais*, 382 de AT VI.

est tout à fait trivial en regardant la figure [16]

$$CD = \frac{CD}{CR}\,CR = \frac{CD}{CR}\,(CB + BR) = \frac{CD}{CR}\Big(CB + \frac{BR}{AB}\,AB\Big).$$

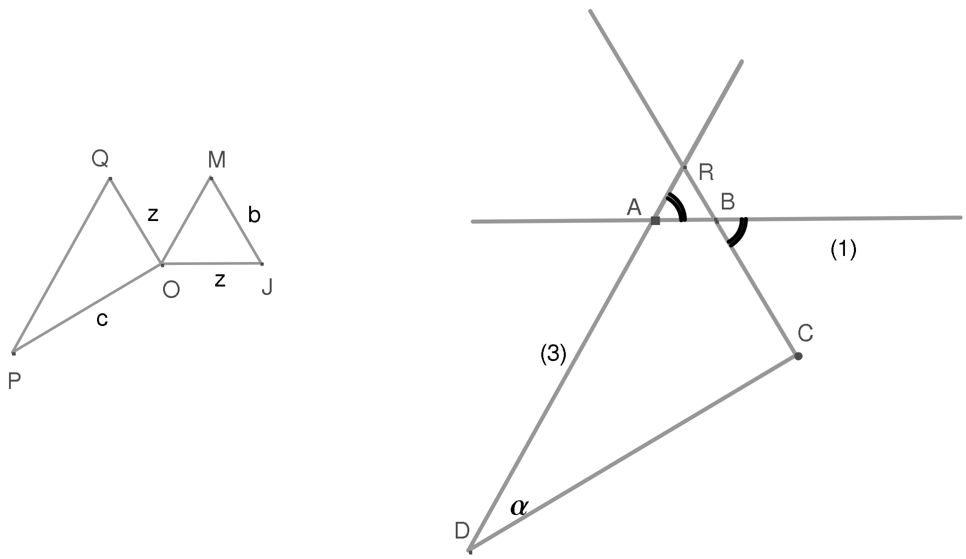


FIGURE 3.3 – *L'introduction des paramètres b, c et z*

Cela écrit, bien que les points (B, C, R, D) ne soient pas fixés par la donnée des droites (D_i) mais dépendent de D, il est clair que les mesures des angles du triangle ARB sont connues, puisque $\widehat{BAR}$ est l'angle de D_1 d'avec D_3, et que $\widehat{RBA}$ est l'angle sous lequel C se projette obliquement sur D_1. On peut donc construire, dans un coin de la figure [17], un triangle OMJ, homothétique de ARB, qui sera, pour sa part, indépendant de C. De même les mesures des angles du triangle DRC sont connues, puisque $\widehat{DRC} = \widehat{ARB}$, et que $\widehat{CDR}$ est l'angle sous lequel C se projette obliquement sur D_3. On peut donc construire, toujours dans le même coin de la figure, un triangle PQO, homothétique de DRC, qui sera lui aussi indépendant de C. L'égalité obtenue

16. Bien sûr, l'obligation de positivité gêne Descartes lui-même, qui est obligé à des contorsions maladroites : « *à cause que le point* B *tombe entre* C & R ; *car si* R *tombait entre* C & B, CR *serait* »…

17. Conformément à une habitude que l'on retrouve dans Euclide mais aussi dans *La Géométrie*, par exemple pages 390 ou 396 des *Essais* et 465 ou 470 de AT VI.

plus haut peut donc s'écrire, grâce aux couples de triangles homothétiques $\begin{bmatrix} ARB \\ OMJ \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} DRC \\ PQO \end{bmatrix}$,

$$CD = \frac{OP}{OQ}\Big(CB + \frac{JM}{OJ}\,AB\Big).$$

Un tel calcul (modulo les habitudes du temps, bien sûr) aurait pu être tenu par un mathématicien grec avant Jésus-Christ. C'est exactement aussi celui qu'a conçu Descartes, à une différence près, qui peut paraître minime, mais a eu une importance énorme sur le développement scientifique des temps modernes jusqu'à aujourd'hui : il a remplacé des **variables** comme AB et BC par deux lettres [18] prises à la fin de l'alphabet, et des **constantes** comme $\dfrac{OP}{OQ}$ et $\dfrac{JM}{OJ}$ par des lettres autres que x et y, respectivement [19] $\dfrac{c}{z}$ et $\dfrac{b}{z}\cdot$ Il écrira donc

$$CD = \frac{c}{z}\Big(y + \frac{b}{z}\,x\Big) = c\,\frac{zy+bx}{z^2}\cdot$$

Les autres calculs, ceux de CF et CH, sont tout à fait analogues.

La différence entre $\dfrac{OP}{OQ}\Big(CB + \dfrac{JM}{OJ}\,AB\Big)$ et $\dfrac{c}{z}\Big(y + \dfrac{b}{z}\,x\Big)$ saute aux yeux. La seconde écriture est bien plus maniable et suggestive. Les Anciens ne savaient utiliser le calcul des segments que sous la forme lourde où chaque longueur était définie par deux points [20], handicap qui les empêchera d'aller plus loin.

Par exemple Apollonius a su démontrer, avec de tels moyens, un théorème assez lourd sur les cordes de Coniques qu'utilisera Fermat dans son étude du lieu à trois droites (voir page 122). Mais, grâce à Descartes, le remplacement d'expressions bien peu lisibles telles que $OB^2MP^2 + OA^2MQ^2 = OA^2OB^2$ et $OB^2MP^2 - OA^2MQ^2 = OA^2OB^2$ par $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ permet à un étudiant

18. Viète employait des voyelles pour ces inconnues.

19. La lettre z prise comme constante appartient pourtant à la fin de l'alphabet, ce que nous ne permettrions plus aujourd'hui. Elle peut être considérée comme une variable d'homogénéité. Si les triangles OMJ et PQO ont été construits de façon que $OJ = OQ$, on peut alors interpréter b et c comme étant respectivement les longueurs fixes JM et OP.

20. Cela n'est pas tout à fait exact ; disons que c'était de loin le cas le plus général.

d'aujourd'hui, en première année de licence, de prouver ce théorème avec facilité : au génie, nécessaire il y a quelques vingt siècles pour aboutir à certains résultats, nous avons pu substituer depuis des capacités bien inférieures pour arriver au même stade par une manipulation presque mécanique de calculs numériques de base. Voilà en quoi ces pages sont essentielles, alors que le Problème de Pappus est aujourd'hui dans les poubelles de l'Histoire.

La figure aux onze points en huit droites

Une figure qui apparaît sept fois, sous trois formes voisines, dans un livre de 117 pages seulement, est évidemment jugée comme essentielle par l'auteur. La voici dans sa forme la plus simple

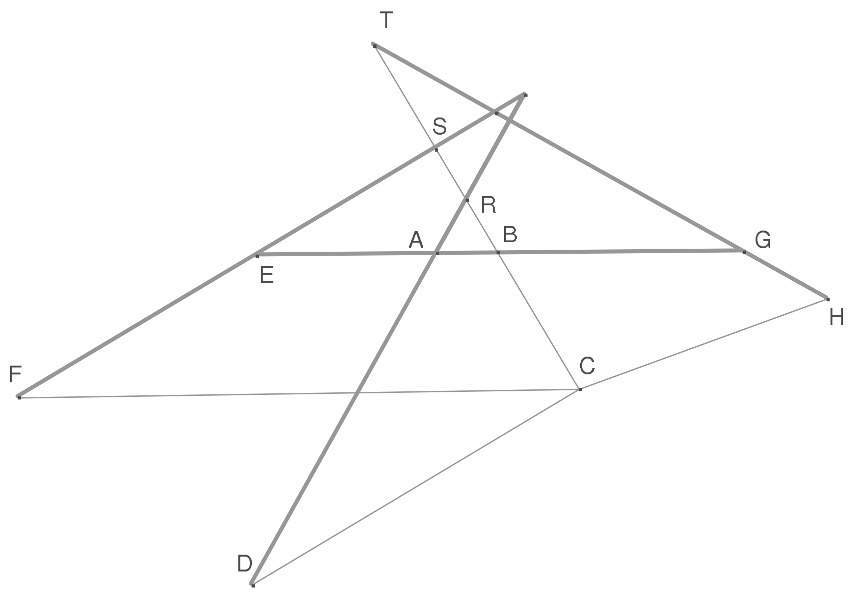


FIGURE 3.4 – *La figure de base d'un lieu à quatre droites*

Les éléments fixes

On peut la voir pour la première fois, pages 309 des *Essais* et 382 de AT VI, dans le *Réponse à la question de Pappus*[21]. Elle comporte quatre droites fixes,

21. Descartes a donné les clefs numériques de sa construction en page 333 des *Essais* (405 de AT VI). Voir notre page 237.

celles du *lieu à quatre lignes*, à savoir $D_1 = ABEG$, $D_2 = EFS$, $D_3 = ADR$ et $D_4 = GHT$, quatre droites variables $CBRST$, CF, CD et CH, issues du point courant C, et donc trois points fixes E, A, G, cinq points variables C, B, F, D et H, liés par l'égalité $CB \cdot CF = CD \cdot CH$, et trois autres variables R, S et T, obtenus par diverses intersections explicitées ci-dessous. En outre, les longueurs $k = EA$ et $\ell = AG$ sont connus.

Il est regrettable que les points d'intersection U et V de D_2 avec D_3 et D_4 soient absents de la figure, bien qu'appartenant, comme $A = D_1 \cap D_3$ et $G = D_1 \cap D_4$, à la ligne étudiée [22]. Voici la liste des angles, orientés et définis modulo π, des différentes D_i entre elles

$$(D_1, D_2) = (D_2, D_3) = (D_4, D_1) = \frac{\pi}{6};$$

$$(D_1, D_3) = (D_4, D_2) = \frac{\pi}{3}; \qquad (D_3, D_4) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

En particulier $(UV, UA) = (GV, GA) = \dfrac{\pi}{6}$ et $(AG, AU) = (VG, VU) = \dfrac{\pi}{3}$ d'où, d'après le théorème de géométrie pure dit de l'angle inscrit, la *cocyclicité* des points (A, G, U, V) (quelle que soit d'ailleurs la position de A sur EG).

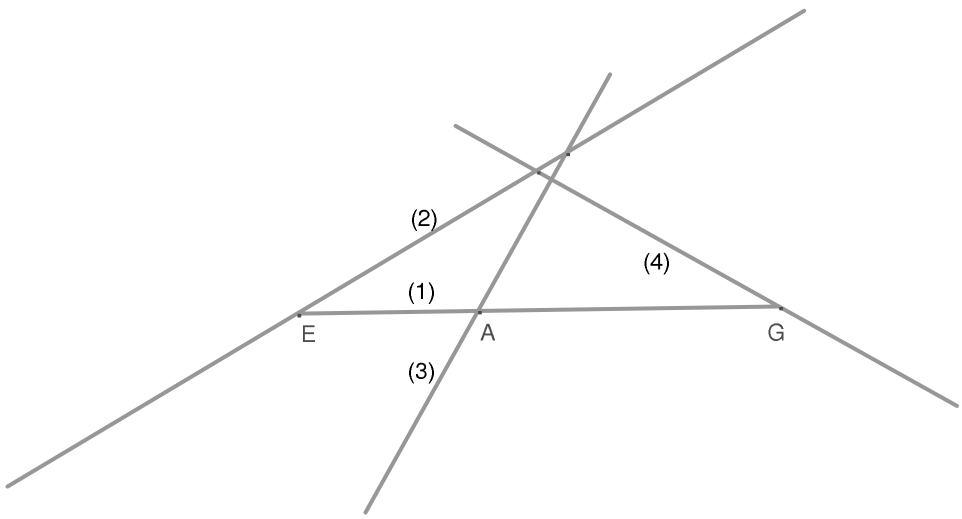


FIGURE 3.5 – *Les quatre droites et les trois points fixes*

22. Il est vrai qu'ils ne participent pas à la définition de (b, c, d, e, f, g).

Les éléments variables

À ces quatre droites de base, viennent ensuite s'ajouter quatre autres, et un certain nombre de points, dont l'un (C) est le point courant du lieu étudié, *a priori* pris arbitrairement. Une fois ce point placé, Descartes installe quatre droites (CB, CF, CD, CH), la première coupant respectivement D_2 en S, D_3 en R et D_4 en T, et surtout formant aux points (B, F, C, D) des angles avec (D_1, D_2, D_3, D_4) de mesures données au départ, par le biais de quatre rapports de longueurs

$$\frac{b}{z} = \frac{BR}{AB} = \frac{\sin \widehat{BAR}}{\sin \widehat{ARB}}; \qquad \frac{e}{z} = \frac{CF}{CS} = \frac{\sin \widehat{FSC}}{\sin \widehat{CFS}};$$

$$\frac{c}{z} = \frac{CD}{CR} = \frac{\sin \widehat{DRC}}{\sin \widehat{CDR}}; \qquad \frac{g}{z} = \frac{CH}{TC} = \frac{\sin \widehat{CTH}}{\sin \widehat{THC}}$$

qui sont en fait des rapports de sinus puisque les côtés d'un triangles sont proportionnels aux sinus de leurs angles opposés [23].

Enfin le choix de ce point C, qui définit notamment (B, S, T), détermine donc les triangles BES et BGT. Descartes pose maintenant

$$\frac{d}{z} = \frac{BS}{BE} = \frac{\sin \widehat{BES}}{\sin \widehat{ESB}}; \qquad \frac{f}{z} = \frac{BT}{BG} = \frac{\sin \widehat{TGB}}{\sin \widehat{BTG}}.$$

Il reste alors à calculer les quatre longueurs CB, CF, CD et CH pour écrire l'égalité voulue [24] étudiée au Livre Second lors de la solution du Problème de Pappus II (pages 325 des *Essais* et 398 de AT VI)

$$CB \cdot CF = CD \cdot CH.$$

23. De manière plus précise, Descartes considère plutôt les rapports tels que z/b, en écrivant « *la proportion, qui est entre les côtés* AB, & BR, *est aussy donnée, & je la pose comme de* z à b ». Nous préférons parler ici de b/z, pour que z apparaisse comme un dénominateur commun, mis là juste pour servir de variable d'homogénéité, que l'on peut prendre égale à 1.

24. Descartes dit « *venir en l'Equation* » (pages 310 des *Essais*, 383 de AT VI). Il est d'ailleurs curieux que cette équation ne soit pas effectivement écrite à cet endroit, mais seulement quinze pages plus loin.

Les variables sont $x = AB$ et $y = BC$, et l'on dispose des paramètres $(b, c, d, e, f, g, k, \ell)$. Il s'agit ici de calculs extrêmement élémentaires, qui donnent les résultats ci-dessous

$$CB = y; \quad CF = e\,\frac{zy + dk + dx}{z^2}; \quad CD = c\,\frac{yz + bx}{z^2}; \quad CH = g\,\frac{zy + f\ell - fx}{z^2}\,\cdot$$

Tout cela se déroule en pages 310-2 des *Essais*, 383-4 de AT VI.

Une équation du lieu

Anticipons un peu sur le calcul fondamental du Livre Second. L'équation obtenue $D_1D_2 = CB \cdot CF = CD \cdot CH = D_3D_4$, ou encore

$$[y]\left[\frac{ezy + dek + dex}{z^2}\right] = \left[\frac{czy + bcx}{z^2}\right]\left[\frac{gzy + fg\ell - fgx}{z^2}\right],$$

est donc de la forme $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 + s\,x + t\,y = 0$ avec

$$p = bcfg; \quad q = dez^2 + cfgz - bcgz; \quad r = ez^3 - cgz^2;$$

$$s = -bcfg\ell; \quad t = dekz^2 - cfg\ell z.$$

Page 326 des *Essais* et 399 de AT VI, il l'écrira encore sous la forme

$$\left(y - m + \frac{nx}{z}\right)^2 = m^2 + o\,x + \frac{p}{m}\,x^2$$

où il a introduit les abréviations suivantes

$$2m = \frac{cfg\ell z - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}; \quad \frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2};$$

$$o = -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}; \quad \frac{p}{m} = \frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}\,\cdot$$

Pour nous, il est clair qu'il s'agit d'une *Conique passant par l'origine*. Une question se pose : toute Conique de ce type peut-elle, d'après les calculs ci-dessus, s'écrire comme lieu à quatre droites avec les notations de Descartes ?

La réponse est oui. En voici une solution quasi-générale [25] : il suffit de poser

$$\frac{b}{z} = \frac{2p}{p+q-r}; \quad \frac{c}{z} = \frac{d}{z} = \frac{f}{z} = 1;$$

$$\frac{e}{z} = \frac{p+q+r}{2}; \quad \frac{g}{z} = \frac{p+q-r}{2};$$

$$k = \frac{2p\,t-(p+q-r)\,s}{p\,(p+q+r)}; \quad \ell = -\,\frac{s}{p}$$

(il y a évidemment une infinité d'autres solutions) [26]. La façon de faire de Descartes est donc bien générale.

Des calculs précédents on tire, par exemple, que des équations des droites $D_1 = AB$, $D_2 = EF$, $D_3 = AD$ et $D_4 = GH$, avec $D_1D_2 = D_3D_4$, sont respectivement

$$(CB =)\,D_1 = y; \quad (CF =)\,D_2 = \frac{p\,(p+q+r)\,(x+y)+2p\,t-(p+q-r)\,s}{2p};$$

$$(CD =)\,D_3 = \frac{2p\,x+(p+q-r)\,y}{p+q-r}; \quad (CH =)\,D_4 = \frac{(p+q-r)(p\,(y-x)-s)}{2p}$$

ce qui correspond à l'égalité pappienne (non évidente !)

$$2p\,(p\,x^2+q\,xy+r\,y^2+s\,x+t\,y)$$

$$= [y]\cdot[p\,(p+q+r)\,(x+y)+2p\,t-(p+q-r)\,s]-[2p\,x+(p+q-r)\,y]\cdot[p\,(y-x)-s]$$

pour la conique générique d'équation $p\,x^2+q\,xy+r\,y^2+s\,x+t\,y=0$.

Chaque fois que l'on rencontre un lieu à quatre lignes dont on connaît des équations, $y=0$ pour D_1, $dx+zy+dk=0$ pour D_2, $bx+zy=0$ pour D_3 et $fx-zy-f\ell=0$ pour D_4, son équation pappienne nous donne quatre points de la conique. Ces points s'expriment bien lourdement, en dehors des deux premiers, en fonction de (p,q,r,s,t) ; par contre, avec les notations de Descartes, on trouve que $D_1 \cap D_3 = A$ a pour coordonnées $(0,0)$ et

25. Elle oublie les cas où $p=0$ ou $p+q=\pm r$ - faciles à traiter de manière analogue -, et les problèmes - redoutables - de positivité de certains nombres.

26. Il reste toutefois à vérifier que la connaissance des droites D_i et de paramètres arbitraires (b,c,d,e,f,g) détermine bien les sinus des angles φ_i sous lesquelles sont tracées les projections obliques du point courant C, mais c'est plus long que difficile à faire.

que $G = D_1 \cap D_4$ a pour coordonnées $(\ell, 0)$. Les deux autres ne sont pas nommés sur la figure. Il s'agit de $U = D_2 \cap D_3$, soit encore $EF \cap AD$, de coordonnées $\left(\frac{dk}{b-d}, \frac{bdk}{z\,(d-b)}\right)$ et de $V = D_2 \cap D_4$, soit encore $EF \cap GH$, de coordonnées $\left(\frac{f\ell - dk}{d+f}, -\frac{df\,(k+\ell)}{z\,(d+f)}\right)$. À l'œil, ces deux derniers points semblent bien appartenir à la Conique - un Cercle - telle qu'elle nous sera dévoilée dans les pages 325, 327, 329 et 334 des *Essais* (398, 400, 404 et 406 de AT VI). Par contre, ils n'appartiennent évidemment pas à la figure [27] de la page 331 des *Essais* (402 de AT VI), qui est donc un faux grossier [28], contrairement aux autres.

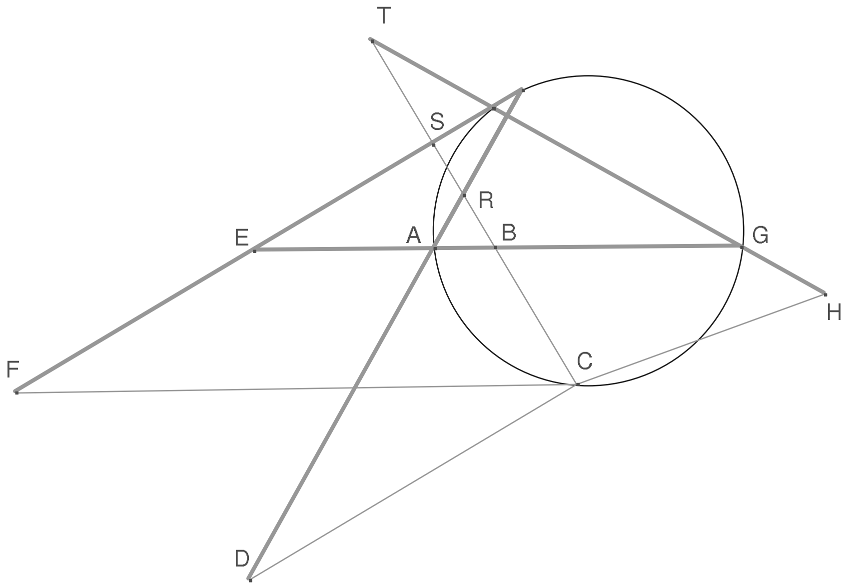


FIGURE 3.6 – *Le Cercle lieu de C, huit droites et onze points*

Comme toute ligne à quatre droites, ce Cercle admet une courbe adjointe, définie par l'opposition $D_1D_2 = -D_3D_4$. Dans le cas particulier du lieu précédent, on trouve une Hyperbole. Voici la réunion des deux Coniques, qui se coupent selon (A, G, U, V)

27. Attention à l'échange inopportun des deux figures des pages 402 et 404 dans AT VI, qui n'a jamais été corrigée jusqu'à l'édition de Gallimard en 2009.

28. Très certainement pour des raisons d'économie prônées par l'éditeur, selon un procédé toujours vivace : utiliser les restes.

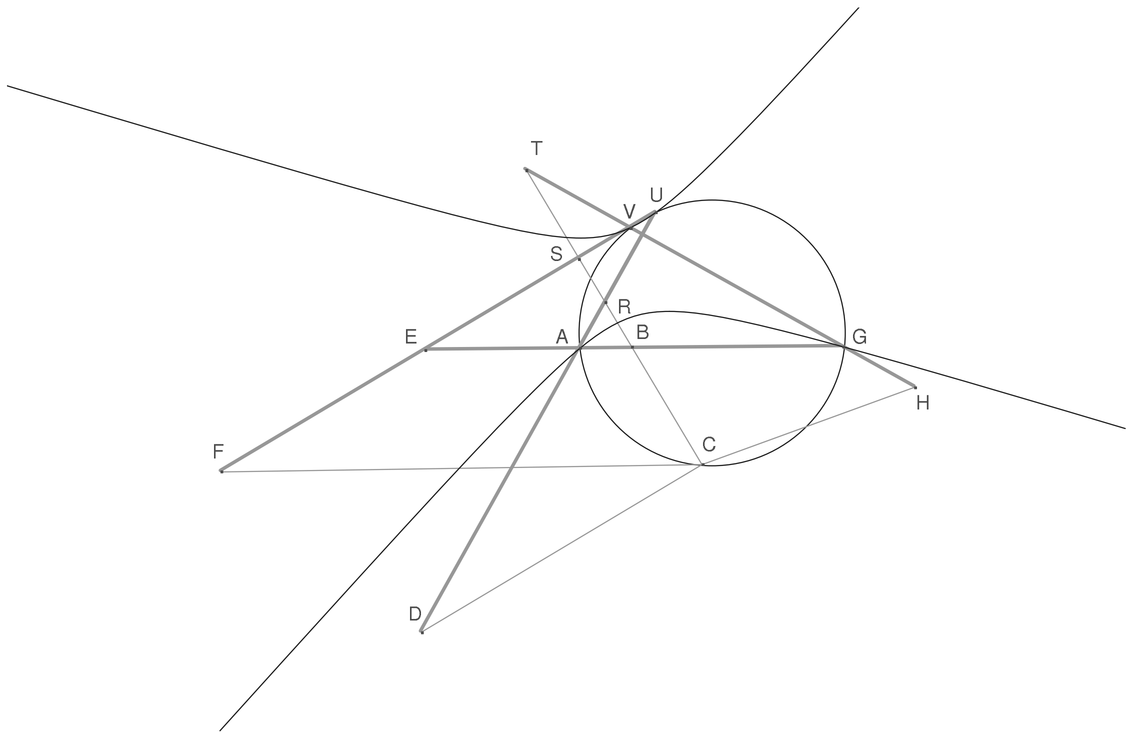


FIGURE 3.7 – *Deux lignes à quatre droites adjointes l'une de l'autre*

Dans les axes utilisés dans son calcul par Descartes (le point A comme origine, la droite AG comme axe des x, et la direction de la droite BC comme direction de l'axe des coordonnées), leurs équations sont respectivement

$$y\,(2y+x+3)=(x+y)\,(y-x+5) \qquad \text{soit} \qquad y^2+xy+x^2-5x-2y;$$

$$y\,(2y+x+3)=-\,(x+y)\,(y-x+5) \qquad \text{soit} \qquad 3y^2+xy-x^2+5x+8y.$$

Il est dommage que l'auteur de *La Géométrie*, qui a pourtant reconnu l'existence de l'adjointe de sa Parabole cartésienne, ne fasse pas allusion à cette Hyperbole alors qu'il utilisera le Cercle dans quatre figures de son Traité (voir page 98).

Comment, pourquoi, utiliser ces coordonnées ?

La réponse à cette double question est, pour nous, si claire qu'il n'est guère utile de s'y attarder : en mathématiques c'est totalement évident, et même les sciences voisines en ont été presque aussitôt bouleversées [29]. Seuls peut-être deux aspects, que l'on peut certes considérer comme anecdotiques, nous ont paru dignes d'être signalés ici qui montrent que rien ne va tout à fait de soi en ce domaine. D'une part, la géométrie analytique peut servir à découvrir des propriétés purement géométriques. D'autre part, le concept de coordonnées de signe arbitraire a longtemps posé problème.

La géométrie pure et la découverte de la droite d'Euler

Sur la figure ci-dessous, le point G divise le segment HO dans le rapport 2. La droite OGH s'appelle *droite d'Euler* [30].

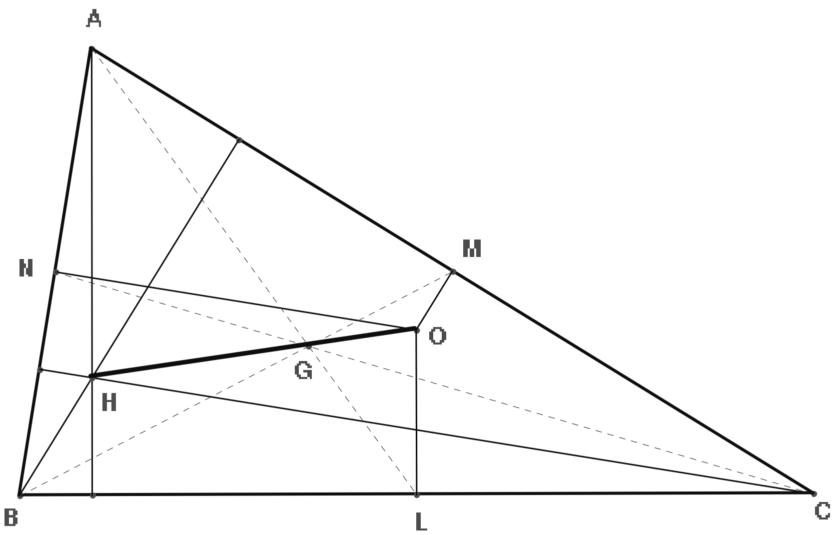


FIGURE 3.8 – *La droite d'Euler*

29. Le repérage numérique dans le plan puis, très vite, dans l'espace, a notamment conforté sans commune mesure la physique mathématique, descriptive puis prédictive d'un précurseur comme Galilée.

30. Voir les pp. 158-161 du livre de l'auteur sur Leonhard Euler.

Cette dénomination est tout à fait légitime, même s'il est des plus surprenant que les Grecs, qui avaient en main toutes les armes nécessaires et connaissaient bien les quatre points [31] O, G, H et I n'aient pas, à notre connaissance tout au moins, remarqué cette étonnante configuration.

Chose encore plus étonnante peut-être, Euler ne la découvrit pas par des raisonnements de géométrie pure, comme il est très facile de le faire, mais par la géométrie analytique de Descartes et Fermat, ici maniée par surcroît de façon fort lourde ! Au moins, il avait choisi A comme origine et AB comme axe des abscisses, rompant ainsi volontairement les symétries entre sommets, mais le travail qui restait à faire était néanmoins considérable.

Le mémoire fondateur est noté E325 par Eneström dans son travail de recollection des œuvres d'Euler [32] ; il a été présenté à Saint-Pétersbourg le 12 décembre 1763 puis publié en 1767 par l'Académie russe sous le titre étonnant *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, opposant la facilité des solutions qu'il propose à la difficulté apparente de certains problèmes géométriques. Si l'on peut en juger aujourd'hui, il semble que le but essentiel d'Euler ait été, en fait, de résoudre le problème consistant à retrouver les longueurs des côtés du triangle à partir de l'ensemble des quatre points H, G, I et O, le reste n'étant que des calculs préliminaires à cet objectif (voir notamment le paragraphe 21 et les suivants).

La formule que voici, donnant l'aire S du triangle en fonction de ses côtés a, b et c et due à Héron d'Alexandrie (deuxième siècle)

$$16\,S^2 = 4\,(bc\sin A)^2 = 4\,b^2c^2 - (2\,bc\cos A)^2 = 4\,b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$$

$$= [(b+c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b-c)^2] = (b+c+a)\,(b+c-a)\,(a-b+c)\,(a+b-c)$$

y joue un rôle important dans la preuve, qui consiste tout simplement à calculer en fonction de $a+b+c$, $ab+bc+ca$ et abc les coordonnées des trois points H (§6), G (§7) et O (§9), puis les longueurs HG (§12, avec une faute typographique étonnante), HO (§14) et GO (§16). Le point crucial est, dans ce dernier calcul de GO, de vérifier que les rapports des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont égaux à 1/2, ce qui établit l'alignement des trois

31. Respectivement le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC.

32. On peut le lire sur les *Euler Archiv* de l'université de Dartmouth.

points et donne en prime la longueur GO. On est évidemment ici tout près de l'homothétie qui sert aujourd'hui à démontrer l'alignement d'Euler, mais il n'y est fait aucune allusion, même sous la forme de triangles semblables omniprésents dans Euclide : c'est du Descartes pur débarrassé des Grecs.

Pourtant cet alignement n'est qu'implicite dans ce paragraphe, il n'est ouvertement affirmé que plus loin (§18) : *tria puncta H, G, I forment triangulum HGI tum quartum punctum O ita in recta HG* (nous avons écrit les noms modernes H, G, I et O au lieu des lettres E, F, G et H originellement choisies par Euler : *le quatrième point O appartenant à la droite HG*) [33].

Si, malgré cela, la démonstration d'Euler ne fait pas spécialement honneur à sa maîtrise des éléments d'Euclide, il faut pourtant admirer - sans bornes - le simple fait qu'il ait été le premier à découvrir cette relation extraordinaire. Comment ? Nous ne le savons pas vraiment, l'idée qu'il aurait eu un petit matin de calculer systématiquement, grâce à Descartes, toutes les distances telles que HG en fonction des côtés du triangle étant quand même assez peu naturelle. Il faut ensuite encore le louer pour ses formidables qualités de calculateur, surtout si l'on se souvient qu'il avait perdu un œil en 1738 et devait devenir complètement aveugle en 1771. Ici, l'algèbre, 126 ans après le *Discours*, a permis à la géométrie très élémentaire [34] de s'enrichir d'une très belle propriété. En général, la géométrie analytique a plutôt permis de maîtriser des situations bien plus complexes... Descartes aurait-il pu imaginer cela ?

Le problème des coordonnées négatives vit-il encore ?

Savoir à partir de quelle époque les coordonnées négatives ont été reçues comme parfaitement banales est un sujet difficile. Nous ne prétendrons pas

33. On peut lire des détails de cet étonnant calcul, que l'on pourrait qualifier de passage en force brute, dans les pages 133 à 140 du *Euler, the master of us all* de William Dunham, publié en 1999 par la *Mathematical Association of America* dans sa série *Dolciani*. Mais la façon d'en déduire le théorème sur la droite d'Euler est personnelle à l'auteur, qui ne signale pas en revanche la remarque géniale sur la comparaison des coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{GH}$.

34. L'alignement OGH et l'égalité $\overrightarrow{GH} = -2\,\overrightarrow{GO}$ peuvent être établis dès le collège, et *a fortiori* très facilement au lycée, en considérant, de manière implicite ou explicite, l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$.

ici le traiter dans sa totalité, mais seulement en examiner quelques aspects. Il faut décomposer ainsi le problème

a) connaître les nombres négatifs
b) admettre des racines négatives d'une équation
c) admettre des coordonnées négatives.

Le premier point est assez clair : on peut remonter très haut, par exemple chez Brahmagupta (598-670) qui, dans son traité *Brahmasphutasiddhanta* (L'ouverture du Monde) de 628, met en parallèle les « pertes » et les « profits »[35] dont le sens concret est clair, à défaut d'une introduction abstraite.

Pour en venir au second point, il faut franchir mille ans au moins. Viète (1540-1603) les refusera bien que Bombelli (1526-1573) les ait, plus ou moins admises[36]. Descartes les appellera « fausses », ce qui est un peu discriminatoire, mais enfin leur donne un statut qu'elles ne perdront pas.

Cela dit, il aurait pu agir de même pour légitimer les coordonnées négatives, alors que son premier mouvement avait été de considérer x et y comme des longueurs. On pourrait y croire en contemplant l'une des illustrations de *La Géométrie* où elle est présente aux pages 336 et 338 des *Essais* (409 et 410 de AT VI).

Sur cette figure, on peut en effet lire *deux* Paraboles cartésiennes symétriques. Celle qui correspond au texte est formée d'une sorte de parabole à la gauche du dessin, passant par un point C se projetant en un point M de l'axe horizontal et, à gauche, de la branche quasi rectiligne contenant un point N d'une sorte de X. Elle prouve que, tacitement en tout cas, sa courbe d'équation (dans un repère d'origine A) $x = \dfrac{y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3}{ay}$ ne comportait pas que des points tels que $x > 0$ et $y > 0$.

35. En 1727 cependant, Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736) définira sa célèbre échelle de température pour éviter tant que faire se peut l'en dessous de zéro de notre échelle de température moderne. Anders Celsius (1701-1744), son contemporain, proposera en 1742 d'affecter 100 à la congélation de l'eau et 0 à son ébullition, ce qui sera rapidement inversé.
36. Sa réputation est basée sur l'introduction des nombres imaginaires en 1572.

Toutefois, le fait que Schooten, certainement sur instruction de Descartes, ait accompagné cette courbe de sa symétrique (*son adjointe*), d'équation $x = -\dfrac{y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3}{ay}$, montre peut-être que le signe de x, distance de C à l'axe, le gênait quelque part [37].

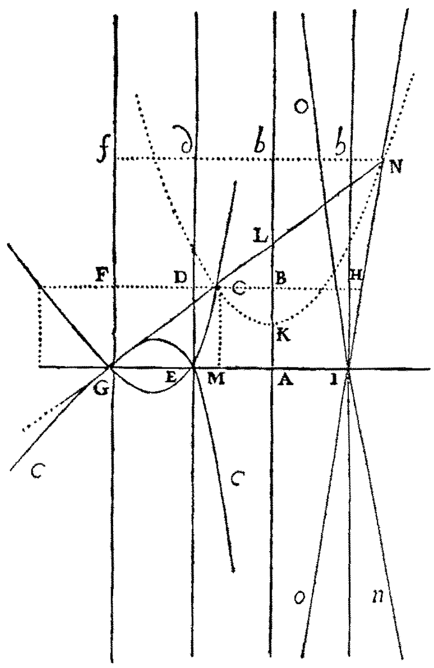


FIGURE 3.9 – *La Parabole cartésienne vue par Descartes*

Son disciple immédiat Jan de Witt aura la même attitude en 1659 dans son traité *Elementa Curvarum Linearum* amalgamé à la seconde édition latine de *La Géométrie* : c'est clair en se reportant aux pages 244 et suivantes du

37. Une équation commune à ces deux Paraboles cartésiennes s'écrit

$$|2a - y|\,|a - y|\,|y + a| = a\,|x|\,|y|.$$

C'est bien normal, car le Problème de Pappus ne fait en principe intervenir que des longueurs. Dans ce cas particulier, les deux courbes sont simplement symétriques ; il n'en va pas toujours ainsi. Voir aussi les dérapages de Descartes autour de $\pm\dfrac{p}{m}$ pages 326-8 des *Essais*, 399-400 de AT VI.

début même de son livre second, ainsi que les six théorèmes sur les droites qu'il examine en ne s'intéressant en fait qu'à un seul quadrant

I. $y \infty \frac{bx}{a}$, ſive (poſito $a \infty b$) $y \infty x$.

II. $y \infty \frac{bx}{a} + c$, ſive, poſito, ut ſupra, $y \infty x + c$.

III. $y \infty \frac{bx}{a} - c$, ſive $y \infty x - c$.

IV. $y \infty - \frac{bx}{a} + c$, ſive $y \infty - x + c$.

FIGURE 3.10 – *Des équations de droites chez Jan De Witt*

Newton n'aura pas ces scrupules dans son rendu de la même Parabole (son *Trident*)

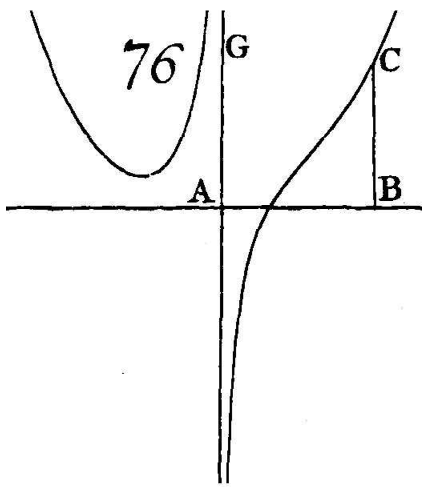


FIGURE 3.11 – *La parabole cartésienne d'après un dessin de Newton*

(numéro 76 de la page 163 de la première annexe à son traité *Opticks*). Voici un exemple encore plus frappant [38]

38. Cette courbe de Newton est voisine de celle d'équation $x\,(y^2 - x^2) = y$, plus simple et plus facile à tracer à la main.

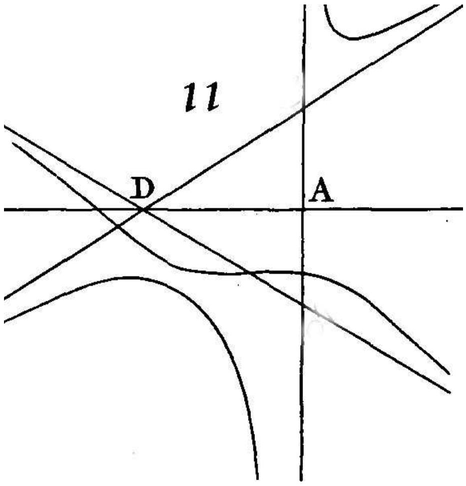


FIGURE 3.12 – *Une cubique d'après un dessin de Newton*

(numéro 11 de la page 149 du traité cité), sur lesquels il est parfaitement clair que l'auteur vogue allègrement dans les quatre quadrants du repère cartésien.

Cela étant, la présence de points d'une figure dans plusieurs quadrants (au moins deux pour une droite et généralement trois) n'est pas aussi dirimante qu'il n'y paraît à première vue : rien n'empêchait en effet par exemple les mathématiciens de ce siècle d'utiliser plusieurs équations pour des bouts de droites découpés par les axes : x et y sont alors toujours positifs...

Par suite, abandonnant même Newton, nous nous permettrons de rejeter au dix-huitième siècle, au moins jusqu'à Maclaurin, la date d'une acceptation sans réserve de coordonnées aussi bien négatives que positives. Pourtant la suite de cette brève étude prouvera qu'il reste quelques réticences.

Certains pensent qu'une véritable acceptation des coordonnées négatives pourrait être recherchée chez Wallis (1616-1703), dans ses *Tract on Conic sections* de 1655 et *Algebra* de 1673 (voir l'histoire de la géométrie analytique de Carl Benjamin Boyer, p. 139), ou La Hire dans *Les lieux géométriques* (vol 2) et *La construction des équations analytiques* (vol 3) de 1679. En fait, ces auteurs montrent qu'ils comprennent bien la notion de racine négative, mais les coordonnées n'y sont pas. Nous avons déjà cité Newton dans son *Enumeratio linearum tertii ordenis* (1676 publiée en 1706) ; il y a aussi dans une certaine mesure Huygens (1629-1695) au sujet du Folium in *Œuvres complètes* (XXII volumes, La Haye 1888-1950, vol X pp. 351 et 370) de 1692, et surtout Maclaurin (1698-1746) dans sa *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis* de 1720 et le *Traité des fluxions* de 1742 pour trouver un usage bien banalisé des coordonnées négatives.

Un exemple moderne de réticence aux coordonnées négatives

Donnons un point d'histoire pour commencer : celle de la *mesure algébrique* d'un segment, notée $\overline{AB}$, négative si le sens du vecteur [39] $\overrightarrow{AB}$ d'extrémités situées sur un axe est opposé à celui du vecteur unitaire de cet axe. On peut en faire remonter l'origine aux mémoires *De la corrélation des figures géométriques* (1801) et surtout *Géométrie de position* (1803) de Lazare Carnot (1753-1823), qui parle d'un *principe de corrélation*, mais essentiellement, bien sûr, au *Traité de Géométrie supérieure* (1852, chez Bachelier) de Michel Chasles (1793-1880) qui y traite systématiquement de son *principe des signes*. Dans la seconde édition (1880, Gauthier-Villars), il apparaît à la page vi de sa Préface (reprise de 1852), et de manière formelle [40] dans la définition 1 du premier chapitre de la première section du livre, et tout naturellement en page 1, ce qui indique bien sa place éminente dans l'œuvre. Ce concept aujourd'hui si simple a permis de régler, aux yeux des mathématiciens, tous les problèmes de mesures négatives, et par exemple de donner une forme impeccable au théorème dit de Thalès et surtout de sa réciproque [41]. C'est aussi naturellement lui qui a rendu possible la célèbre relation justement dite de Chasles : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

Voici donc un élément de réponse, assez navrant, à la question étudiée cidessus : il y a soixante ans, période où l'on s'était en principe depuis longtemps familiarisé avec les mesures algébriques, on enseignait aux lycéens

39. Littéralement : transporteur.

40. Avec simplement la notation AB, par exemple dans $AB + BC + CA = 0$, ce qui n'était pas un très bon choix. Le titre est *Avertissement relatif à l'usage des signes + et − pour déterminer la direction des segments rectilignes ou des angles*

41. Malheureusement, pour des raisons stupides de non-conformité d'avec le reste de l'Europe, le ministère de l'Éducation Nationale, après avoir lâchement abandonné son beau nom d'Instruction Publique, a décidé dans les années 80 de laisser aussi tomber cette singularité française, en tout cas pour les mathématiques : apparemment, et heureusement, en physique il n'en va généralement pas de même.

(de Première, croyons-nous) quelques rudiments d'Optique géométrique [42], concernant l'image M' d'un point objet M après passage par une lentille mince de centre O à faces sphériques, *par examen approfondi de la figure suivante*

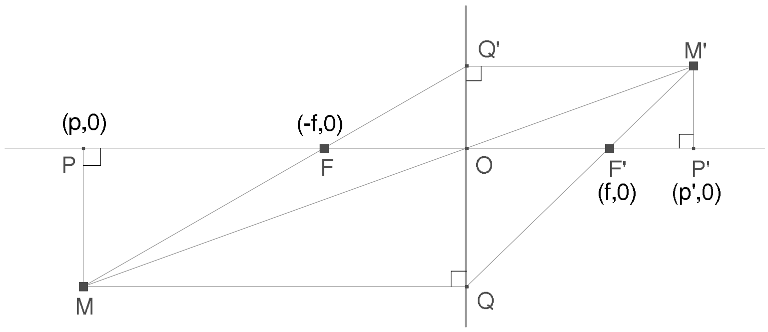


FIGURE 3.13 – *La relation de Descartes en optique géométrique*

La relation générale $\sin \hat{\imath} = n \sin \hat{r}$ de Descartes permet, après quelques manipulations algébriques et trigonométriques sur deux dioptres sphériques, de démontrer que [43], les rayons issus de M, notamment parallèle à l'axe et passant par le foyer objet F, se réfractent en passant par le foyer image F' et parallèlement à l'axe : ils se coupent en un point M', de surcroît M' est aligné avec M avec le centre O. Si l'on note p, g, f et p' les abscisses de M, F, F' et M', on peut démontrer géométriquement que [44] $g = -f$ et que [45] $\dfrac{1}{OP'} + \dfrac{1}{OP} = \dfrac{1}{f}$.

C'est seulement après ce parcours, tout à fait dans l'esprit de Descartes et de son siècle, qu'en regardant la figure [46], les relations entre abscisses $f > 0$ et

42. Dans les conditions d'approximation dites de Gauß.

43. Dans les conditions de Gauß, c'est-à-dire M et M' proches de l'axe optique FOF', et rayons lumineux issus de M limités à être peu inclinés sur cet axe.

44. Les trois couples de triangles homothétiques $\begin{bmatrix} FOQ' \\ MQQ' \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} F'OQ \\ M'Q'Q \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} MOQ \\ M'OQ' \end{bmatrix}$ montrent que $FO = MQ \cdot \dfrac{OQ'}{QQ'}$, $F'O = M'Q' \cdot \dfrac{OQ}{Q'Q}$ et enfin $\dfrac{MQ}{OQ} = \dfrac{M'Q'}{OQ'}$, d'où $FO = F'O$.

45. Les deux couples de triangles homothétiques $\begin{bmatrix} FOM \\ Q'M'M \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} F'OM' \\ QMM' \end{bmatrix}$ montrent que $\dfrac{FO}{OP'} = \dfrac{FO}{Q'M'} = \dfrac{MO}{MM'}$, puis $\dfrac{F'O}{OP} = \dfrac{F'O}{QM} = \dfrac{OM'}{MM'}$ et enfin, par addition, $\dfrac{FO}{OP'} + \dfrac{F'O}{OP} = 1$.

46. Cela avait déjà été le cas pour écrire $MO + OM' = MM'$.

$p < 0 < p'$ conduisaient à la formule plus « abstraite », destinée aux meilleurs élèves

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \cdot$$

Un travail analogue était à reprendre pour d'autres cas, par exemple celui de lentilles divergentes, *etc.*

Ici encore donc, à une époque très voisine de celle-ci, le travail analytique direct ne discriminant pas les abscisses en jeu selon leur signe, ne venait qu'en second, après une démarche d'abord « concrète », alors que l'usage de mesures algébriques aurait donné tout de suite le bon résultat [47] ! Le progrès avance décidément bien lentement.

Notons qu'assez ironiquement, cette égalité porte traditionnellement le nom de *formule de Descartes* [48].

La vieille méfiance envers les coordonnées négatives était donc, il y a encore quelques dizaines d'années, en survie - au moins chez quelques auteurs de manuels de physique. Peut-être devrait-on regarder si, aujourd'hui, leurs successeurs ont vraiment fait leur *aggiornamento* [49] ?

---

47. Les égalités figurant dans nos notes restent valables si l'on surligne toutes les longueurs de segments qui y figurent, quelles que soient les directions donnés à des axes définis sur les droites FF', MF et $M'F'$. Elles sont lisibles par des aveugles...

48. Sans doute à cause de la démonstration esquissée ci-dessus, bien que l'approximation entre petits angles $\hat{\imath} = n\,\hat{r}$, utilisée en fait dans la preuve complète, ait été connue bien avant Descartes ; on la trouve par exemple - sans référence à la petitesse des angles - dans la *Dioptrice* de 1611 de Kepler (1571-1630) mais, contrairement à une opinion généralement répandue, son travail de 1604 (*Astronomia pars Optica*) indique une autre loi relevée par Jean Itard dans son article *Les lois de la réfraction chez Kepler* de la *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 1957, vol. 10, numéro 10-1, pp. 59-68

$$\hat{\imath} - \hat{r} = k\,\frac{\hat{\imath}}{\cos\hat{r}} \cdot$$

Par ailleurs il n'existe aucune trace d'une formule analogue dans *La Géométrie*, *La Dioptrique* ou même la *Correspondance* : cette attribution est donc fort discutable.

49. L'égalité $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{f}$ peut encore être trouvée, en 2010, sur certains sites internet.

Des coordonnées non cartésiennes

Comme on vient de le voir, l'invention commune à Descartes et Fermat porte sur l'usage de deux nombres x et y, distances d'un point variable à deux droites données, étendu par la suite à deux nombres de signe variable. L'extension à un triplet (x, y, z) apparut naturellement après, pour être par exemple parfaitement maîtrisée par un Euler au siècle suivant. Aujourd'hui les calculs géométriques sur des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont d'usage banalisé pour travailler dans les espaces de dimension n arbitraire.

Toutefois, à côté de ces utilisations, existent d'autres systèmes de coordonnées, non issues de Descartes *a priori*, mais qui s'en rapprochent assez fortement si l'on y réfléchit un peu. Il s'agit notamment des coordonnées *polaires*, *bipolaires* et *paramétriques*. Dans tous les cas, il s'agit de relier un point M à un couple de nombres.

Le premier de ces systèmes est absent de *La Géométrie*. Newton par exemple en fera un grand usage, notamment dans *La méthode des fluxions et des suites infinies*. On appelle couple [50] de coordonnées polaires d'un point M tout couple (ρ, θ) de nombres réels tels que $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$. Dans les premières utilisations, ρ est positif, et représente donc la longueur OM où O est l'origine ; par la suite, on permettra à ce nombre d'avoir un signe quelconque, mais gardera OM comme valeur absolue. Il s'agit donc d'une technique de coordonnées cartésiennes usuelles, présentée par le biais d'un changement de variables adapté à des problèmes où un point, pris comme origine, joue un rôle important.

Par contre, le système bipolaire est présent dans *La Géométrie* : au point M on associe le couple (ρ, r) de ses distances à deux points donnés. C'est le pivot de la définition des Ovales de Descartes qui forment le sujet de la fin du Livre Second : nous renvoyons donc à son étude dans le chapitre qui leur est consacré. On ne manquera pas de remarquer la similitude des deux concepts de couples de distances à deux objets donnés (droites, ou points).

La notion de coordonnées paramétriques est très différente : il s'agit toujours du couple cartésien (x, y), mais où une courbe Γ n'est pas donnée par une

50. Il en existe une infinité.

équation $f(x, y) = 0$, mais par deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$ telles que l'appartenance de M à Γ équivale à l'existence d'un réel z vérifiant les égalités $x = u(z)$ et $y = v(z)$. Cela se trouve aussi en un endroit de *La Géométrie*, encore dans la théorie des Ovales (pages 360 des *Essais* et 432 de AT VI), lorsque Descartes pose $FC = c+z$ et en déduit $GC = b-ez/d$: qu'il s'agisse de coordonnées bipolaires importe peu, l'idée est la même.

Finalement Descartes se retrouve donc souvent à l'origine de toutes ces extensions de son système initial, ce qui en prouve bien l'universalité. Lier un objet géométrique, un point, à un objet algébrique, un couple de nombres (x, y), (ρ, θ) ou (ρ, r), crée donc un passage très fort entre géométrie et algèbre, que l'Histoire a finalement montré être très important pour le plus grand bien de ces deux sous-disciplines. Même si l'on peut retrouver après coup des traces de cette idée chez ses prédécesseurs comme Apollonius, cela n'a rien à voir : c'est chez Descartes que se trouve vraiment l'idée forte et neuve d'en faire une méthode générale dont la puissance ne lui est certainement pas apparue dans toute son étendue (voir page 85), mais qui sera reconnue dans les siècles du triomphe de la conquête scientifique du monde.

Descartes a-t-il perçu l'envergure de sa découverte ?

Avant de répondre (par un non, bien sûr, comme nous venons de le faire) à cette question, on peut assurer que d'autres, et non des moindres, ne l'ont pas pu davantage. Ainsi Leibniz doutait très fort qu'il soit possible de montrer par l'approche analytique comment les fondements de la géométrie des Éléments d'Euclide peuvent se ramener à des calculs

« *On ne voit pas encore dans l'Analyse Géométrique une discipline achevée. Même si, en effet, la méthode de Viète et de Descartes permettait d'y faire presque tout par calcul, en faisant la supposition des Éléments, ce sont eux qui, pour la plupart, n'y ont pas encore été réduits.* [...] *Si le calcul donne facilement la démonstration du Théorème d'Euclide disant que la carré du tout est égal au carré des parties plus le double de leur rectangle* [...], *aucune méthode analogue ne permet de démontrer que dans un cercle un angle à la circonférence est moitié de l'angle au centre.* [...] *les Analystes se contentent d'y faire entrer les grandeurs en supposant les situations connues à partir la* *figure, ils ne peuvent donc se dispenser de tracer des lignes et des figures et de mettre à contribution l'imagination*[51] ».

Quel que soit le respect que l'on doive porter à ce grand homme, son texte est fortement contestable. Sans parler du fait que la géométrie analytique a justement permis à des générations de mathématiciens de se passer de toute figure au moins dans leurs livres[52], l'assimilation Viète-Descartes est peu acceptable, et minimise l'originalité profonde d'un homme qu'il n'aimera jamais[53]. Enfin tout professeur de mathématiques contemporain sait démontrer simplement par le calcul seul la relation entre angle au centre et angle inscrit (voir par exemple notre Annexe III page 155).

Cela dit, ce paragraphe prouve en tout cas que Leibniz a très largement sous-estimé la puissance des (x, y) ; d'ailleurs son propre projet de *Caractéristique géométrique*, sous-ensemble de sa *Caractéristique universelle*, ne verra bien entendu pas le jour.

Voici une autre preuve. En la page 141 de son *Descartes savant*, Gaston Milhaud écrit

« *Les savants du XVIIème siècle n'ont même pas songé à poser la question de priorité entre Fermat et Descartes*[54]*, tout simplement parce que la* Géométrie analytique *de ces derniers* [leur] *a paru continuer seulement en la développant et en la complétant, la méthode des lieux géométriques des Grecs* ».

S'il n'est pas sûr que ce reproche de myopie puisse s'appliquer à Newton, il faut accepter l'idée que l'époque n'était pas assez mûre pour comprendre qu'au delà de la mise au point d'un nouvel arsenal, Descartes et Fermat

51. *La caractéristique géométrique*, Fragment II de janvier 1677, trad. par Marc Parmentier d'après Javier Echeverría, pp. 50-3.

52. Jean Dieudonné me confia un jour, à propos de l'un de ses ouvrages pédagogiques ne contenant que du texte et des symboles mathématiques, qu'en réalité il faisait comme tout le monde : des gribouillis innombrables, dans sa tête sinon même sur papier, avant d'écrire quoi que ce soit.

53. Voir en particulier le livre de Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, pour mesurer la froideur de Leibniz vis-à-vis d'un homme dont il avait pourtant pris le soin de recopier à la main des passages de ses œuvres qui sinon nous seraient inconnus comme les *Progymnasmata de Solidorum Elementis*.

54. Au sujet de l'invention des coordonnées.

avaient fait entrer la science dans un autre monde qui nous a conduit à l'appropriation de l'Univers rationnel.

Enfin, le 24 juin 1950, le célèbre mathématicien Paul Montel affirma publiquement, dans une conférence au Palais de la Découverte sur Pascal[55], que « *Descartes ne pouvait d'ailleurs pas se douter de la puissance de l'outil qu'il venait d'offrir à la recherche mathématique* ». Bien qu'il ne donne pas, dans un texte si court, d'arguments en faveur de cette thèse - qui est mot pour mot la nôtre -, sa remarque, à contre-courant, est une pièce importante que nous versons très volontiers au dossier avec grand intérêt, à côté de celles de Leibniz et de Milhaud.

De manière certes indirecte, mais fort probante, ces trois documents viennent conforter la remarque factuelle selon laquelle, si Descartes avait compris l'étendue de sa découverte dans tout son éclat, il l'aurait manifesté d'une manière ou d'une autre, non sans forfanterie sans doute, alors que sa *Correspondance* va dans un sens tout autre.

Résumons ce qui est déjà clair à ce stade de notre étude des coordonnées de Descartes, également valable pour son rival Fermat (voir page 130)

i Ils sont les deux auteurs indépendants d'une découverte majeure : toute situation géométrique peut être décrite par une relation, *a priori* algébrique ou non, entre deux longueurs variables prises dans la figure, appelées plus tard coordonnées.

ii Cette relation porte en elle, sous forme numérique, toutes les propriétés de la courbe qu'elle définit, et peut donc la remplacer en cas de besoin.

iii Aucun d'eux n'a réellement pris conscience de ce que cet outil fondamental pour nous, mais déjà profondément novateur pour eux, allait permettre par le biais d'une mathématisation des sciences expérimentales d'ouvrir une ère de croissance scientifique inouïe.

iv Quels qu'aient été les génies de ces deux hommes, leur invention simultanée aurait été mise au point par d'autres qu'eux, par exemple Newton et Leibniz. Mais leur œuvre en aurait sans doute été retardée : Descartes et Fermat ont fait gagner un temps inestimable aux mathématiques.

55. Publiée la même année ; voir page 9.

Comment construire les courbes de Pappus

Dans sa *Réponse à la question de Pappus* (pp. 307-8 des *Essais* et 380-1 de AT VI), Descartes décompose d'abord les lieux pappusiens en plusieurs catégories : jusqu'à cinq, puis entre six et neuf, dix et treize, quatorze et dix-sept lignes *etc.*, avec à chaque fois une exception (si les cinq lignes [resp. neuf, treize, dix-sept...] sont deux à deux parallèles). Il affirme qu'il peut alors ramener la construction d'un tel lieu à la résolution d'équations de degré au plus deux, ou quatre, ou six, ou huit et ainsi de suite.

Cette proposition apparaît peu lisible au départ ; mais si elle a été parfois éclairée par les commentateurs, ce fut souvent de manière incomplète, suivant en cela Descartes dans sa justification rapide [56] des pages 313 des *Essais* et 385 de AT VI. Voici une démonstration du cas particulier de cinq droites non toutes parallèles.

En choisissant comme première droite l'axe des abscisses, comme il l'a fait pour quatre droites, il obtient l'égalité $D_1D_2D_3 = k\,D_4D_5$ où l'un des facteurs D_i est y. Si par exemple D_1, ou plus exactement $\Delta_1(x, y)$ vaut y, cette relation peut encore s'écrire

$$y\,P(x, y) = Q(x, y)$$

avec P et Q polynômes de degrés deux en (x, y). Fixant arbitrairement y, on se retrouve alors devant une équation en x de degré deux au plus, pouvant être résolue à la règle et au compas par les méthodes du début du Livre Premier, ce qui donne une construction point par point de la courbe [57].

Mais il peut se faire, comme dans l'exemple suivant

$$(y - x)\,(y - 2x)\,(y - 3x) = k\,y\,(x + y)$$

(soit $6x^3 - 11x^2y + 6xy^2 - y^3 + k\,xy + k\,y^2 = 0$) que le facteur y figure au second membre et non au premier. Alors l'équation en x est du troisième degré, et règle et compas ne suffisent plus.

56. Trop rapide : voir l'introduction maladroite de sa *Parabole*, où $y = D_5$!

57. Le cas d'exception est celui où ni P ni Q ne dépendent de x ; l'égalité s'écrit alors sous la forme $y\,(y - a)\,(y - b) = h\,(y - c)\,(y - d)$. Elle représente trois droites du type $y = r$ avec r racine d'une équation du troisième degré.

La solution revient alors à un changement de variable [58], dont Descartes ne dit absolument rien. On peut par exemple poser ici $z = y - x$, ce qui conduit à l'égalité

$$z\,(z-x)\,(z-2x) = k\,(z+x)\,(z+2x),$$

soit encore

$$2\,(z-k)\,x^2 - 3\,(z+k)\,zx + z^2(z-k) = 0$$

c'est-à-dire une équation du second degré, au plus, en x.

Assez curieusement, c'est ce qu'il faudrait faire dans le cas particulier de la Parabole cartésienne, justement citée par Descartes comme exemple de lieu à cinq lignes [59]

$$(y-a)\,(y+a)\,(y-2a) = a\,xy.$$

Si l'on ne voyait pas tout de suite que l'équation en x est alors déjà du premier degré (au lieu du troisième comme cela serait *a priori* possible), la technique exposée ci-dessus consisterait à poser par exemple $y - a = z$ et à obtenir une équation en x de degré deux au plus [60].

Cette façon de faire consiste en réalité à introduire une représentation paramétrique de la courbe sous la forme $x = u(z)$, $y = v(z)$, comme dans le cas des Ovales [61]. Pour neuf lignes, on doit passer par des équations de degré quatre au plus (voir note chapitre 10) ; pour treize lignes il faut passer au degré six ou plus (voir notre chapitre 11). Descartes sait faire cela.

Au delà, il faudrait que la machinerie cartésienne de résolution graphique puisse atteindre des degrés supérieurs : ce ne sera malheureusement pas le cas comme nous le verrons à la fin de ce travail.

Un concept flou : construire une courbe point par point

Il faut noter ici ce qui est sans doute une incohérence du texte de *La Géométrie* : nous venons de constater que, pour Descartes, une construction

58. Donc à un changement d'axes, mais où le nouvel axe des abscisses est néanmoins parallèle à l'une des droites de base D_i.

59. Pages 337 des *Essais* et 408 de AT VI.

60. En fait égal à un bien sûr. Noter que, pages 326 des *Essais* et 399 de AT VI, c'est une équation en y qu'il résout : inadvertance ? problème de datation ?

61. Appliquée à des coordonnées bipolaires et non cartésiennes usuelles il est vrai.

point par point d'une courbe peut être légitimement définie par la résolution d'une infinité d'équations en x lorsque y prend une valeur arbitraire.

Mais alors le problème fondamental du Traité, à savoir résoudre graphiquement les équations de la forme $P(x) = 0$ où P est un polynôme, aurait une solution extrêmement simple [62] : construire par les moyens du début du Livre Premier la courbe d'équation $y = P(x)$ en se donnant toutes les valeurs possibles de x, puis la couper par la droite $y = 0$.

Nous tenterons de donner, dans le douzième chapitre, quelques pistes pour essayer de comprendre pourquoi Descartes n'a pas voulu remplacer tout son Livre Troisième - hors équations - par cette simple remarque, par exemple en suggérant que Descartes avait besoin, pour construire une courbe, de savoir en déterminer tous les points d'intersection avec une droite donnée, et non simplement une parallèle à l'un des deux axes : mais les pages que nous venons de lire semblent aller contre cette tentative d'explication.

Comment résoudre le Problème de Pappus I ?

Reprenons la *Réponse à la question de Pappus* [63]. D'avoir été capable de régler définitivement [64] ce Problème le rendit très fier : sa *Correspondance* le prouve abondamment, alors que nous n'avons pas de document direct où il se réjouit d'avoir inventé les coordonnées. Nous venons de voir qu'il se flatte dès le départ d'avoir rempli la mission de satisfaire à la *demande* [d']*un point, duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites* [...] en ramenant la construction de la courbe à la résolution de certaines équations algébriques, que le contenu du reste du Traité [65] rend possible, au moins à ses yeux.

Un logicien d'aujourd'hui dirait sans doute que le simple fait d'avoir posé une définition du genre $D_1 D_2 \dots D_n = k\, D_{n+1} D_{n+2} \dots$ suffit pour mettre au monde un objet mathématique appelé « courbe ». Mais les pragmatiques du passé (grecs et contemporains de Descartes) ne pouvaient s'en passer : il leur

62. C'est d'ailleurs ce que font les lycéens actuels à l'aide de calculettes graphiques programmables pour savoir combien une équation algébrique a de racines et en connaître des valeurs approchées.
63. Pages 309 des *Essais* et 382 de AT VI.
64. Du moins le croyait-il.
65. Cela concerne aussi bien le début du Livre Premier que la fin du Troisième.

fallait plus d'une propriété caractéristique, et *La Géométrie* en fournissait une seconde, en expliquant comment le *tracer*, ce qui le faisait passer du statut d'*objet abstrait* à celui de *forme visible*.

Par exemple les Coniques, prototypes absolus, peuvent être définies comme sections planes d'un cône, ou par des équations bipolaires, ou par des constructions à la règle et au compas, ou par l'introduction d'une directrice *etc.* Les lieux à N lignes ont maintenant une vie, puisque l'on sait sur eux d'autres choses, non évidentes, que leur définition historique.

Outre cette possibilité de rendre ainsi presque aptes au toucher ces lignes, Descartes savait très bien qu'il les avait aussi dotées, grâce à son concept de coordonnées, d'une autre vie concrète matérialisée par au moins une équation de la forme $F(x, y) = 0$. Nous disposons maintenant de trois visages pour chacune d'elle, et donc de trois points de départ pour son étude

• sa définition de Pappus,

• la possibilité de sa concrétisation visuelle, c'est-à-dire sa construction point par point (modulo la capacité de résolution d'équations du type $P(x) = 0$),

• son équation $F(x, y) = 0$ où F peut être arbitraire.

Cela nous paraît effectivement suffisamment riche pour pouvoir justifier l'affirmation orgueilleuse de Descartes. Mais il y a plus : pour un moderne, la vraie réponse à la question de Pappus va encore nettement au delà, même s'il n'est pas du tout certain que Descartes ait complètement assumé la portée de sa construction. Dans la mesure où il était persuadé que toute courbe définie par une égalité $F(x, y) = 0$ admettait une version pappienne, les résultats de ses efforts conduisaient directement à l'invention d'une infinité de nouvelles courbes, et même de toutes les courbes possibles qu'il pouvait recevoir en géométrie. En d'autres termes, Descartes **tranchait ainsi un nœud gordien** : alors que certains se demandaient « mais que sont les lignes définies par Pappus ? », il répondait que cette définition même disaient ce qu'elles étaient, puisqu'on était capables, grâce aux coordonnées, de travailler sur elles et d'en déduire toutes leurs propriétés par des calculs algébriques hors de toute manipulation sensible fondée sur l'axiomatique euclidienne. Ainsi retournait-il la question, en disant aux Grecs que, certes, il ne pouvait pas reconnaître en chacune d'elles un membre d'une liste connue (d'ailleurs très courte), mais au contraire qu'il fallait considérer que Pappus I était suffisant à leur donner vie et légitimité, ou - ce qui était équivalent pour lui - qu'une égalité $F(x, y) = 0$ jouait le même rôle. Au passage, il constituait ainsi un stock infini de courbes toutes nouvelles, dans lequel il entendait librement puiser pour satisfaire à son projet de résolution des équations algébriques.

Dans la dernière partie de la *Réponse*, pages 308 des *Essais* et 381 de AT VI, il énonce aussi qu'il a également résolu ce que nous avons appelé le Problème de Pappus II, comme nous le verrons dans l'étude du Livre Second (page 237). Ce passage, avec la fin du Livre Troisième, constituait certainement pour Descartes l'acmé de son œuvre. Même si nous savons aujourd'hui que son optimisme était malheureusement exagéré, même si nous savons que l'essentiel de son apport était ailleurs, il nous est difficile de cacher notre admiration pour la puissance et l'originalité hors de pair de sa démarche.

Quelques équations « à la Pappus » de courbes simples

Descartes ne donne comme application du problème de Pappus que deux exemples. L'un, fondamental, constitue une partie importante du Livre Second : *toute solution du Problème à quatre droites est une Conique* ; l'autre - également présentée dans ce Livre - concerne sa Parabole Cartésienne (ou cubique), ou Conchoïde Cartésienne, ou Trident (nom donné par Newton), solution d'un problème à cinq droites, nécessaire à sa technique du Livre Troisième de résolution des équations de degré cinq ou six.

Il ne dit pas que deux courbes bien connues, une Conchoïde de Nicomède, Quartique présente dans *La Géométrie*, et son Folium, Cubique présente dans sa *Correspondance*, sont assez faciles à mettre sous cette forme comme nous le montrons ci-dessous [66].

Il ne dit pas non plus si ses Ovales, Quartiques constituant l'objet de toute la fin du Livre Second, admettent une équation à la Pappus. Mais il en était persuadé, puisque, d'après ses propos mêmes, toute courbe géométrique [67] est pappienne : nous sommes aujourd'hui pratiquement unanimes à en douter.

66. Il évoque aussi très brièvement la Cissoïde de Dioclès, inventée au deuxième siècle avant Jésus-Christ pour dupliquer le cube, d'équation $x\,(x^2 + y^2) = ax^2$, évidemment lieu à cinq droites dont deux doubles sous la forme $(a - x)\,x^2 = x\,y^2$.

67. Algébrique.

Nous présentons ci-dessous un assez grand nombre d'équations à la Pappus, généralement peu connues ou même inédites, montrant en particulier que toute Conique réelle admet une telle équation, y compris quand elle est décomposée en deux droites (sécantes, parallèles ou même confondues en une seule, alors double). Les cas d'une Conchoïde et du Folium y sont naturellement aussi traités.

Le cas de la Cubique générique, qui est effectivement pappienne, est renvoyé à notre Annexe II, en raison de sa relative complexité. Disons simplement ici qu'il est conséquence du *Théorème du neuvième point* : si (A, C, E) et (B, D, F) sont deux triplets de points alignés d'une cubique [68], si les trois droites (AB, CD, EF) recoupent respectivement la Cubique en les points (G, K, H), alors ces trois derniers points sont alignés.

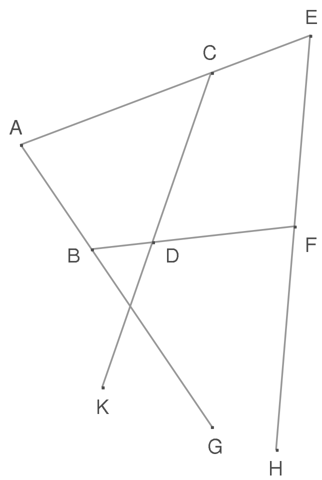


FIGURE 3.14 – *Le théorème du neuvième point*

Il en résulte notamment un algorithme très simple à appliquer [69], conduisant à une écriture sous forme de lieu de Pappus à *six droites dont une double* pour une Cubique générique Γ : considérant trois points (I, J, K) alignés sur Γ, puis les trois points (A, B, C), autres intersections de Γ d'avec les tangentes

68. Voir l'Annexe II pour une définition précise de cette notion intuitive.
69. Au départ inspiré par la solution de Fermat au problème du lieu spécial à trois droites (voir page 124).

respectives à I, J et K, on constate que (A, B, C) sont alignés[70]. Posant $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = 0$ trois équations des tangentes respectives à Γ en I, J et K, $D = 0$ et $T = 0$ des équations des droites IJK et ABC, il existe un coefficient λ tel que

$$X \cdot Y \cdot Z = \lambda T \cdot D^2$$

soit une équation à la Pappus[71] de Γ.

On trouve ainsi $xy\,(n - x - y) = (y + x)\,(y - x)^2$ pour le Folium[72] défini par $x^3 + y^3 = n\,xy$. Voici également une autre application, sans point double, à la Cubique très banale[73] d'équation $y = x^3$

$$(y - 3x + 2)\,y\,(y - 3x - 2) = (y - 4x)\,(y - x)^2.$$

Bien que le résultat semble plutôt simple, le découvrir - ou l'un de ses homologues - demande cependant quelques efforts.

Voici enfin la figure d'une Cubique plus « ordinaire » d'équations

$$x^3 + 4x^2y + 2xy^2 + y^3 - 4x^2 - 11xy + 4y^2 + 5x + 5y - 2 = 0$$

$$yx\,(y - x + 3) = (x + y - 2)\,(x + y - 1)^2$$

pour laquelle $(O; I, J)$ est le repère cartésien usuel.

70. Cela résulte du théorème du neuvième point en substituant $(I, I, J, J, K, K, A, C, B)$ à $(A, B, C, D, E, F, G, H, K)$. À noter que, pour un calcul effectif, le calcul des coordonnées du point C peut être inutile.

71. Le nombre λ peut être déterminé, soit par identification à une équation de Γ, soit en écrivant que cette Cubique passe par un point de cette courbe autre que les six déjà connus A, B, C, I, J et K.

72. Prendre pour I et J le point double O, et pour K le sommet de la courbe, de coordonnées égales à $n/2$.

73. Prendre pour I et J les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(0, 0)$, les autres s'en déduisant aussitôt. Une autre solution de ce cas intéressant sera donnée en fin d'Annexe II, page 151.

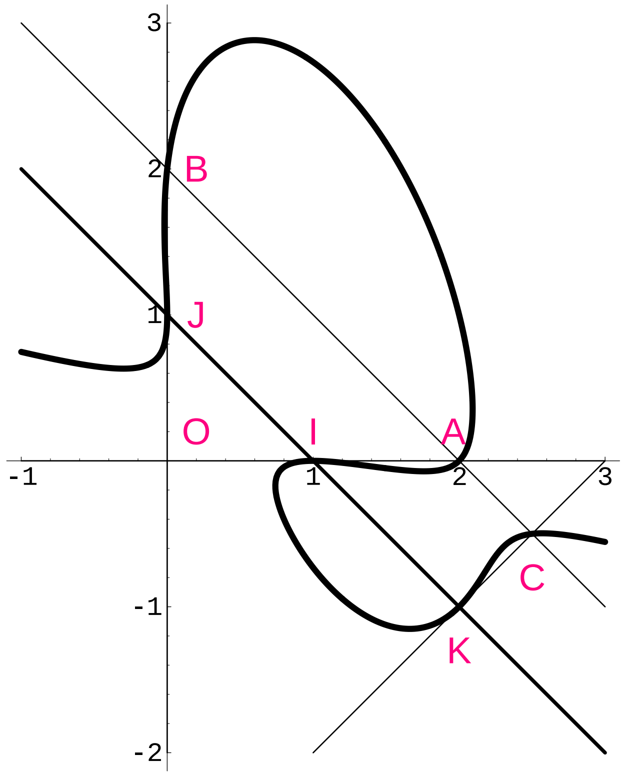


FIGURE 3.15 – *Un lieu à six droites dont une double (IJ)*

Sur la figure, on voit parfaitement la construction de l'équation. Au départ, les points I et J sont sélectionnés : comme les points de coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$ appartiennent à la courbe [74], il suffit de déterminer leurs tangentes, d'équations respectives $y=0$ et $x=0$, et de rechercher les points A et B, de coordonnées respectives $(2,0)$ et $(0,2)$. Le reste est alors presque automatique : le point K où IJ recoupe la courbe a pour coordonnées $(2,-1)$, sa tangente d'équation $y=x-3$ recoupe la courbe au point C de coordonnées $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$, d'ailleurs aligné avec A et B comme annoncé. La fin est triviale : comme des équations de IJ et AB sont clairement respectivement $y=1-x$ et $y=2-x$, la détermination de l'équation de Pappus résulte d'un réglage facile entre $yx\,(y-x+3)$ et $(x+y-2)\,(x+y-1)^2$ pour terminer le travail.

74. On les trouve facilement en la coupant par les axes de coordonnées.

Quelques exemples

Voici des calculs, parfois élégants, issus du problème de Pappus. Chacun peut se livrer à une course aux équations pappiennes.

a) *La Parabole Cartésienne*

Pour mémoire : rappelons ici le cas particulier de l'importante Parabole Cartésienne, Cubique de Pappus à cinq droites [75], tel qu'il sera présenté au Livre Second (pp. 336-8 des *Essais*, 408-10 de AT VI)

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 - a\,xy = (2a - y)\,(a - y)\,(y + a) - a\,xy.$$

b) *Les Coniques*

Que toute Conique générique non décomposée est de Pappus est trivial, en particulier si l'on en connaît un point, pris comme origine des axes, ce qui donne une équation de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2 = px + qy$ avec $(p, q) \neq (0, 0)$, soit encore

$$\boxed{x\,(ax + by - p) = y\,(q - bx - cy)}\,.$$

Si l'on n'a pas $a = b = 0$ ou $b = c = 0$, par exemple si $b \neq 0$, c'est donc une réciproque partielle du travail de Descartes au Livre Second, déjà évoqué, où il montre que tout lieu à quatre droites est une Conique [76]. Ce résultat peut s'étendre aux coniques décomposées comme le montre le tableau ci-dessous, où l'on trouvera aussi d'autres formes pappiennes parfois assez surprenantes

75. Ou Conchoïde Cartésienne, Trident de Newton *etc*, courbe parfaitement oubliée de nos jours, mais pivot essentiel d'une construction du Livre Troisième.

76. Si $b = p = 0$, ou $b = q = 0$, on trouve un lieu (spécial) à trois droites. Les cas $a = p = 0$ ou $c = q = 0$ sont contradictoires avec la non-décomposabilité de la Conique. Que Descartes se soit posé la question de cette réciproque est bien vraisemblable. Que répondre à ce petit problème soit très facile, et évidemment à sa portée, est encore plus clair. Qu'il ait refusé de placer quelques lignes sur ce sujet dans son livre correspond simplement à sa volonté de ne pas tout dire !

Équation	n	Formes de Pappus	Validité
	4	$(y+ax)\,(y-ax) = x\,(2p-(q^2+1)\,x)$	$a=\sqrt{q^2+q+1}$
$y^2 = 2px + qx^2$	$3'$	$x\,(2p+qx) = y^2$	
$(pq \neq 0)$	3	$(y+x\sqrt{q})\,(y-x\sqrt{q}) = 2px$	$q>0$
	3	Impossible	$q<0$
	4	$(y+x)\,(y-x) = x\,(2p-x)$	
$y^2 = 2px$	$3'$	$(2x+2y+p)\,(2x-2y+p) = (2x-p)^2$	
$(p \neq 0)$	3	$(y+p)\,(y-p) = p\,(2x-p)$	
	4	$(2y+1)\,(2y-1) = (y+1)\,(y-1)$	
$y^2 = 0$	$3'$	$(x+y)\,(x-y) = x^2$	
	3	$(y+1)\,(y+2) = 3y+2$	
	4	$(x+k)\,(1-y) = (x-k)\,(y+1)$	
$xy = k$	$3'$	$(x+\varepsilon y+2\sqrt{\lvert k\rvert})\,(x+\varepsilon y-2\sqrt{\lvert k\rvert}) = (x-\varepsilon y)^2$	$k=\varepsilon\,\lvert k\rvert$
$(k \neq 0)$	3	$(x+k)\,(y-1) = ky-x$	
	4	$(x+y+1)\,(x+y-1) = (x-y+1)\,(x-y-1)$	
$xy = 0$	$3'$	$(2x+y)\,(x+2y) = 2\,(x+y)^2$	
	3	$(x+1)\,(y-1) = y-x-1$	
	4	$(y+1)\,(y-1) = (x+1)\,(x-1)$	
$y^2 = x^2$	$3'$	$(2y+x)\,(2y-x) = 3y^2$	
	3	$(y+x+1)\,(y-x+1) = 2y+1$	
	4	$(x+y)\,(x-y) = (x-h)\,(x+h)$	
$y^2 = h^2$	$3'$	$(2y+h)\,(2y-h) = 3y^2$	
$(h \neq 0)$	3	$y\,(y+2h) = h\,(2y+h)$	
	4	$(x+y+2)\,(x+y-2) = 2xy$	
$x^2+y^2 = 4$	$3'$	$(2+x)\,(2-x) = y^2$	
	3	Impossible	
	8	$(x^2-1)\,(y^2-1) = (x^2-3)\,(y^2-3)$	

Les dernières lignes sont étonnantes : voilà un Cercle (facilement généralisable !), certes solution de problèmes de Pappus à quatre et trois droites, mais aussi d'un autre à huit droites deux à deux distinctes [77]. En tant qu'ellipse, il n'admet pas de solutions strictes à trois droites.

c) *Le Galand (ou Folium de Descartes)*
Cette Cubique à point double réel présente dans la *Correspondance*, avec Fermat et Roberval, a pour équation classique $x^3 + y^3 - n\,xy = 0$, et pour équations pappiennes (parmi d'autres)

$$xy\,(n - x - y) = (x + y)\,(x - y)^2 \qquad \text{(six droites dont une double)}$$

$$xy\,(3(x + y) + n) = (x + y)^3 \qquad \text{(six droites dont une triple)}$$

$$(n{-}x{-}y)\,(x{+}y)^2 = (3(x{+}y){+}n)\,(x{-}y)^2 \qquad \text{(six droites dont deux doubles)}$$

et sans doute la plus élégante

$$\boxed{(x + y)\,(x + 2y)\,(2x + y) = xy\,(7(x + y) + 2n)} \qquad \text{(six droites).}$$

d) *Cubique indécomposable à point double*
Ce point peut être à tangentes réelles distinctes, confondues, ou imaginaires conjuguées (point double isolé). Une équation générale peut se mettre sous la forme $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 - Ex^2 - Fy^2 = 0$, d'où

$$\boxed{x^2(Ax + By + E) = y^2(F - Cx - Dy)} \text{ (six droites dont deux doubles).}$$

Dans le cas particulier des tangentes réelles distinctes, on peut changer légèrement en prenant $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 - Gxy = 0$ (avec nécessairement $AD \neq 0$). La substitution $y \leftarrow y\sqrt[3]{\dfrac{A}{D}}$ donne $x^3 + bx^2y + cxy^2 + y^3 = g\,xy$, d'où

$$\boxed{(x + y)\,(x + 2y)\,(2x + y) = xy\,\big((7 - 2b)\,x + (7 - 2c)\,y + 2g\big)}$$

(six droites).

77. La toute dernière vient de Henk Bos (pages 333-4 de son article *On the Representations of Curves in Descartes' Géométrie*), montrant que le degré d'un lieu à $2n$ droites peut être égal à $n/2$. Mais en fait l'équation représente *la réunion du Cercle et de la droite de l'infini comptée deux fois*, Quartique décomposable invisiblement plus riche que le Cercle.

e) Un exemple de *courbe elliptique*[78], dont voici deux équations pappiennes

$$\boxed{y\,(y+1) = 9x^3} \qquad \text{(cinq droites dont une triple)}$$

$$\boxed{y\,(2y-9x+2)\,(9x+2) = 9x\,(y-4x)\,(2y-x)} \qquad \text{(six droites)}\,.$$

f) *Une Conchoïde de Nicomède*
Il s'agit d'une Quartique d'équation

$$(x^2+y^2)(x-b)^2 = a^2x^2.$$

Elle figure dans Pappus[79] et dans *La Géométrie*[80]. Elle possède une équation polaire extrêmement simple

$$\rho = a + \frac{b}{\cos\theta}\,\cdot$$

C'était donc l'une des rares courbes connues des Grecs, et personne ne semble s'être alors aperçu qu'elle fournissait[81] une réponse au problème de Pappus I, alors que la détermination de l'une de ses équations pappiennes était facile à déterminer

$$\boxed{y^2(x-b)^2 = x^2(a+b-x)\,(a-b+x)} \ \text{(huit droites dont trois doubles)}\,.$$

g) *Les Ovales de Descartes*
Cette énumération se termine sur une énigme concernant des Quartiques qui occupent toute la fin du Livre Second. Sont-elles ou non des courbes de Pappus ? Nul ne le sait encore, même si l'on peut penser qu'il est vraisemblable qu'elles ne le soient pas. Cela a-t-il posé problème à leur découvreur ? On l'ignore également. En tout cas voici leur équation cartésienne, dont la complexité montre qu'il est difficile d'imaginer huit droites qui jouent un rôle particulier par rapport à ces courbes complexes

$$\boxed{\begin{array}{c}(1-h^2)^2(x^2+y^2)^2 + 4h^2(1-h^2)\,cx(x^2+y^2) + 2c^2\big(2h^4x^2 + (h^4-h^2k^2\\ -h^2-k^2)\,(x^2+y^2)\big) + 4h^2(k^2-h^2)\,c^3x + (k^2-h^2)^2c^4 = 0.\end{array}}$$

78. L'une des Cubiques - en dépit de son nom - dont l'étude a été très fructueuse depuis la fin du dix-neuvième siècle, dont l'équation peut se ramener à l'une des formes générales $y^2 = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)$ ou $y^2 = (x-a)\,(x^2+px+q)$ avec $p^2 < 4q$.

79. Livre III (VIII), pages 42-44 et Livre IV (XXVIII), Proposition 24, pages 185-190 du volume premier de la traduction de Paul Ver Eecke.

80. Page 351 des *Essais* et 423 de AT VI.

81. Comme la *Cissoïde de Dioclès* $y^2(2a-x) = x^3$.

Le lieu spécial à trois lignes chez Fermat

Descartes ne fut pas le seul à avoir réglé le Problème de Pappus II (voir les pages 237 et suivantes dans le chapitre 6 participant à l'examen du Livre Second). Il est incontestable que le sujet mis sur la table par Golius intéressa beaucoup de mathématiciens contemporains et même de la fin du siècle. Voici quelques notes sur ce sujet.

Pour sa part, Roberval trouvait « très difficile » le « lieu solide » dans sa lettre à Fermat du 4 avril 1637 (vol. II, p. 103), puis il affirmera l'avoir résolu le 4 août 1640 (vol. II, p. 201) ; sa solution est perdue, mais *La Géométrie* était déjà publiée depuis trois ans.

D'après Leibniz, Pascal l'aurait fait - peut-être en 1648 - dans le chapitre également disparu *Des proportionnelles* de son *Traité des Coniques*, pour trois et quatre droites, à partir de son hexagramme mystique (*Ad locum solidum*, voir l'article *Traduction française de notes de Leibniz sur les Coniques de Pascal* de Pierre Costabel, pp. 253-68 du numéro 15 3/4 de la *Revue d'histoire des sciences* en 1962 ou pp. 85-101 de *L'œuvre scientifique de Pascal*, ainsi que les éditions pascaliennes de Jean Mesnard, vol. II, pp. 1104 et 1128, Le Guern, vol. I, pp. 133 et 137, voire Chevalier pp. 64-5)[82].

Newton fera de même, d'abord avec une *Composition géométrique* pure un peu analogue à celle de Fermat étudiée ci-dessous (voir d'abord les *Principia*, vol. 1, lemme XIX de la section V du Livre I du texte *Du mouvement des corps*, pp. 90-1 de la traduction de Madame du Châtelet [63-4 de la reprise par Dunod[83]], et surtout Whiteside, vol. 4, pp. 274-335, tout spécialement la Propriété 2 p. 286).

Par la suite, il évoquera également le Problème de Pappus dans le Problème XXIII de son *Arithmétique universelle*, mais cette fois-ci avec les techniques cartésiennes (page 162 du premier volume de sa traduction française).

82. Voir aussi l'allusion méprisante de Descartes dans sa lettre à Mersenne du 25 décembre 1639, AT II p. 627.

83. Avec une numérotation un peu différente des figures.

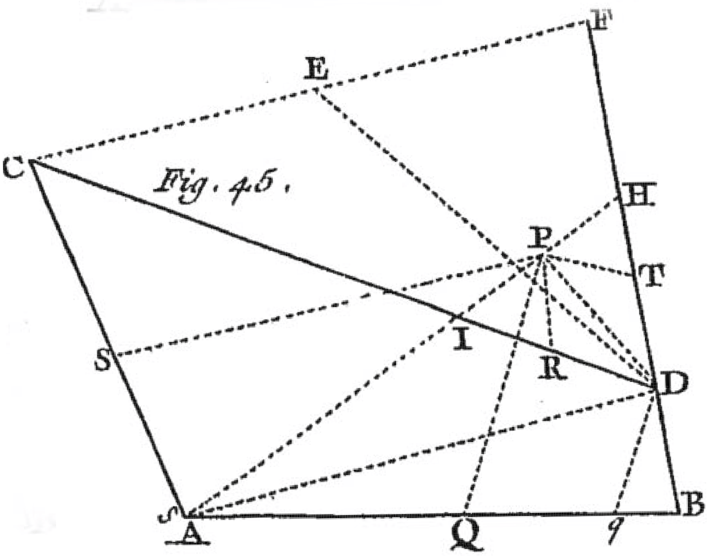


FIGURE 3.16 – *Le lieu à quatre droites dans les* Principia *de Newton*

Bien que Fermat ait co-découvert la géométrie analytique, c'est par des moyens purement géométriques qu'il a pu attaquer Pappus II pour le cas spécial de trois droites, dans sa *Loci ad tres lineas demonstratio* que l'on trouve aux pages 87-9 du volume I de ses *Œuvres* établies par Paul Tannery et Charles Henry [84]. Et son travail est très intéressant, même s'il est critiquable comme nous allons le voir.

Il s'appuie sur un lemme que l'on trouve dans Apollonius sous le nom de Proposition XVI du Livre III, à la page 208 et suivantes de la traduction Ver Eecke [85]. Ce lemme est très lourdement prouvé par Apollonius ; nous

84. Traduit en *Démonstration du lieu à trois droites*, vol. III, pp.83-4. Ce texte a été écrit au plus tard au début de 1637 comme le montre sa lettre du 20 avril à Roberval (vol. II, p. 105) mais ne sera pas publié avant Tannery. On ignore s'il avait pu penser venir à bout du lieu à quatre droites.

Voir aussi Heath sur Apollonius, page 123, pour une idée analogue, basée sur sa Proposition LIV du Livre III (page 274 de l'édition Ver Eecke).

85. Si chez Tannery le texte latin est correct, sa version française comporte un lapsus : il écrit par erreur III 6 au lieu de III 16.

pouvons le faire bien plus rapidement... grâce à Descartes (et Fermat aussi bien sûr) : soient une conique Γ, M l'un de ses points ainsi qu'une direction de droite Δ ; si une corde OP de Γ a pour direction Δ et coupe la tangente en M en un point F, le rapport $\dfrac{FO \cdot FP}{FM^2}$ est alors constant et sa valeur peut être calculée en un point $P = O = U$ où la tangente admet Δ comme direction, du moins s'il existe un tel point.[86]. Prenons en effet M comme origine, et Δ comme direction de l'axe des ordonnées : Γ a une équation du type $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0$, et les extrémités (x, y_1) et (x, y_2) de la corde d'abscisse x vérifient l'égalité $\dfrac{y_1 y_2}{x^2} = \dfrac{a}{c} \cdot$

Venons-en à la tentative de preuve, synthétisée ci-dessous[87]. Fermat se donne les trois droites AM, AB et MB ; un point variable O se projette respectivement sur elles en E, D et I. La parallèle à MB passant par O coupe AM en F et AB en C, la parallèle à AM passant par O coupe MB en N.

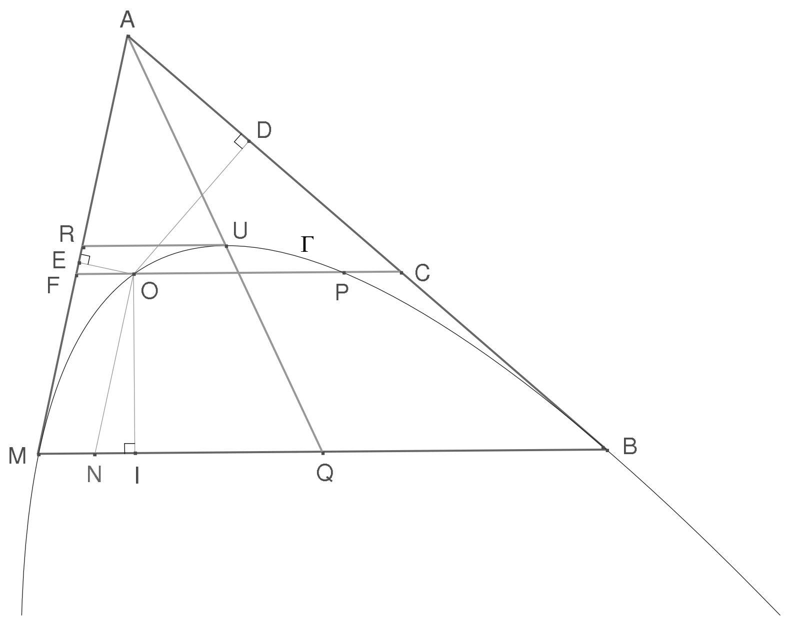


FIGURE 3.17 – *Le lieu spécial à trois droites chez Fermat*

86. Il se peut qu'un tel point n'existe pas pour une Hyperbole : c'est le cas pour celle d'équation $x^2 - y^2 = 1$, le point $M(1, 0)$ et $y = 0$ pour direction de Δ ; le rapport constant est alors égal à -1 puisque le triangle OMP est rectangle en O (qui n'est pas ici l'origine).

87. Avec des projections orthogonales sur la figure, mais c'est sans importance.

Fermat introduit l'unique conique Γ tangente en M à AM, en B à AB et passant par O. Si l'on note Ω le point à l'infini de la droite MB, il est conjugué de A par rapport à Γ puisqu'appartenant à la polaire MB de A ; par suite, la médiane AQ est le diamètre de Γ associé à la direction de MB. Si U est un point commun à Γ et à AQ, sa tangente à Γ est donc parallèle à MB et rencontre AM en R. Enfin la droite FOC recoupe Γ en un point P tel que $FP = OC$, car le milieu X de FC appartient au diamètre AQ.

Par le lemme d'Apollonius, le rapport

$$\left(\frac{RU}{RM}\right)^2 = \frac{FO\cdot FP}{FM^2} = \frac{FO\cdot OC}{FM^2} = \left(\frac{OE\cdot OD}{OI^2}\right)\cdot\frac{FO}{OE}\cdot\frac{OC}{OD}\cdot\left(\frac{OI}{ON}\right)^2\cdot\left(\frac{ON}{FM}\right)^2$$

est constant [88]. Les triangles homothétiques $\begin{bmatrix} RAU \\ MAQ \end{bmatrix}$ et Thalès montrent qu'il en est donc de même de $\dfrac{UA}{UQ} = \dfrac{RA}{RM} = \dfrac{RA}{RU}\cdot\dfrac{RU}{RM} = \dfrac{MA}{MQ}\cdot\dfrac{RU}{RM}$: U est fixe, et Γ aussi qui contient le point variable O (Fermat ne parle pas de la réciproque, mais c'est classique à son époque).

Notons que, dans le texte original, Fermat agit un peu différemment : U y est donné par $\left(\dfrac{RU}{RM}\right)^2 = \dfrac{FO\cdot OC}{FM^2}$ et définit Γ, puis il y est prouvé que cette Conique contient O, ce qui est équivalent mais un peu plus lourd. Le calcul de $\dfrac{UA}{UQ}$ nous appartient donc : il n'est pas dans le texte, Fermat se bornant à écrire

« *Si on partage* AQ *en* U *de telle façon qu'en menant* UR *parallèle à* MB, *le rapport* $\dfrac{\mathrm{UR}^2}{\mathrm{RM}^2}$ *soit égal au donné* $\dfrac{\mathrm{FO}\cdot\mathrm{OC}}{\mathrm{FM}^2}$ *(ce qui est facile, puisque l'angle* MRU *est donné*, ... »

ce qui méritait sans doute une détermination de U plus précise [89].

88. Comme produit de nombres constants quand O varie en vérifiant la condition de Pappus. Par exemple, le cinquième facteur du dernier membre vaut un, et le premier est supposé connu par l'énoncé même du problème.

89. Il est vrai qu'il écrit « *je n'ajoute pas ce qui serait superflu, surtout pour vous* [Carcavi] » (traductions de Paul Tannery).

L'erreur de Fermat

Ce texte est bien connu, très souvent admiré. Toutefois, il est incomplet, et il faudrait une autre preuve, au moins dans certains cas hyperboliques.

La clef se trouve dans notre phrase « Si U est un point commun à Γ et à AQ ». Comme la plupart des mathématiciens, Fermat avait en tête l'image classique d'un diamètre coupant la conique en un point où la tangente est conjuguée de cette droite. Si cela est exact dans le cas des Ellipses (et donc des Cercles), nous avons remarqué plus haut qu'il fallait être plus prudent avec les Hyperboles, qui n'ont pas de tangentes dans toutes les directions.

Voici un contre-exemple simple, celui du lieu spécial à trois droites Γ défini par les égalités

$$(x+4y-4)\,(y+4x+4)-(2y-2x+3)^2=25\,(xy-1)=0.$$

Il s'agit donc d'une Hyperbole équilatère très classique, passant par le point $O\,(1,1)$, avec ses tangentes AM et AB aux points $M\left(2,\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2},-2\right)$, d'équations respectives $x+4y-4=0$ et $y+4x+4=0$ et se coupant en $A\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, et la corde MB d'équation $2y-2x+3=0$. Le milieu Q de MB a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right)$, et la droite AQ, d'équation $y=-x$, est disjointe de Γ : il n'existe donc pas de point U, et le raisonnement de Fermat échoue dans ce cas.

Connaissant O, il est facile d'en déduire les coordonnées des points F, C et P, respectivement égales à $\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{4}{5},-\frac{4}{5}\right)$ et $(-1,-1)$.

Cela dit, il existe pourtant deux points U répondant à la condition

$$\left(\frac{RU}{RM}\right)^2=\frac{FO\cdot OC}{FM^2}=\frac{8}{17}$$

puisque $FO^2=\frac{2}{25}$, $OC^2=\frac{162}{25}$ et $FM^2=\frac{153}{100}\cdot$ Ils doivent en effet vérifier la condition

$$\frac{UA}{UQ}=\frac{MA}{MQ}\cdot\frac{RU}{RM}=\frac{4}{3}$$

puisque $MA^2 = \dfrac{425}{36}$ et $MQ^2 = \dfrac{25}{8}\cdot$ Ces deux points U et U' de la droite AQ, qui n'appartiennent pas à Γ d'équation $xy = 1$, ont pour coordonnées respectives $\left(-\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$ et $(7, -7)$. Ils définissent à leur tour des points R et R' de la droite AM, de coordonnées respectives $\left(\dfrac{4}{7}, \dfrac{6}{7}\right)$ et $(12, -2)$.

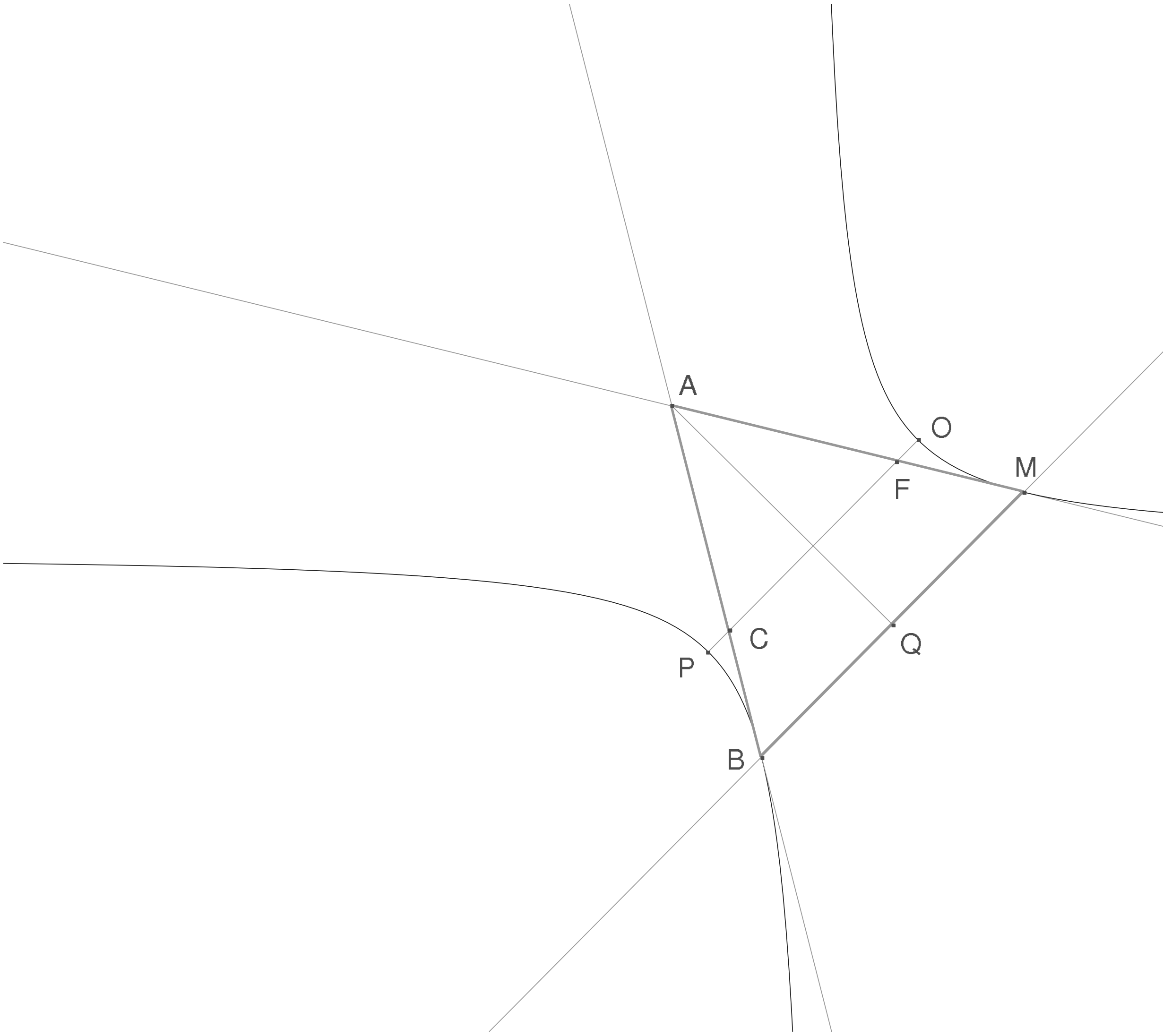


FIGURE 3.18 – *Le contre-exemple de l'Hyperbole d'équation $xy = 1$*

Que sont donc ces points U, tels que Fermat les aurait pu introduire, persuadés qu'ils appartiennent à Γ ?

La solution à cette énigme est finalement assez simple : il s'agit tout simplement des deux sommets de l'*adjointe* de la courbe étudiée, c'est-à-dire l'Ellipse d'équations

$$(x+4y-4)\,(y+4x+4)+(2y-2x+3)^2 = 8x^2+9xy+8y^2-24x+24y-7 = 0,$$

$$y = \frac{-9x - 24 \pm \sqrt{-7x^2+48x+32}}{16}\,.$$

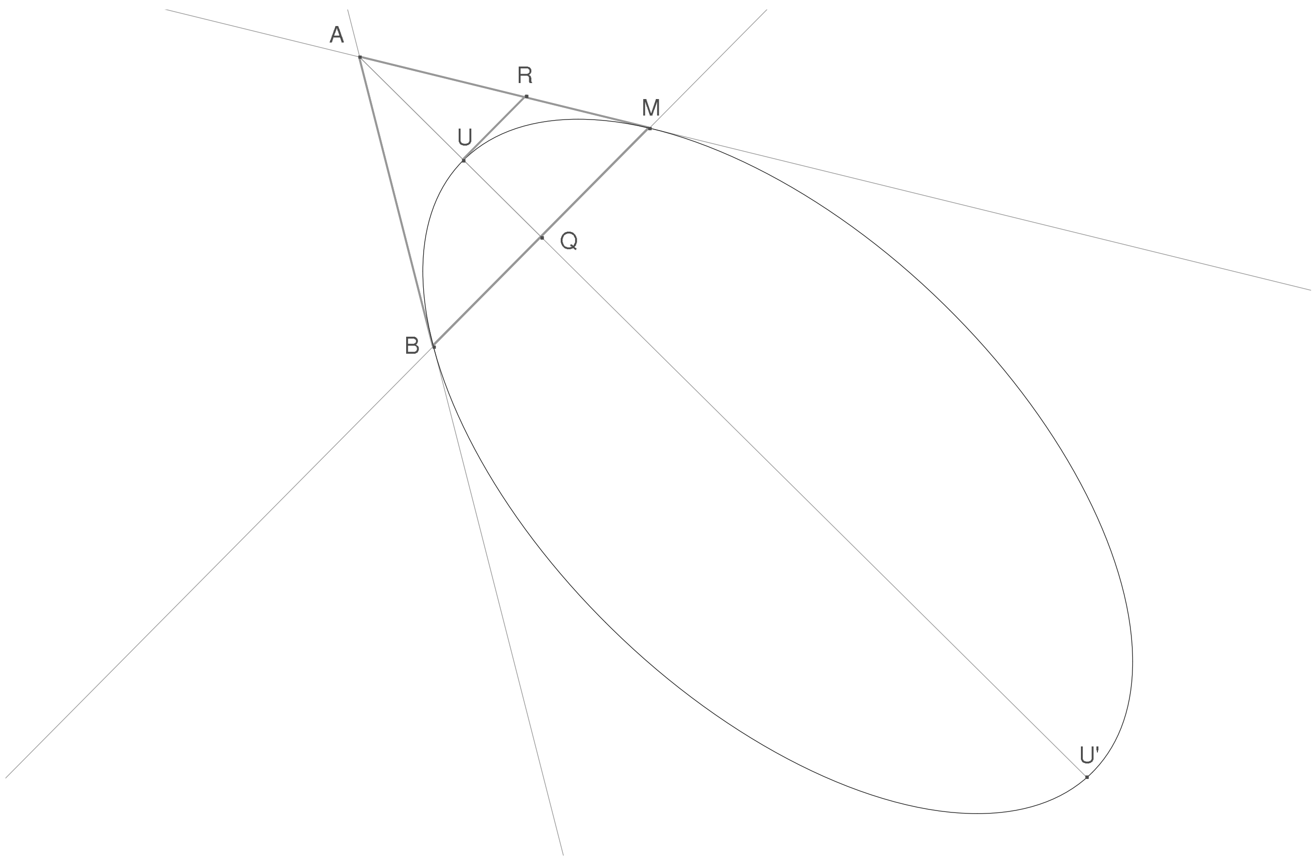


FIGURE 3.19 – *L'Ellipse adjointe de l'Hyperbole d'équation* $xy = 1$

Cette courbe est définie par les points M et B, avec leurs tangentes AM et AB, passant par U et U' (qui sont d'ailleurs ses sommets principaux), et par l'un des points O' de coordonnées $\left(2, -\dfrac{23}{4}\right)$ ou $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{16}\right)\cdot$ La seconde solution du Problème spécial de Pappus à trois lignes ici présentée est donc bien une Conique, et pour elle la démonstration de Fermat fonctionne correctement. Par contre, bien que la première solution (l'Hyperbole d'équation $xy = 1$) soit une Conique également, la technique du *Conseiller De maximis et minimis*[90] n'est ici tout simplement pas applicable[91].

Une propriété des problèmes à quatre lignes

L'erreur de Fermat conduit naturellement à regarder de plus près les caractéristiques des couples de Coniques engendrés par un problème à quatre lignes (dont relève clairement le cas spécial à trois lignes).

La principale propriété de ces couples est facile à découvrir si l'on cherche à déterminer des cas où, comme ci-dessus, l'existence de points U à tangente parallèle à la droite double pose problème. Comme cela ne peut se produire avec une Ellipse ou même une Parabole (à une exception près), on est conduit naturellement à rechercher la nature exacte d'une courbe solution et de son adjointe.

Le résultat est le suivant : *tout couple de solutions d'un problème à quatre lignes contient au moins une Hyperbole.* Voici la preuve, très élémentaire : soit donc une équation

$$\varepsilon\, y\,(ax + by + c) = x\,(ux + vy + w)$$

avec $\varepsilon = \pm 1$. Elle s'écrit encore sous la forme

$$P(x, y) = u\,x^2 + (v - \varepsilon a)\,xy - \varepsilon b\,y^2 + w\,x - \varepsilon c\,y = 0.$$

La nature d'une telle Conique dépend du signe du discriminant de la forme quadratique formée des termes du second degré de P, à savoir

$$\Delta = (v - \varepsilon a)^2 + 4\varepsilon u b^2.$$

90. Voir la lettre à Mersenne de décembre (?) 1637, AT I page 478.

91. Il est regrettable que cette imperfection n'ait, au moins à notre connaissance, jamais été dénoncée.

Sauf si le couple (u, v) est le couples $(0, 0)$, les deux valeurs de Δ vérifient l'égalité

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 2\,(v^2 + u^2) > 0$$

ce qui implique qu'il existe au moins une valeur de ε pour laquelle $\Delta > 0$, c'est-à-dire une solution qui est une Hyperbole.

Nous venons de voir ci-dessus un exemple où coexistaient une Ellipse et une Hyperbole. Peut-on rencontrer des cas avec deux Hyperboles ? C'est clair, comme le montre l'exemple suivant (entre mille)

$$\varepsilon y\,(x + y + 1) = x\,(x + 3y + 2)$$

pour lequel $\Delta = (3 - \varepsilon)^2 + 4\varepsilon = 10 - 2\varepsilon > 0$ pour toute valeur de ε.

De l'impossibilité de se trouver devant deux Ellipses adjointes l'une de l'autre montre que la technique de Fermat ne saurait donner quatre points U, ce qui est bien logique : le contre-exemple ci-dessus est donc très loin d'être unique en son genre. Certes le fait d'être une Hyperbole n'empêche pas nécessairement de posséder un point à tangente parallèle à l'axe des abscisses, mais une telle existence est fortement aléatoire.

Peut-on compléter la preuve de Fermat ?

Avoir relevé une erreur ne suffit pas : il se pourrait en effet que son auteur, s'en étant aperçu, ait mis au point par ailleurs, sur un document qui ne nous serait pas parvenu, une technique complémentaire rendant son travail universel par disjonction de cas : s'il existe un point U, alors . . . ; sinon . . . Bien qu'ayant travaillé cette question de façon lourde, il nous faut avouer un échec complet sur cette ligne. Peut-être quelque mathématicien amoureux de géométrie à l'ancienne pourra-t-il réussir dans cette voie ?

Une autre recherche s'impose alors qui permettrait de sortir du cul-de-sac relevé ici : est-il possible de reconstituer une solution à la Fermat pour le problème général à quatre lignes ? Nous ignorons s'il a essayé une méthode analogue pour lui. Mais nous n'avons aucune trace qui permette d'envisager une telle reconstitution. Clairement, le recours au théorème d'Apollonius cité ne suffit pas. Mais il en existe une généralisation qui pourrait donner une piste (la Proposition suivante d'Apollonius (livre III, Prop. XVII, page 210 de la traduction Ver Eecke, voir page 155), étendant le résultat précédent à un rapport de la forme $\dfrac{FO \cdot FP}{FM \cdot FN}$ où la droite MN remplace la tangente en M). Malheureusement aucune voie ne s'est ouverte dans cette direction, qui demanderait elle aussi des idées totalement nouvelles pour s'ouvrir.

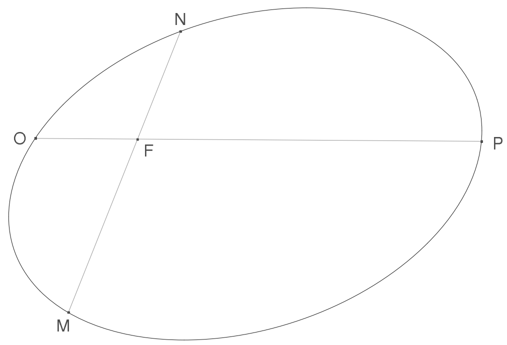


FIGURE 3.20 – *$FO.FP/FM.FN$ ne dépend que des directions de OP et MN*

L'œuvre parallèle de Pierre Fermat

Dans le texte *Ad locos planos et solidos isagoge*[92], écrit en 1636, diffusé en manuscrit dès 1637 - mais après la parution du *Discours* - et publié de manière posthume en 1679, Fermat avait également introduit les coordonnées[93] qu'il utilise de manière un peu différente : par exemple, la notion de courbe d'équation $y = f(x)$, absente de *La Géométrie*, y est fondamentale, ce qui lui a permis une approche de ce qui deviendra notre dérivée.

Ce traité peut donc être considéré, en un certains sens, comme le pendant de *La Géométrie*. Mais même compte tenu de sa circulation manuscrite dès

92. *Introduction aux lieux plans et solides* que l'on peut lire aux pages 91-110 du premier volume de ses *Œuvres complètes* éditées chez Gauthier-Villars et Fils entre 1891 et 1912 par Paul Tannery et Charles Henry. La traduction française, par Tannery, se trouve aux pages 85-101 du troisième volume.

93. Qu'il note A et E, expliquant dans le texte *Sur la solution des problèmes de géométrie par les courbes les plus simples et convenant en particulier à chaque genre de problèmes, dissertation en trois parties*, aux pages 120 et 111 des volumes I et III de ses *Œuvres*, qu'il ≪ *désigne comme Viète les quantités inconnues par des voyelles, car je ne vois pas pourquoi Descartes a fait un changement dans une chose sans importance et qui est de pure convention* ≫ : c'est tout simplement pour nier avoir lu Viète. . .

1637 sa publication bien tardive, montrant d'ailleurs dans sa forme que son éditeur de fils avait lu Descartes, a nui à sa reconnaissance.

Dans un article de septembre 1950 [94] Jean Itard écrit que peu avant avril 1636, Fermat n'était pas encore en possession de sa géométrie analytique. Mais nous savons que l'*Isagoge* était terminé en juillet de cette même année [95], qui est donc celle de sa découverte, moins d'un an avant la publication de *La Géométrie*, dont le contenu était connu de Descartes depuis quelques années. Non seulement il fut le premier à publier sur le sujet mais encore, d'après ce qui précède, il en serait aussi le premier inventeur.

Les figures de Fermat nous paraissent bien plus familières que celles de Descartes : voici par exemple deux d'entre elles, tirées de ce traité, illustrant des hyperboles fort modernes [96]

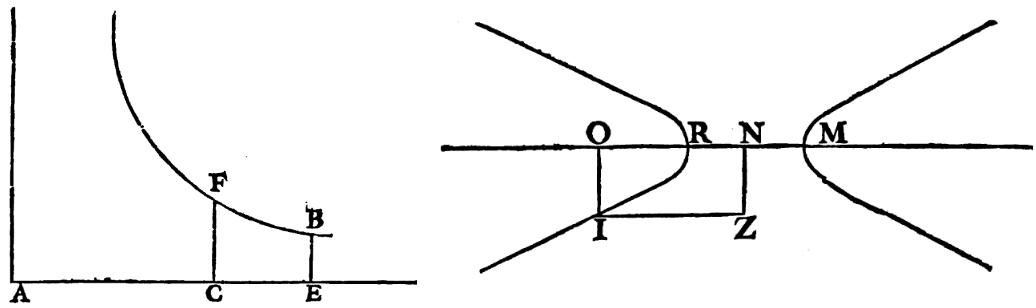


FIGURE 3.21 – *Deux graphes hyperboliques d'après des dessins de Fermat*

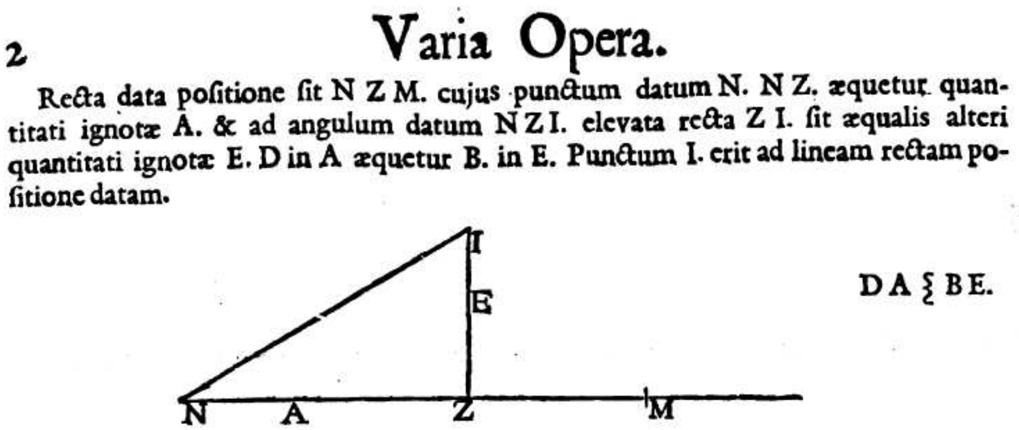
Les paragraphes où il introduit abscisse et ordonnée, dès les toutes premières pages du texte, sont plutôt abscons. Citons-en deux : « *Toutes les fois que dans une équation finale on trouve deux quantités inconnues, on a un lieu, l'extrémité de l'une d'elles décrivant une droite ou une courbe.* [...] *Il est commode, pour établir les équations, de prendre les deux quantités inconnues sous un angle donné, que d'ordinaire nous supposerons droit, et de se donner la position et une extrémité de l'une d'elle* » (trad. Tannery).

94. *Essais d'histoire des mathématiques*, éd. Roshdi Rashed, Albert Blanchard (Paris) 1984, page 208).

95. Itard se base évidemment sur deux lettres à Mersenne du 26 avril et du 15 juillet (*Œuvres*, vol. II, pp. 3 et 30).

96. Comme la suivante, elle sont extraites de ses *Varia Opera Mathematica* publiées à Toulouse par son fils Samuel en 1679.

Suit immédiatement l'exemple d'une droite d'équation $D \cdot A = B \cdot E$ où D et B sont des constantes. Comme chez Descartes, il n'y a pas d'axe des ordonnées, mais seulement une origine N, un axe des abscisses NZ et une direction (celle de ZI, généralement perpendiculaire à l'axe).



2 **Varia Opera.**

Recta data poſitione ſit N Z M. cujus punctum datum N. N Z. æquetur quantitati ignotæ A. & ad angulum datum N Z I. elevata recta Z I. ſit æqualis alteri quantitati ignotæ E. D in A æquetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam poſitione datam.

FIGURE 3.22 – *L'introduction des coordonnées fermatiennes*

Dans ce même *Isagoge* encore[97] Fermat énonce une *très belle proposition*[98] dont il dit qu'elle découle de ce qui précède, un peu analogue au problème de Pappus (et dont la recherche a peut-être joué chez lui le rôle de ce dernier chez Descartes) : tout point dont une combinaison linéaire donnée de distance à certaines droites sous certains angles est donnée décrit une droite

« *Soient, en nombre quelconque, des droites données de position, auxquelles on mène d'un même point des droites sous des angles donnés ; si la somme des produits des droites ainsi menées par des données est égale à une aire donnée, le point d'où on les mène sera sur une droite donnée de position* » (trad. Tannery).

Dans un autre texte du 6 janvier 1643, l'*Isagoge ad locos ad superficiem* envoyé à son ami Pierre de Carcavi[99], il étend ce résultat à l'espace

97. Pages I 93 et III 87.
98. Textuellement *pulcherrima propositio*.
99. *Introduction aux lieux en surface*, pages I 116 et III 107 (texte absent des *Varia Opera Mathematica*).

« *Soient donnés de position des plans en nombre quelconque ; si à ces plans on mène d'un même point, sous des angles donnés, des droites dont la somme soit égale à une droite donnée, ce point sera sur un plan donné de position* » (trad. Tannery).

Les preuves manquent, mais il est vrai qu'elles sont immédiates et reposent sur des techniques tout à fait analogues à celle employée par Descartes page 312 des *Essais* (AT VI 384) pour montrer que $CF = \dfrac{ezy + dek + dex}{zz}$, c'est-à-dire une forme affine [100], où d, e et z sont des constantes par rapport aux variables x et y.

Donnons un exemple plus complexe de sa façon de faire de l'*Isagoge* : en page 5 des *Varia Opera Mathematica*, il pose brutalement

$$B^2 - {}^2D \,\text{in}\, A - A^2 \;\text{ æquale }\; E^2 + {}^2R \,\text{in}\, E,$$

ce que l'on retrouve transcrit dans ses *Œuvres* (I 98) sous la forme à la Viète

$$Bq. - D \,\text{in}\, A \,\text{bis}\; - Aq. \;\text{ æquale }\; Eq. + R \,\text{in}\, E \,\text{bis},$$

et enfin $b^2 - 2da - a^2 = e^2 + 2re$ (III 91), c'est-à-dire $b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2ry$. Il montre alors facilement que cette équation définit un cercle (et oublie au passage la réciproque, d'ailleurs assez lourde compte tenu de la nécessaire positivité des nombres intervenants !). Un peu plus loin [101], Fermat impose sans davantage de préambule l'étude de $\dfrac{b^2 - x^2}{y^2} = \dfrac{p}{q}$, qu'il reconnaît comme l'équation générale des ellipses. Ainsi, au moins dans une version finale, après une analyse constructive et une soigneuse mise au point bien cachées, c'est l'équation qui définit la courbe, à l'inverse de la démarche cartésienne.

C'est dans l'autre *Isagoge* [102] que Fermat va plus loin que Descartes puisqu'il travaille dans l'espace, énonçant par exemple que tout point tel que soit connue la somme des carrés de ses distances à des points donnés décrit une sphère [103]. Son compétiteur n'a en effet que très peu touché à la troisième

100. Expression polynomiale du type $px + qy + r$.
101. Pages respectives 5, I 99 et III 92.
102. Pages I 113 et III 104.
103. Cette propriété, souvent associée au nom de Leibniz, est liée à la notion de centre de gravité, plus tard généralisée en celle de barycentre, introduite seulement au dix-neuvième siècle. Restreinte au plan, elle figure sous le nom de *Propositio V* du *Livre II* de l'*Apollonii Pergæi libri duo de loci planis restituti*, tentative de restitution d'un livre perdu d'Apollonius ; on la trouvera aux pages I 37 et III 34 de ses *Œuvres*.

dimension [104] : nous pensons que l'on peut trouver là un nouvel indice de ce que les coordonnées n'étaient pour Descartes, au moins au départ, qu'un simple outil *plan* pour résoudre graphiquement les équations polynomiales, et non un instrument de conquête du Monde.

Apollonius, Descartes et Fermat

C'est un lieu commun que de dire que Descartes et Fermat ont inventé indépendamment l'un de l'autre la géométrie analytique dans les premières années de la décennie 1630. C'est vrai. Pourtant il est souvent rappelé qu'Apollonius, dans ses *Coniques*, connaissait déjà l'équation cartésienne de l'ellipse [105]. Il écrit en effet, en grec sans formule (comme le fera plus tard Pascal en français), ce que nous pouvons traduire par l'égalité [106]

$$\mathrm{M}\Lambda^2 = \frac{\mathrm{E}\Theta}{\Delta\mathrm{E}} \cdot \mathrm{ME} \cdot \mathrm{M}\Delta = \frac{\mathrm{E}\Theta}{\Delta\mathrm{E}} \cdot \mathrm{ME} \cdot (\Delta\mathrm{E} - \mathrm{ME})$$

c'est-à-dire [107] $y^2 = \dfrac{2p}{d}\, x\,(d - x)$ ou encore $y^2 = 2p\,x - qx^2$ où p, d et q sont des constantes. Par la suite, il fera un usage constant de cette équation et de ses sœurs pour la parabole et l'ellipse. De plus, il est assez proche de nos habitudes en exhibant sur sa figure les deux axes de coordonnées, là où Descartes et Fermat n'en dessinent souvent qu'un.

L'analogie est pourtant trompeuse, et peut être totalement dissipée par la conjonction, péremptoire nous semble-t-il, d'au moins trois constatations simples

a) Apollonius n'a pas choisi de *renommer* ses deux ordonnées, ME et MΛ en les abrégeant par un couple d'usage *universel* analogue à (x, y) (Descartes) ou (A, E) (Fermat) : il reste lié aux notations *locales* du problème qu'il traite. Ce qui paraît être un détail est en fait absolument essentiel, comme on le voit après quelques réflexions.

104. Heureusement qu'il a néanmoins pris x et y comme variables, et non pas y et z ! Cela dit, Fermat lui-même n'est pas totalement à l'aise avec l'espace, puisque dans son énoncé il parle de *points donnés* [...] *dans des plans quelconques*, ce qui est sans intérêt.

105. Voir la Proposition I 13, pages 30 et suivantes de la traduction de Paul Ver Eecke.

106. Voir notre étude sur la *Propositio demonstrata*.

107. Voir par exemple Ivor Thomas, *Great mathematical Works*, vol. II p. 323.

b) Il n'utilise en aucun cas l'algorithme cartésien : parmi les longueurs qui interviennent dans son calcul, il ne pense pas à *en choisir deux auxquelles il reportera toutes les autres, pour aboutir à une équation.*

c) Il se limite, dans ce que nous connaissons de son œuvre, aux seules coniques *et n'utilise pas cet outil pour créer d'autres courbes.*

Ainsi Apollonius n'a-t-il pas inventé la géométrie analytique, pas plus qu'Archimède [108], Oresme [109] ou d'autres [110].

À ce stade, il reste à comparer les travaux de Descartes et de Fermat, maintenant bien reconnus dans leur rôle de créateurs indépendants. Citons ici deux passages fondamentaux du livre cité plus haut en note [111] de Boyer qui reflètent bien l'opinion générale (et, pour l'essentiel, celle de l'auteur)

« *Descartes n'était pas intéressé par les courbes en elles-mêmes. Il déterminait des équations de courbes avec un projet en tête - les utiliser pour construire des problèmes géométriques exprimés par des équations polynomiales en une variable. Pour cette raison il doit considérer en détail la transformation d'équations et leur réductibilité. La* méthode *de Descartes est celle de la géométrie des coordonnées, mais son* but *est à trouver dans la théorie des équations plutôt qu'en géométrie analytique* [...] »

« [...] *alors que la méthode de Fermat était* semblable, *son* objet *était plus proche de la moderne* <géométrie analytique> *que celui de Descartes.* [...] *Fermat proposa plus clairement que Descartes le principe de base selon lequel*

108. Qui utilise par exemple dans la Proposition VII du traité *Des conoïdes et des Sphéroïdes* et les suivantes une égalité de rapports

$$\frac{(a+x)(a-x)}{y^2} = \frac{\mathrm{A\Lambda \cdot \Lambda Z}}{\Gamma\Lambda^2} = \frac{\Theta \mathrm{K}^2}{\mathrm{K}\Gamma^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

équivalente à l'équation au centre de l'ellipse (Thomas, *op. cit.*, p. 323, Ver Eecke, vol. I, p. 159-160).

109. En dépit de son *Tractatus de configurationibus qualitatum et motum* (Traité sur la configuration des qualités et du mouvement).

110. Voir par exemple *History of Analytic geometry* de Carl Benjamin Boyer, Scripta Mathematica (New York) 1956, Dover (New York) 2005. Tout n'y est pourtant pas à prendre à la lettre : par exemple sa critique selon laquelle Apollonius utilise une ordonnée MΛ et deux abscisses ME et MΔ (page 29) est sans grande importance à nos yeux. Le lien d'Archimède avec les équations des coniques y est évoqué pages 31-4.

111. Pages 101 et 102.

une équation à deux inconnues est une expression algébrique des propriétés d'une courbe ; et son travail est consacré à l'élaboration de cette idée. Là où Descartes a suggéré des classes de courbes nouvelles engendrées par des mouvements simples, Fermat introduisit des groupes de courbes donnés par des équations algébriques. [...] *Dans une large mesure on peut dire que* **Descartes partait d'un problème de lieu dont il *déduisait une équation* du lieu, inversement Fermat inclinait à partir d'une équation *dont il déduisait les propriétés de la courbe***. *Descartes se réfère continuellement à la génération des courbes* par un mouvement continu et régulier ; *chez Fermat on trouve plus fréquemment la phrase* Soit une courbe donnée par son équation...[112] *Ce sont les deux aspects inverses du principe fondamental de la géométrie analytique comme on dit que la différentiation et l'intégration sont des aspects inverses du calculus.* [...] *L'un reçoit des courbes en géométrie s'il est possible de trouver leurs équations, l'autre étudie des courbes* définies *par des équations. Au vu de cette distinction, les successeurs des deux hommes virent Descartes comme celui qui déduisait les équations des* <définitions géométriques des> *lieux et Fermat comme l'introducteur des hyperboles, paraboles et spirales généralisées. Cette distinction ne peut, naturellement, être poussée trop loin. C'est essentiellement une matière de préférence relative, car les deux hommes étaient conscients du caractère dual de ces aspects. La géométrie analytique élémentaire est aujourd'hui généralement enseignée en quatre parties concernant les coordonnées cartésiennes planes : l'établissement de formules concernant les points, les droites, les angles et les aires, avec leurs applications à des problèmes et des théorèmes ; les tracés de courbes ; les déterminations d'équations de lieux ; et l'étude des propriétés de courbes, spécialement celles d'équations linéaires et quadratiques. De ces domaines Descartes mit l'accent sur le troisième et considéra brièvement certains aspects du dernier ; Fermat mit l'accent sur le dernier et résolut quelques problèmes reliés au troisième.* »

Ces lignes mériteraient une longue analyse en un autre texte que celui-ci[113]. Citons cependant, pour sourire, une conférence de janvier 1986 des-

112. La référence et la citation données par Boyer sont insuffisamment précises. Il vise le texte *De æquationum localium transmutations et emendations*, I pp. 255-285 (*Sur la transformation et la simplification des équations de lieu*, III pp. 216-37), avec à la page I 217/III 256 (parmi d'autres) les mots suivants « *Soit par exemple l'hyperbole dont la propriété est définie par l'égalité...* »

113. Par exemple, laisser entendre que Fermat, à la différence de Descartes, était le seul à

tinée aux professeurs de lycée, prononcée par un bon universitaire (Georges Glaeser) enthousiaste des mathématiques « modernes » dans les années 1970 où, résumant plutôt maladroitement le texte de Boyer, il disait brutalement **que Fermat interprétait l'algèbre par la géométrie** et **que Descartes résolvait des problèmes géométriques par l'algèbre** [114].

Pour en finir, on ne peut laisser ici sous silence deux autres divergences essentielles entre Descartes et Fermat, non évoquées par Boyer. Tout d'abord, notre chapitre sur les normales chez Descartes montrera bien que, sur ce sujet à la marge de la géométrie analytique (voire inclus en elle), les deux mathématiciens ont eu des comportements radicalement différents : le premier, sans aucun doute poussé par sa technique de section de courbes géométriques par des cercles, se basera sur le concept de racine multiple (par ailleurs bien adapté à ses travaux sur la théorie des équations), alors que le second - bien qu'algébriste jusqu'au bout des doigts - posera les premières pierres de la notion de dérivée, trente ans avant Newton [115]. Enfin, si les deux compères ont manipulé avec la même dextérité notre calcul algébrique littéral moderne [116], Descartes l'emporte de beaucoup sur Fermat par deux traits :

---

privilégier la définition d'une courbe par une équation, est à fortement nuancer : c'est vrai pour *La Géométrie*, mais la *Correspondance* nous fournit un contre-exemple indiscutable : le Galand (le Folium) est introduit par ces mots « la propriété de cette courbe est telle que, menant FG à angles droits sur AH, l'agrégat des cubes de FG et AG est égal au parallélépipède des mêmes FG et AG, et d'une autre ligne donnée qui est double d'AH. Et je fais AG = x, GF = y » (À Mersenne, 18 ? janvier et 23 août 1638, AT I p. 490 et II, p. 313). Même s'il n'y a pas ici de formule explicite ($x^3 + y^3 = nxy$), il est difficile de ne pas voir que cette courbe a en fait été engendrée par son équation choisie avec soin et non définie par une propriété géométrique simple comme une solution de Pappus par exemple [ce serait d'ailleurs possible : voir page 119], mais il n'en fait pas mention). Dans un autre sens, il tire bien du néant ses Ovales en recourant à deux « coordonnées », mais de nature tout autre, et ne cherche pas à exhiber d'équation cartésienne de ces courbes : l'étude de Boyer, globalement satisfaisante, reste donc à affiner avec un très grand soin.

114. *Comment l'histoire de la géométrie analytique peut aider les professeurs dans leur enseignement* (sic), publiée dans le numéro 44 de l'*Ouvert*, publication de l'IREM (Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques) de Strasbourg. On y lit que *l'histoire-fiction qui se réduit à « Descartes (1637) » est un obstacle au progrès* (sic). Il va de soi que ces propositions bien abruptes n'ont pas dû être très utiles à leurs destinataires !

115. On pourra comparer les deux articles *Fermat précurseur du calcul différentiel* de Jean Itard, pp. 235-56, dans ses *Essais d'histoire des mathématiques* et *Fermat et la naissance de l'analyse moderne* de l'auteur, pp. 235-60, dans *La biografia intellectuale di René Descartes attraverso la* Correspondance, moins enclin à un Fermat analyste.

116. Basé sur les quatre opérations, l'extraction de racines carrées et quelques outils

d'une part il a introduit, comme on le sait, une notation bien supérieure à celle de Viète [117], mais aussi il a passé beaucoup de temps à bâtir en parallèle un autre calcul, que l'on pourrait qualifier de mécanique [118]. Cela était si important à ses yeux que, comme nous allons le voir, il n'est peut-être pas exclu que cela l'ait conduit à son invention des coordonnées.

Coordonnées cartésiennes et multiplications

- Rappelons la technique cartésienne de repérage d'un point C

$$\begin{cases} \text{Calculer } y = BC \text{ où } B \text{ est la projection de } C \text{ sur } D \text{ parallèlement à } \Delta. \\ \text{Calculer } x = AB \text{ où } A \text{ est un point fixe de } D. \end{cases}$$

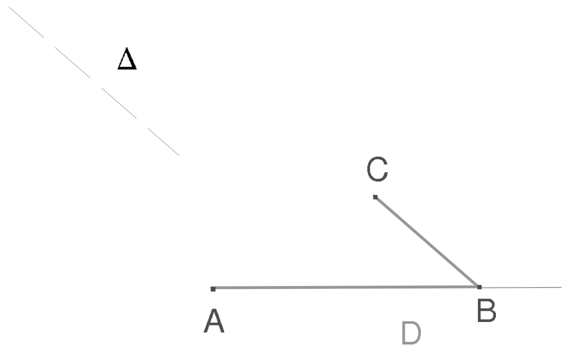


FIGURE 3.23 – *Les coordonnées chez Descartes*

- Rappelons la construction du produit $BE = BC \cdot DB$ (si $AB = 1$)

comme les identités remarquables.

117. Il s'agit là d'un apport de *la Géométrie* qui ne pourrait être surestimé ; cela débute en page 299 des *Essais* (371 de AT VI) avec l'écriture de a^3. Sur ce thème, nous renvoyons aux travaux décisifs de Michel Serfati, sa thèse *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique* (Pétra 2005), et l'article *Descartes et la constitution de l'écriture symbolique*, pp. 237-89 du numéro 51 2/3 d'avril-septembre 1998 de la *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* intitulé « Pour Descartes ».

118. Par exemple en construisant des compas des plus ingénieux, ou en ramenant toutes les manipulations à des constructions à base de géométrie élémentaire ; le calcul de base ne pouvait à ses yeux s'en passer, un peu comme de nos jours les calculatrices ont envahi l'enseignement secondaire pour déterminer les résultats numériques.

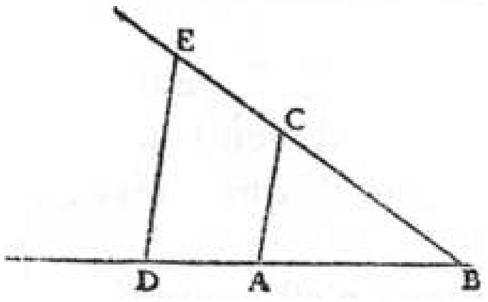


FIGURE 3.24 – *La machine à multiplier de Descartes*

La comparaison entre les deux activités

a) repérer un point par ses coordonnées
b) calculer un produit

ne s'impose pas à première vue, et n'est d'ailleurs pas immédiatement fructueuse. Pourtant, à y regarder de près, *il n'est pas impossible que la machine à multiplier, bien connue chez Descartes depuis ses études, ne l'ait conduit - au moins inconsciemment - à concevoir ses coordonnées.*

Si l'on considère que, dans les produits effectués grâce au théorème de Thalès, l'un des facteurs reste au moins provisoirement constant, disons $BC = a$ par exemple, alors le calcul de $y = ax$ où $x = DB$ et $y = BE$ met en évidence ce que l'on peut appeler, avec nos yeux d'aujourd'hui, l'abscisse x et l'ordonnée y du point variable E dans un système cartésien d'origine D, d'axe des abscisses la droite DB où B est variable, et pour direction de l'axe des coordonnées celle de la droite BE, direction supposée fixée.

Pour mieux imaginer le chemin peut-être suivi par Descartes, on peut imaginer qu'il a pensé, au moins à l'époque où il ne cessait de concevoir des machines automatisant certains calculs, qu'il avait pu mettre au point la suivante, extension fort naturelle de la précédente dès que l'on se permet de rendre constant l'un des facteurs de la multiplication

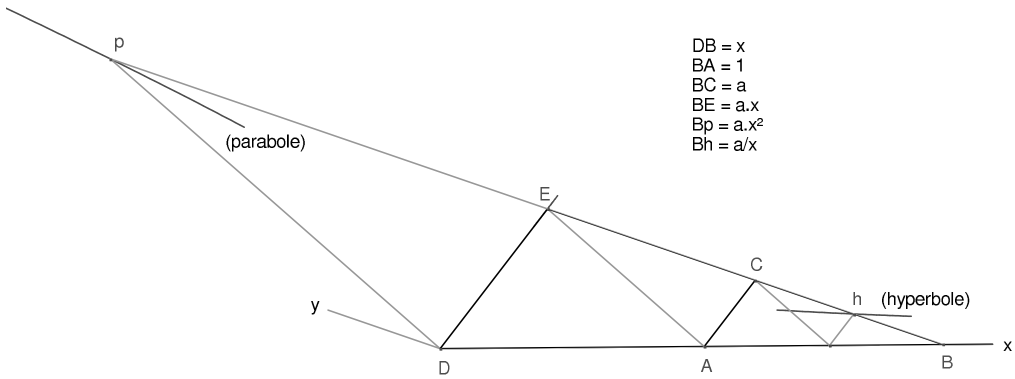


FIGURE 3.25 – *Une machine à multiplications et divisions généralisées*

Sur cette figure, où le nombre $BC = a$ est constant (le triangle ABC est donc simplement translatable suivant la position de B sur la droite Dx), on peut voir comment, à partir de la longueur variable $DB = x$, construire des segments d'origine B de longueurs a/x, ax, ax^2 et imaginer comment obtenir d'autres monômes du type ax^n avec $n \in \mathbb{Z}$.

En compliquant un peu les choses (superposition de mécanismes), la généralisation ici proposée de la machine à multiplier (et diviser) de Descartes pourrait conduire à un algorithme de construction de toute valeur polynomiale $y = P(x)$. Par exemple, à partir de la figure ci-dessus, il serait immédiat de concevoir un système articulé [119] permettant le tracé de la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et donc de résoudre graphiquement l'équation $ax^2 + bx + c = 0$: prenant pour simplifier Dx et Dy orthogonaux, il est facile de construire une équerre ABC coulissant sur la droite Dx, un peu comme sur la figure qui ouvre le Livre Second [120]. On trouve d'ailleurs un concept analogue d'équerre coulissante dans une autre figure de ce Livre [121].

119. « Que deux ou plusieurs lignes puissent estre meuës l'vne par l'autre, & que leurs intersections en marquent d'autres », pages 316 des *Essais* et 390 de AT VI.
120. Pages 318 des *Essais* et 391 de AT VI.
121. Voir les pages 320 et 321 des *Essais*, 393 et 395 de AT VI, et aussi 726 du volume II de l'édition Ver Eecke de Pappus (livre VII, VII, Proposition 173).

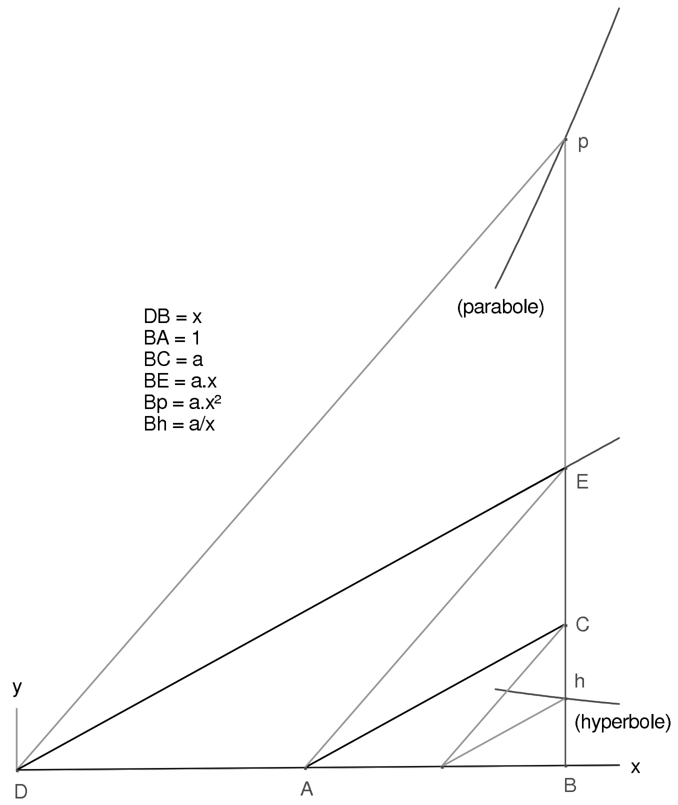


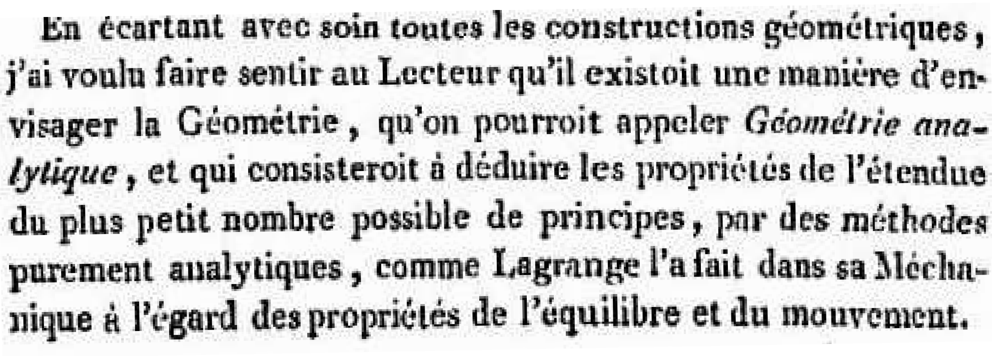
FIGURE 3.26 – *La même machine avec axes orthogonaux*

Bien entendu, une telle reconstitution est hasardeuse, mais il semble pourtant très probable que Descartes ait essayé, au moins dans sa jeunesse, de mettre au point de tels mécanismes.

Cela rend relativement plausible l'hypothèse selon laquelle, au moins inconsciemment, sa machine à multiplier ait pu servir de point de départ pour sa procédure de repérage, mieux connue sous le nom de *géométrie analytique*[122], comme l'on dira à la suite de la page XXV de la Préface du premier volume du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de 1797 de Silvestre-François Lacroix (1765-1843)[123]

122. Les mathématiciens professionnels d'aujourd'hui donnent un autre sens à ces termes, mais c'est ici sans conséquences.

123. Professeur, entre autres, à la première École Normale Supérieure et à l'École polytechnique. Indiquons au passage que le mot *coordonnées* n'est pas non plus de Descartes :



En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourroit appeler *Géométrie analytique*, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Méchanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement.

FIGURE 3.27 – *La première apparition de l'expression* Géométrie analytique

Vers la maîtrise de l'Univers

Ainsi est donc née la géométrie analytique dans sa version cartésienne : même si l'œuvre parallèle et simultanée de Fermat, plus proche de nos habitudes, ne doit surtout pas être oubliée au moment de dresser le bilan du travail immense accompli par les deux petites lettres x et y, on doit dire sans exagérer qu'elle a été le point de départ de la physique mathématique, donc de l'exploration devenue raisonnée du Système du Monde qui a conduit à sa domestication - bonne ou mauvaise - par l'homme de nos siècles modernes.

Cinquante-cinq ans plus tard, le 28 mai 1692, Leibniz écrira dans sa *Lettre au Prince de Toscane*[124] « *Je souhaite - et ce souhait, si d'autres y travaillent, n'est pas irréalisable - voir la Géométrie réduite à l'Analyse absolue (si nous visons au plus haut), de sorte que le genre humain, délivré de cette difficulté, puisse appliquer désormais, pour son plus grand plaisir et son plus grand profit son étude à la nature même et aux éléments concrets et puisse ainsi y reconnaître l'Étude Divine.* ». Certes, il veut aller ainsi plus loin que Descartes (qu'il vient de citer avec éloge mais dont il connaît néanmoins

il figure pour la première fois dans le *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omens tangente, ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu.* d'avril 1692 de Leibniz.

124. *Mathematische Schriften*, volume V, pp. 270-2. Traduction de Claude Lang pour Denis Lanier.

les limites évidentes [125]) ; cela dit il décrit magnifiquement, à notre avis, la puissance et la portée des mathématiques nouvelles issues de cette *Géométrie analytique*, nées pour l'essentiel du contenu de notre chapitre. Il serait difficile d'être plus visionnaire et homérique.

Dans sa préface à la traduction de *La Géométrie* qu'il donna en 1925, l'historien des mathématiques américain David Eugen Smith n'hésite pas à écrire « *If a mathematician were asked to name the great epoch-making works in his science* [...] *he would as certainly include* La Géométrie *of Descartes and the* Principia *of Newton* » : en reliant aussi étroitement ces deux hommes, si différents, il confirme ici le pronostic leibnizien. Il rappelle aussi, en quatrième de couverture de son livre, que même un anglais très *british* comme John Stuart Mill parle du *greatest single step ever made in the progress of the exact science.* Ces louanges suffisent : le contenu de notre chapitre marque vraiment un point crucial dans l'histoire de la science et de sa conquête du monde par l'esprit humain.

Annexe I : Le texte de Pappus

Cette traduction est fortement inspirée de celle de Paul Tannery (AT VI pp. 721-2), mais surtout de cette de Ver Eecke (vol. 2, Livre VII, pp. 507-10).

PAPPUS « Mais, ce lieu à trois, et quatre lignes qu'il [Apollonius] dit dans son livre III, qu'Euclide ne l'a pas traité complètement [126], lui-même pas plus qu'un autre, n'aurait pu l'épuiser : ni même rien ajouter à ce qu'Euclide en a écrit, du moins avec le seul secours des Éléments des Coniques déjà démontrés jusqu'à l'époque d'Euclide [...] Voici du reste quel est le lieu à trois, et quatre

125. Essentiellement le rejet de l'analyse au profit de l'algèbre seule ; mais Newton et Leibniz lui-même contribuèrent excellemment à la résolution de ce manque. Sans Descartes et Fermat, ils auraient dû ajouter à leur tâche de créateur la découverte des coordonnées ; mais ils n'eurent heureusement point à le faire.

126. Dans le préambule du livre I de ses *Coniques* [Ver Eecke, pages 2-3], Apollonius écrit en effet que ce livre III « contient de nombreux et curieux théorèmes utiles dans la construction des lieux solides, et dans les discussions afférentes. La plupart de ces théorèmes et les plus beaux sont nouveaux. C'est d'ailleurs leur découverte qui m'a fait remarquer qu'Euclide n'a pas effectué la synthèse du lieu à trois et quatre lignes, mais seulement celle d'une de ses parties prise au hasard, et d'une façon qui n'est pas heureuse ; c'est que, sans mes découvertes complémentaires, la synthèse complète était impossible ».

lignes, auquel il est si fier d'avoir ajouté quelque chose, et dont il aurait dû savoir gré à celui qui l'a traité en premier. Si, trois droites étant données de position, on mène d'un même point, sur ces trois droites, trois autres sont des angles donnés, et qu'on donne le rapport du rectangle compris sous deux des droites menées au carré de la dernière, le point se trouvera sur un lieu solide donné de position, c'est-à-dire sur l'une des trois coniques. D'autre part, si c'est sur quatre droites données de position que l'on mène des droites sous des angles donnés, et qu'on donne le rapport du rectangle de deux des droites menées à celui des deux autres, le point se trouvera de même sur une section conique donnée de position. D'autre part, si les droites sont seulement au nombre de deux, il est établi que le lieu est plan. Mais s'il y a plus de quatre droites, le lieu du point n'est plus de ceux qui sont connus, et qui simplement sont appelés des lignes (sans en savoir davantage sur leur nature ou leurs propriétés), et on n'a fait la synthèse d'aucune, pas même de la première qui, après qu'on eut montré qu'elle est utile, a semblé être la plus remarquable. ≫

≪ Voici comment on propose ces derniers lieux : si d'un point on mène à cinq droites données de position d'autres droites sous des angles donnés, et qu'on donne le rapport entre le parallélépipède solide rectangle compris sous trois des droites menées et le parallélépipède rectangle compris sous les deux autres et une droite donnée, le point se trouvera sur une ligne donnée de position. Et si les droites données sont au nombre de six, et que l'on donne le rapport du solide compris sous trois des menées au solide compris sous les trois autres, le point se trouvera de même sur une ligne donnée de position. Enfin s'il y a plus de six droites, on ne peut plus parler du rapport de ce qui est compris sous quatre droites à ce qui est compris sous les autres, puisqu'il n'y a rien qui soit compris sous plus de trois dimensions ≫.

≪ Cependant, peu de temps avant nous on s'est accordé la liberté de parler de cette manière ; mais, quand ils énoncent que le rectangle compris sous telles droites est multiplié par le carré de telle droite, ou par le rectangle compris sous telles autres, ils ne désignent rien de moins qu'une chose inintelligible. Toutefois, pour ce qui concerne les propositions ci-dessus, il était loisible de les énoncer et de les démontrer en général au moyen des rapports composés, en s'exprimant comme suit pour ces dernières propositions : si d'un point on mène à des droites données de position d'autres droites sous des angles donnés et que l'on donne le rapport composé de celui de l'une des droites menées à une autre et de celui d'une autre à une autre et de celui de la dernière à une droite donnée, s'il y a sept droites, ou bien de celui de la dernière à la dernière, s'il y en a huit, le point se trouvera sur une ligne donnée de position. Et il en sera de même, quel que soit le nombre des droites, pair ou impair. Mais, comme je l'ai dit, pour aucun de ces lieux qui suivent celui à quatre droites, il n'y a eu une synthèse faite permettant de reconnaître la ligne ».

Annexe II : Pappus, Cubiques et Quartiques

Cette annexe traite de deux problèmes techniques, complexes et bien distincts, dont les solutions sont liées

a) **démontrer que toute Cubique générique** (en particulier non décomposable) **admet une équation de Pappus**,

b) **exhiber une Quartique très simple qui n'est pas un lieu de Pappus à huit droites**.

Le cas des Cubiques génériques

Intéressons-nous aux intersections d'une droite et d'une courbe algébrique indécomposable[127]. La définition usuelle de l'alignement sur une droite Δ de n points réguliers d'une courbe algébrique Γ non décomposable d'ordre n, est que ces points, non nécessairement deux à deux distincts, sont les points d'intersection de Δ et de Γ au sens usuel, comptés chacun avec leur *ordre de multiplicité*, notion délicate dont une définition précise est nécessaire. Pour simplifier les choses, il est fort utile de *passer en coordonnées homogènes* (ou *projectives*) (X, Y, Z), où $Z = 0$ caractérise les points à l'infini, et où sinon $\dfrac{X}{Z}$ et $\dfrac{Y}{Z}$ sont les coordonnées ordinaires.

Définir l'ordre de multiplicité d'un point $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ commun à deux courbes algébriques est nécessairement assez lourd, sauf dans le cas où l'une des deux est une droite d'équation $\ell\, X + m\, Y + n\, Z = 0$, avec par exemple $m \neq 0$. L'égalité $\ell\, x_0 + m\, y_0 + n\, z_0 = 0$ impliquant $(x_0, z_0) \neq (0, 0)$, nous prendrons par exemple $z_0 \neq 0$ et paramétrerons l'ensemble des points (x, y, z) de

127. Nous suivrons ici un article de l'auteur, paru dans le numéro un d'octobre 2007 de la 118-ème année de la *RMS*, ou *Revue de la filière Mathématiques* pp. 67-72, *L'associativité du groupe elliptique*.

cette droite vérifiant $z \neq 0$ par les égalités

$$\frac{x}{z} = \frac{x_0}{z_0} + m\,t, \quad \frac{y}{z} = \frac{y_0}{z_0} - \ell\,t.$$

Ainsi l'équation résultant de l'élimination entre l'équation de la droite et celle d'une courbe indécomposable d'ordre δ définie par $P\,(x, y, z) = 0$ est-elle ramenée à une équation algébrique ordinaire annulant

$$R\,(X, Z) = P\,(X, \frac{\ell\,X + n\,Z}{m}, Z) = Z^{\delta} P\left(\frac{x_0}{z_0} + m\,T, \frac{y_0}{z_0} - \ell\,T, 1\right) = Z^{\delta} Q\,(T)$$

où T est la fraction rationnelle $T = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{X}{Z} - \dfrac{x_0}{z_0}\right)$ et Q un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à δ.

Comme il est clair que l'ordre de multiplicité de la racine 0 de cette équation est intrinsèque, c'est-à-dire insensible à un changement affine de paramètre, au choix de la variable à éliminer et à un changement de repère projectif, on peut définir en toute généralité l'ordre du point M_0 dans l'intersection considérée comme égal à l'ordre de 0 relatif au polynôme Q. On en déduit immédiatement le *théorème de division* : M_0 est d'ordre au moins ω si, et seulement si, l'on peut écrire

$$R\,(X, Z) = Z^{\delta} T^{\omega} \varphi\,(T) = (z_0 X - x_0 Z)^{\omega} S\,(X, Z)$$

où S est homogène de degré $\delta - \omega$, et d'ordre ω si de plus $\varphi\,(0) \neq 0$, c'est-à-dire $S\,(x_0, z_0) \neq 0$.

Ce théorème, issu de l'intuition cartésienne, permet de retrouver sans intervention de l'analyse l'équation usuelle $X\,\dfrac{\partial P}{\partial X_0} + Y\,\dfrac{\partial P}{\partial Y_0} + X\,\dfrac{\partial P}{\partial Z_0} = 0$ de la tangente en M_0 supposé régulier. En effet, l'annulation du terme en T^1 dans le développement de Taylor de $P\left(\dfrac{x_0}{z_0} + m\,T, \dfrac{y_0}{z_0} - \ell\,T, 1\right)$ donne $\dfrac{\partial P}{\partial X_0} = \dfrac{\ell}{m}\,\dfrac{\partial P}{\partial Y_0}$, et la relation d'Euler $0 = \delta\,P_0 = x_0\,\dfrac{\partial P}{\partial X_0} + y_0\,\dfrac{\partial P}{\partial Y_0} + z_0\,\dfrac{\partial P}{\partial Z_0}$ implique $\dfrac{\partial P}{\partial Z_0} = \dfrac{n}{m}\,\dfrac{\partial P}{\partial Y_0}$, d'où le résultat.

Définissons une relation ternaire, notée UVW, sur l'ensemble des points réguliers d'une cubique indécomposable Γ d'équation $P = 0$ sur un corps $\mathcal{K}$, en posant que ces trois points, non nécessairement deux à deux distincts et de coordonnées projectives respectives (x_U, y_U, z_U), (x_V, y_V, z_V) et (x_W, y_W, z_W), sont dits P**-alignés** sur une droite Δ si éliminer l'une des coordonnées (X, Y, Z) [par exemple Y] entre $P = 0$ et une équation $\ell\, X + m\, Y + n\, Z = 0$ de Δ conduit à une condition nécessaire et suffisante de la forme

$$(z_U X - x_U Z)\,(z_V X - x_V Z)\,(z_W X - x_W Z) = 0$$

exhibant les deux autres coordonnées de chacun des trois points.

Cette élimination s'effectue en résolvant en Y l'équation de Δ et en reportant dans P, ce qui donne

$$R\,(X, Z) = P\,(X, \frac{\ell\, X + n\, Z}{m}, Z) = 0,$$

c'est-à-dire, à une constante près, l'annulation du résultant de Sylvester de ces deux équations en Y de degrés respectifs 3 et 1 à coefficients dans l'anneau $\mathcal{K}\,[X, Z]$. La seule condition pour pouvoir choisir d'éliminer Y est que $m \neq 0$. Ce résultant R, reste de P modulo $Y + \dfrac{\ell\, X + n\, Z}{m}$, n'est pas nul puisque Γ est indécomposable.

Le choix de la coordonnée Y est sans importance pourvu qu'on l'effectue parmi celles dont le coefficient dans l'équation de Δ n'est pas nul. En effet, si la condition de P-alignement est vérifiée pour cette coordonnée, elle est également vérifiée pour le choix d'une autre coordonnée, X par exemple si ℓ est différent de zéro, puisque sous l'hypothèse $\ell\, m \neq 0$ la relation

$$P\,(X, \frac{\ell\, X + n\, Z}{m}, Z) = \rho\,(z_U X - x_U Z)\,(z_V X - x_V Z)\,(z_W X - x_W Z)$$

implique aussitôt la relation analogue

$$P\,(\frac{m\, Y + n\, Z}{\ell}, Y, Z) = \rho\left(\frac{m}{\ell}\right)^3 (z_U Y - y_U Z)\,(z_V Y - y_V Z)\,(z_W Y - y_W Z).$$

Si UVW est vrai, c'est-à-dire si (U, V, W) sont P-alignés sur Δ, la décomposition du résultant prouve l'égalité ensembliste $\Delta \cap \Gamma = \{U, V, W\}$. En particulier, ces trois points sont alignés sur Δ au sens usuel du terme. Il en résulte que, s'ils sont deux à deux distincts, la relation de P-alignement signifie simplement que Δ coupe Γ en exactement trois points, à savoir U, V et W, la situation étant naturellement plus complexe si l'on a par exemple l'égalité $U = V$.

La définition analytique du P-alignement traduit donc exactement le fait que les points réguliers (U, V, W) de Γ sont alignés, au sens ordinaire, sur une sécante Δ s'ils sont deux à deux distincts, que W appartient à la tangente Δ en U si par exemple $U = V \neq W$, et que U est un point d'inflexion de tangente Δ si $U = V = W$. Dans ces différents cas, Δ est unique (et appelée leur support), en tant que sécante ou tangente. La relation de P-alignement est donc intrinsèque. Elle reste toutefois strictement liée au polynôme P utilisé pour définir la cubique - d'où son nom - et non pas seulement à l'ensemble Γ de ses points[128].

Loi de groupe sur une cubique indécomposable

Notons d'abord qu'une cubique indécomposable ne peut avoir au plus qu'un seul point singulier (cette notion étant intrinsèque, il suffit de le vérifier en supposant que les points $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont singuliers : alors P ne contient que des termes de degré un au plus en X et en Y, ce qui montre que Z divise P). Par conséquent deux points réguliers définissent un support unique Δ (sécante ou tangente), puis un troisième point commun à Γ et Δ, automatiquement régulier et P-aligné avec les deux autres. Dès lors, deux P-alignements UVW' et UVW impliquent $W' = W$.

La loi de groupe découverte par Jacobi sur l'ensemble des points réguliers de Γ est définie de la manière suivante[129] : on choisit arbitrairement un point régulier E, et la somme de deux points réguliers arbitraires G et B est le

128. Ainsi, dans le plan projectif défini sur $\mathbb{F}_2^h$, Γ est constitué des mêmes trois points, tous réguliers, (O, A, B) définis par $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ pour $P_1^h = XY^2 + YZ^2 + ZX^2$ et pour $P_2^h = X^2Y + Y^2Z + Z^2X$, mais ($O$, O, A) ne sont P-alignés que pour P_1^h et non pour P_2^h (*on voit par conséquent que, dans certains cas, la connaissance des points d'une courbe ne suffit pas à déterminer leurs tangentes*).

129. Dans son traité *De usu theoriæ Integralium Ellipticorum et Integralium Abelianorum in Analysi Diophantæ* de 1835, où il a été le premier à énoncer que la méthode dite *corde/tangente* définit une loi de groupe commutatif sur l'ensemble des points réguliers d'une cubique indécomposable.

point régulier $C = G + B$ tel qu'il existe un point régulier A vérifiant les deux P-alignements GBA et ECA.

Le paragraphe précédent montre que cette loi est bien définie sur l'ensemble des points réguliers de Γ ; il est immédiat qu'elle est commutative et admet E comme élément neutre. L'associativité n'est pas simple à prouver ; une démonstration élémentaire en est proposée ci-dessous comme corollaire de la proposition suivante, encore appelée *théorème du neuvième point* : les P-alignements ABG, ACE, BDF, CDK et EFH impliquent le P-alignement GKH. Il suffit de remarquer que, si D est un troisième point régulier, alors K est P-aligné avec $C = G + B$ et D ; l'égalité $G + (B + D) = (G + B) + D$ équivaut donc au P-alignement de K avec G et $B + D = H$ (le point $G + B + D$ est le point P-aligné avec E et K, qu'il est inutile de considérer ici). Mais ce résultat conduit aussi à l'équation de Pappus [130].

Nous représenterons ce problème par le tableau $\begin{matrix} A & C & E \\ G & K & H \\ B & D & F \end{matrix}$ où seul le P-alignement de la deuxième ligne doit être démontré. Établissons d'abord dix-huit cas triviaux où GKH est déjà caché dans l'hypothèse, à savoir six du type $A = D$ et douze du type $A = H$: dans le premier les P-alignements ABG et $ABF = DBF$ impliquent $G = F$, ACE et $ACK = DCK$ impliquent $E = K$, puis le P-alignement $GKH = FEH$, tandis que dans le second l'on montre de façon analogue que $F = C$ (à cause de AEC et HEF) puis que $K = B$ (à cause de DFB et DCK) d'où $GKH = GBA$. Dans ce qui suit, les cas $A = D$, $A = F$, $A = H$, $A = K$, $B = C$, $B = E$, $B = H$, $B = K$, $C = F$, $C = G$, $C = H$, $D = E$, $D = G$, $D = H$, $E = G$, $E = K$, $F = G$ et $F = K$ sont donc supposés écartés.

Nous allons prouver le théorème du neuvième point sous l'hypothèse supplémentaire $E \neq F$. Le problème général s'y ramène aisément : en effet, les six points $ABCDEF$ ne pouvant être tous confondus, on a par exemple $A \neq B$ ou $C \neq D$ ou $E \neq F$ (cas se ramenant aussitôt au troisième d'entre

130. Ce très célèbre théorème de géométrie algébrique prend sa source dans Euler (*Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748), Cramer (*Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques*, 1750), Lamé (*Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, 1818) et Plücker (*Mémoire sur les contacts et sur les intersections de courbes*, 1827).

eux) sauf si $A = B$, $C = D$ et $E = F$. Mais l'on dispose alors par exemple de l'inégalité $D \neq F$; introduisant un point supplémentaire L vérifiant le P-alignement LKH, le problème $\begin{matrix} C & K & D \\ A & L & B \\ E & H & F \end{matrix}$ est de type $E \neq F$, et l'on pourra donc en déduire le P-alignement ALB qui implique $L = G$, soit enfin le P-alignement désiré $GKH = LKH$.

Par une transformation projective, nous prendrons pour axes des coordonnées les supports de ACE et BDF, sécants en un point O distinct de E et de F puisque E diffère par hypothèse à la fois de F, B et D, en y définissant E et F comme leurs points à l'infini, de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. Le point H, à l'infini car E et F déterminent une droite unique, a pour coordonnées $(v,\, u, 0)$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$; enfin on notera $(a, 0, a')$, $(0, b, b')$, $(c, 0, c')$ et $(0, d, d')$ les coordonnées des quatre points A, B, C et D. D'après ce qui précède, une équation de la cubique est donc de la forme

$$0 = P\,(X, Y, Z) = XY\,(u\,X + v\,Y) + (p\,X^2 + q\,XY + r\,Y^2)\,Z$$
$$+(g\,X + h\,Y)\,Z^2 + k\,Z^3.$$

Le P-alignement ACE sur $Y = 0$ montre que le triplet (p, g, k), non nul car Γ est indécomposable, est lié au triplet $(a'c', -ac' - a'c, ac)$, également non nul puisque $a = 0$ par exemple implique $a' \neq 0$ d'où $(a'c',\, a'c) \neq (0, 0)$. Une relation analogue pour BDF donne finalement une équation de la forme

$$0 = P\,(X, Y, Z) = XY\,(u\,X + v\,Y + q\,Z) + [\lambda\,(a'\,X - a\,Z)\,(c'\,X - c\,Z)$$
$$+\mu\,(b'\,Y - b\,Z)\,(d'\,Y - d\,Z)]\,Z - k\,Z^3$$

avec $k = \lambda\,ac = \mu\,bd$ et $\lambda\mu \neq 0$. Si $k \neq 0$, alors $abcd \neq 0$. Sinon, c'est que par exemple $a = 0$, soit $A = O$; comme $O \in Oy$, on a $A \in \{B,\, D,\, F\}$. Or sont écartés par hypothèse les cas $A = D$, $A = F$ et $B = C$; donc $B = A = O$ d'où $b = 0$, $c \neq 0$ et $a'b' \neq 0$, puis $d \neq 0$. Nous supposerons donc ci-dessous que $C \neq D$ et $cd \neq 0$.

Un peu de calcul donne, en posant $w = q - \lambda\,a'c\,\dfrac{d'}{d} - \mu\,b'd\,\dfrac{c'}{c}$,

$$0 = cd\,P\,(X, Y, Z) = cd\,XY\,(u\,X + v\,Y + w\,Z)$$
$$+(\lambda\,a'c\,X + \mu\,b'd\,Y - k\,Z)\,(c'd\,X + cd'\,Y - cd\,Z)\,Z$$

soit enfin (comme recherché) une équation de Pappus de la forme

$$cd\, D_1^h D_2^h D_3^h + D_4^h D_5^h D_6^h = 0.$$

On voit que $H \in D_3^h$ et que les droites D_1^h, D_2^h, D_5^h et D_6^h sont les supports respectifs des P-alignements BDF, ACE, CDK et EFH. Enfin D_4^h est celui de ABG : si $k \neq 0$, c'est la droite AB puisque

$$D_4^h\,(X,Y,Z) = \lambda\, c\,(a'\,X - a\,Z) + \mu\, b' d\, Y = \lambda\, a' c\, X + \mu\, d\,(b'\,Y - b\,Z)$$

et $A \neq B$; sinon, le calcul des dérivées partielles de P en $A = B = O$ prouve que $D_4^h = \lambda\, a' c\, X + \mu\, b' d\, Y$ est la tangente en O à Γ, et le support cherché.

Le théorème de division appliqué à deux droites sécantes en M, d'équations $D\,(X,Y,Z) = 0$ et $\ell\, X + m\, Y + n\, Z = 0$ avec par exemple $m \neq 0$, montre que $D\,(X, \dfrac{\ell\, X + n\, Z}{m}, Z)$ et $z_M X - x_M Z$ sont deux formes linéaires proportionnelles en (X, Z). Appliquant ce résultat aux couples de droites (D_i^h, D_j^h) avec $i \leqslant 3 < j$, deux à deux sécantes puisque Γ est indécomposable, on déduit des P-alignements ABG et CDK que $G \in D_3^h$ $(j = 4)$ et $K \in D_3^h$ $(j = 5)$; enfin prendre $i = 3$ justifie le P-alignement GKH.

Pour illustrer cette démonstration, on peut examiner un exemple intéressant où trois des neuf points sont confondus en un seul (toutefois régulier) : il s'agit de la Cubique tout à fait élémentaire d'équation $y - x^3 = 0$, déjà étudiée plus haut (page 115). Nous poserons ici $A = B = G\,(0,0)$ (P-alignés sur la droite $y = 0$), $C\,(2,8)$, $D\,(1,1)$, $E\,(-2,-8)$, $F\,(-1,-1)$, $H\,(3,27)$ et $K\,(-3,-27)$, d'où l'équation

$$(y - x)\,(y - 4x)\,(y - 9x) = y\,(y - 7x + 6)\,(y - 7x - 6)$$

$$(BDF)\ (ACE)\ (GKH) \qquad\qquad (ABG)\ (CDK)\ (EFH)$$

Dans ce cas assez particulier, le point $A = B = G$ est d'inflexion, et le P-alignement (ABG) se fait sur la tangente d'inflexion $y = 0$. Pour des raisons d'encombrement, la figure ci-dessous n'est pas à l'échelle (H et K devraient être plus éloignés du centre), mais rend bien compte de la situation.

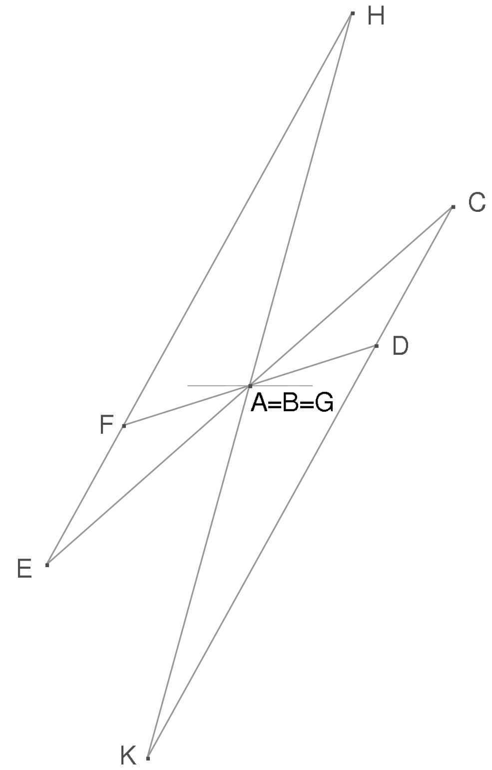


FIGURE 3.28 – *L'exemple de la courbe d'équation $y = x^3$*

La Quartique $y = x^4$ n'est pas un lieu à huit droites

Comme pour la cubique générique, nous passerons en coordonnées homogènes, et montrerons qu'il n'existe pas de formes linéaires (A, B, C, D, E, F, G, H) en (X, Y, Z) vérifiant l'égalité polynomiale [131]

$$YZ^3 - X^4 = \lambda\, A \cdot B \cdot C \cdot D + \mu\, E \cdot F \cdot G \cdot H.$$

Pour une preuve simple, il suffit d'étendre la notion de P-alignement ci-dessus au cas d'une quartique, qui donne un sens précis à la notion de l'ordre de multiplicité d'un point d'intersection d'une quartique d'avec une droite [132].

131. D'après une communication privée de Christian Houzel et Roshdi Rashed : qu'ils en soient ici vivement remerciés.

132. À ne pas confondre avec la notion de point multiple d'une telle courbe. En général une droite passant par un point double donne un point d'intersection d'ordre deux, mais

Soit L l'une quelconque des formes figurant dans l'équation : la droite d'équation $L = 0$ coupe la quartique en quatre points définis par ses intersections d'avec les quatre droites figurant dans le produit qui ne contient pas L. Si $L = X - aZ$ (à un coefficient près), l'étude de la courbe montre que l'un seulement de ces points est à distance finie, les trois autres étant confondus en son point à l'infini [133].

Ce cas étant écarté, on peut supposer $L = Y - pX - qZ$ (à un coefficient près). L'étude de la fonction réelle $x \mapsto x^4 - px - q$ montre que l'intersection est formée d'au plus deux points, nécessairement à distance finie. Par suite ce P-alignement est donc, ou bien du type point unique, avec racine d'ordre 4, qui est nécessairement l'origine [134] et correspond à $L = Y$, ou bien du type couple de points. L'absence d'un autre point triple, de points d'inflexion, de tangentes doubles ou de points doubles montre que cette seconde hypothèse est à abandonner [135] : donc $L = X - aZ$ ou $L = Y$.

Résumons : chacune des formes affines est, à un coefficient multiplicatif près, du type $X - aZ$, ou du type Y (et figure exclusivement dans l'un des deux derniers membres de l'égalité puisque la quartique est indécomposable [136]).

L'étude du coefficient de Y montre aussitôt que le premier cas est à exclure, car Y n'apparaît qu'une fois. Il en est de même pour le second, car une égalité de la forme $YZ^3 - X^4 = \lambda \prod(X - aZ) + \mu Y \prod(X - eZ)$ impliquerait la suivante, $Z^3 = \mu \prod(X - eZ)$, incompatible avec $\mu = 0$ ou $\mu \neq 0$. À la différence de la cubique d'équation $y = x^3$ étudiée ci-dessus, la quartique d'équation $y = x^4$ n'est donc pas une courbe de Pappus à huit droites et Descartes est en défaut sur ce point [137].

qui peut monter à trois si c'est une tangente en ce point (ex : $x^3 + y^3 = n\,xy$) *etc.*

133. Dont on constate immédiatement qu'il est triple.

134. Qui n'est pas un point singulier, mais simplement un *méplat*, ou inflexion quadruple.

135. L'idée est que, si une courbe algébrique a par exemple une équation du type $(y - ax)\,(y - bx)\,f(x,y) = y\,g(x,y)$, les abscisses de ses points d'intersection d'avec l'axe des abscisses sont des racines au moins doubles au sens de Descartes, puisque x^2 divise $ab\,x^2 f(x,0) - 0\,g(x,0)$. Cette remarque s'étend sans problème à n'importe quel nombre de droites concourantes en un point éventuellement autre que l'origine, et à n'importe quelle droite éventuellement autre que l'axe des abscisses.

136. Le cas où l'une de ces formes serait constante ne poserait pas vraiment problème.

137. Cela est conforme à la remarque (prémonitoire, mais largement incomplète) de Newton dans ses *Errores Cartesij Geometriæ* (ou *Three mistakes in Descartes' Geometry*, Whi-

La Quartique $y = x^4$ peut elle néanmoins être de Pappus ?

Cela dit, pour pouvoir affirmer que cette courbe n'est pas de Pappus il reste à examiner, par exemple, si elle n'est pas un lieu à seize droites, c'est-à-dire s'il peut exister une égalité du type

$$H(X, Y, Z)\,(YZ^3 - X^4) = D_1 D_2 D_3 \dots D_8 - D_9 D_{10} \dots D_{16}$$

où $H = 0$ est l'équation (homogène) d'une Quartique n'ayant pas de points réels à distance finie autres que ceux de $y = x^4$, et cela peut s'étendre à tout nombre de droites strictement supérieur à 8, même impair [138]. Voici quelques possibilités *a priori* de valeurs de H

$$H(X, Y, Z) \in \{Z^{12}, YZ^3 - X^4, Y^2Z^6 + X^4YZ^3 + X^8, X^2 + Y^2 + Z^2, \dots\}.$$

Toutefois, dans ces cas, comparables à celui de la décomposition de Henk Bos du Cercle $x^2+y^2 = 4$, intéressante mais discutable, cette identité polynomiale serait à rejeter, selon les définitions précises choisies pour le problème de Pappus vu par un utilisateur de la géométrie algébrique moderne, car les courbes différeraient par des points à l'infini ou vis-à-vis de leur décomposabilité [139] : ce serait le cas pour $H = Z^4$ (ajout de la droite de l'infini comptée quatre fois), $H = YZ^3 - X^4$ (la courbe aux points tous simples alors changée en elle-même avec ses points tous doubles), $H = X^2 + Y^2 + Z^2$ (ajout d'un Cercle sans points réels) *etc.* Sous cette restriction, qui paraît aujourd'hui sensée et légitime, on peut donc affirmer que **notre courbe n'est pas une courbe de Pappus**, quel que soit le nombre de droites en jeu.

Il est difficile de trancher sur une question d'apparence élémentaire, mais qui n'est pas sans intérêt : peut-on dire que choisir aléatoirement une courbe algébrique de degré au moins quatre conduit presque sûrement à une courbe qui n'est de Pappus pour aucun n ? Il semble que, pour des degrés assez élevés, le fait d'admettre une équation pappienne est une propriété rare.

---

teside, vol 4., pp. 341-4), datant sans doute de 1670. En appendice à son article fondateur *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie* du numéro 24 des *Archives for history of exact sciences* de 1981, Henk Bos donne une preuve, rigoureuse celle-là, du fait que, pour tout $n > 21$, il existe une courbe de degré n n'étant pas de Pappus (mais il n'en exhibe aucune).

138. Il suffit alors de passer à l'entier pair immédiatement supérieur en posant $D_{2n} = Z$.

139. Même si c'est invisible « à l'œil nu ».

Annexe III : Une critique malvenue de Leibniz

Voici l'une des manières de démontrer, par la géométrie analytique cartésienne sans produit scalaire, que l'angle $\hat{A}$ inscrit en A d'un triangle ABC d'aire S est la moitié de l'angle au centre $\widehat{BOC} = 2\varphi$. Si BC est l'axe des abscisses et sa médiatrice celui des ordonnées, les coordonnées du centre O du cercle circonscrit ABC sont $(0, R\cos\varphi)$, celles de B et C sont $(\pm R\sin\varphi, 0)$ et une équation du cercle est $x^2 + (y - R\cos\varphi)^2 = R^2$, d'où $x^2 + y^2 = 2Ry\cos\varphi + R^2\sin^2\varphi$ et les égalités mécaniques

$$AB^2AC^2 = \Big((x - R\sin\varphi)^2 + y^2\Big)\Big((x + R\sin\varphi)^2 + y^2\Big)$$

$$= (x^2+y^2+R^2\sin^2\varphi)^2 - 4R^2x^2\sin^2\varphi = 4R^2\Big((y\cos\varphi + R\sin^2\varphi)^2 - x^2\sin^2\varphi\Big)$$

$$= 4R^2\Big(y^2 - \sin^2\varphi\,(x^2 + y^2 - 2Ry\cos\varphi - R^2\sin^2\varphi)\Big) = 4R^2y^2,$$

d'où enfin $\quad \sin\hat{A} = \dfrac{2S}{AB\cdot AC} = \dfrac{|y|\cdot BC}{AB\cdot AC} = \dfrac{2R\,|y|\,\sin\varphi}{2R\,|y|} = \sin\varphi.$

Il existe bien entendu un très grand nombre d'autres solutions « analytiques » élémentaires de ce problème de géométrie pure.

Annexe IV : Un lemme sur les transversales

Voici une preuve moderne d'un résultat généralisant aux Coniques la propriété classique de la puissance par rapport à un Cercle, couvrant les Propositions XVI, XVII et *sq.* du livre III d'Apollonius (voir notre page 129) : si des cordes variables d'une conique Γ, notées MN et OP, sécantes en F, sont de directions fixes et distinctes, alors $\dfrac{\overline{FM}\cdot\overline{FN}}{\overline{FO}\cdot\overline{FP}}$ est indépendant de F.

En effet, si $q\,(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ est une équation de Γ dans un repère normé aux axes parallèles aux directions de MN et de OP, et si F a pour coordonnées (λ, μ), il est immédiat que

$$\overline{FM}\cdot\overline{FN} = \frac{q\,(\lambda,\mu)}{a}; \quad \overline{FO}\cdot\overline{FP} = \frac{q\,(\lambda,\mu)}{c}; \quad \frac{\overline{FM}\cdot\overline{FN}}{\overline{FO}\cdot\overline{FP}} = \frac{c}{a}\cdot$$

Chapitre 4

Qu'est-ce qu'une courbe ?

Les mots les plus importants de tout le Livre Second sont, sans aucun doute, ceux-ci [1]
« *I'espere que d'orenavant ceux qui auront l'adresse de se servir du calcul Geometrique icy proposé* [...] *ne manqueront iamais d'exercice.* »

Ils prouvent une fois de plus, pensons-nous, que la « géométrie » de Descartes est en fait un « calcul », donc une « algèbre », ce que confirmera la suite des années : nous verrons que ses « courbes géométriques » sont aujourd'hui appelées « algébriques », ce qui n'est pas un glissement sémantique sans importance. Pour comprendre ce qu'est au fond ce calcul, il faut le voir à l'œuvre sur ses objets préférés : les courbes, et pour cela remonter au projet fondamental de Descartes.

La **mathesis universalis**, dont cet auteur n'est qu'un maillon, est pour lui essentiellement une science universelle - destinée à déchiffrer l'univers -, utopique car toujours en construction, dont les codes, outils et protocoles d'analyse et de synthèse prennent modèle sur ceux des mathématiques [2].

Il lui faut donc au premier chef appliquer sa méthode (et en particulier les préceptes de conduire par ordre ses pensées en s'appuyant sur des pensées claires et distinctes [3]) aux mathématiques elles-mêmes, dont il pense qu'il

1. Pages 317 des *Essais*, 390-1 de AT VI, médiocrement traduits - avec perte de signification - en *make use of geometric methods* par Smith et Latham à leur page 44.
2. Ce n'est donc évidemment pas *la mathématique* qu'elle dépasse de beaucoup, qu'il s'agisse de celle du dix-septième siècle ou de la nôtre. Voir notamment David Rabouin.
3. Pages 20-22 du *Discours* et 18-20 de AT VI.

doit et peut les achever brillamment en résolvant le problème fondamental de la résolution des équations algébriques : *alors elles pourront jouer à plein leur rôle de modèle*, et il se sera hissé au premier plan.

Or la technique qu'il a mise au point repose essentiellement sur un vieux concept, celui de *courbe*, complètement renouvelé[4] par sa géométrie analytique : c'est pourquoi il se devait de dire avec précision ce qu'il était devenu sous sa houlette. Voilà le but de ce Livre Second, et surtout de son introduction (« *il est besoin que je die quelque chose en general de la nature des lignes courbes* »).

Courbes géométriques et mécaniques

À la lecture du début de ce Livre essentiel, on peut dégager quatre familles de courbes, que nous baptiserons de quatre noms propres parlants et comparerons avec les expressions *courbes géométriques*, ou *reçues en Géométrie*[5], et les *courbes mécaniques*[6].

- Les courbes d'Archimède.
- Les courbes de Descartes.
- Les courbes de Kempe.
- Les courbes de Pappus.

Reprenons en détail cette classification, à l'exception du quatrième *item*, qui a été étudié très longuement dans le chapitre qui lui est consacré ainsi qu'à l'introduction cartésienne de ses coordonnées : nous n'y reviendrons qu'au moment de comparer ces quatre ensembles deux à deux.

4. En particulier il a été capable d'en inventer d'un coup une infinité nouvelle, alors que les Anciens n'en avaient rencontré qu'une poignée (qui ne connaît, par exemple, l'hippopede de Proclus ?), et ce grâce à son traitement original des coordonnées qu'il a conçues comme un outil quasiment universel.

5. Voir notamment les pages 316 et 319 des *Essais* (388 et 392 de AT VI).

6. Voir notamment la page 316 des *Essais* (388 de AT VI).


De la nature des lignes courbes.

FIGURE 4.1 – *L'ouverture du* Livre Second

Les courbes d'Archimède

Nous ne pouvons en donner ici une définition précise, seulement celle-ci ou quelque autre équivalente. Nous appellerons courbe d'Archimède n'importe quelle courbe raisonnable[7], par exemple toute trajectoire possible d'un mouvement suffisamment régulier (Descartes parle d'ailleurs lui-même de *mouvement continu* en les pages 316 des *Essais* et 390 de AT VI, mais en ajoutant « *ou par plusieurs qui s'entresuivent & dont les derniers soient entierement reglés par ceux qui les precedent* en signalant dix lignes plus loin que cela n'est pas toujours le cas). Ce concept qui a l'air si simple est effectivement très complexe, même pour les mathématiciens modernes qui ont peu à peu été conduits à mettre au point des concepts très techniques[8].

En bref, et pour sortir de ce dilemme par une pirouette, toute courbe effectivement utilisable au niveau d'une licence de mathématiques (et non pas seulement citée comme contre-exemple) est une courbe d'Archimède.

Toutes les courbes présentées par Descartes ou nous-même est une courbe archimédienne ; son nom lui vient de ce qu'Archimède, le plus grand mathématicien antique sinon de tous les temps, a osé penser que sa Spirale était une courbe comme les autres, proche par exemple dans sa nature d'une conique, et possédait donc une tangente en chaque point, ce qu'il a d'ailleurs prouvé par un *tour de force* admirable.

Par suite les trois familles suivantes ne sont que des sous-ensembles (que nous montrerons être stricts) de celle-ci.

7. C'est-à-dire un ensemble de points du plan non « monstrueux », à l'inverse par exemple de la courbe de Peano qui remplit tout un carré. Dans son livre sur les courbes et surfaces, un spécialiste réputé, Gerald Farin, parle simplement de « *path of a point moving through space. Or : the image of the real line under a continuous map* ».

8. Citons juste un mot : celui de *variété* (également valable pour les surfaces, tout aussi difficiles à définir). Même des traités actuels fort appréciés de géométrie différentielle font parfois silence sur le sens du mot *courbe*.

Les courbes de Descartes

Ce sont toutes celles qu'il *pense devoir* [...] *estre receues* en sa Géométrie [9]. Il en donne une définition relativement efficace, se contentant pour l'essentiel de dire que ce sont les courbes « *qui tombent sous quelque mesure précise & exacte* » et dont « *tous les poins* [...] *ont nécessairement quelque rapport a tous les poins d'une ligne droite, qui peut estre exprimé par quelque equation, en tous par une mesme* [10] ».

Revoilà donc le mot fameux d'*équation*, que nous croyons si fondamental dans son œuvre. Dans le langage d'aujourd'hui, on peut traduire ainsi : **une courbe de Descartes est un ensemble non vide de points définis par une équation de la forme** $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme nécessairement non nul [11]. Nous parlons maintenant de courbe *algébrique*, il s'en tenait aux courbes *géométriques* : nous avons déjà signalé cette intéressante variante dans le langage technique.

Ainsi la quartique d'équation $y = x^4$ est-elle une courbe géométrique, donc de Descartes (et par suite d'Archimède) ; par contre, d'après une indication de Christian Houzel et de Roshdi Rashed, nous savons que ce n'est pas une courbe de Pappus. Par contre, comme nous le savons, la Cissoïde de Dioclès et les Conchoïdes de Nicomède le sont.

Une fois munis de ce concept de *courbe géométrique* [12], il est tentant de définir celui de *courbe mécanique* : Descartes dit avec grande fermeté [13]

« *Il est, ce me semble, tres clair, que prenant comme on fait pour Geometrique ce qui est precis & exact, & pour Mechanique ce qui ne l'est pas.* »

Par suite, une *courbe mécanique* est simplement une courbe ordinaire, c'est-à-dire *qui n'est pas géométrique*. La famille des courbes dites mécaniques par Descartes est donc le sous-ensemble des courbes dites d'Archimède (dans notre classification) n'admettant pas d'équation de la forme $P(x, y) = 0$.

9. Pages 317 des *Essais* et 390 de AT VI.
10. Pages 319 des *Essais* et 392 de AT VI.
11. Il en est ainsi des courbes *résolues* d'équation $y = Q(x)$ où Q est un polynôme, qui sont quasiment absentes de *La Géométrie*.
12. Il est raisonnable de suivre ici le langage cartésien, et non celui de notre époque.
13. Pages 316 des *Essais* et 389 de AT VI.

Cela ne signifie pas qu'elles n'aient pas d'équation : ainsi parmi les exemples données par l'auteur lui-même, la Spirale d'Archimède peut être définie en coordonnées polaires par une égalité du type $\rho = \theta$ (ou par des relations paramétriques de la forme $x = t\cos t$, $y = t\sin t$), et la Quadratrice par l'égalité mixte $y = \theta$ c'est-à-dire $\rho = \dfrac{\theta}{\sin\theta}$ (ou encore par $x = y\cot y$).

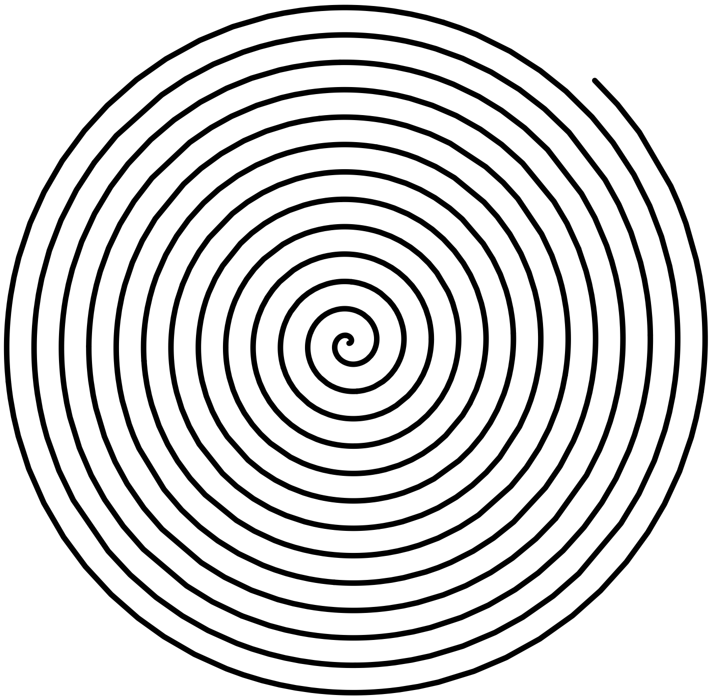


FIGURE 4.2 – *Une demi-spirale d'Archimède*

Toutes deux résultent de la combinaison de deux mouvements dont le second, qui dépend de la quadrature du cercle [14] n'est pas entièrement réglé par le premier (pour reprendre la curieuse expression de Descartes) : une droite tourne régulièrement autour du pôle tandis que, pour la Spirale, un point la décrit avec une vitesse uniforme et que, pour la Quadratrice, on considère son intersection avec une autre droite s'élevant régulièrement au-dessus de l'axe des abscisses.

14. Ou plus précisément de la connaissance d'un segment de longueur π.

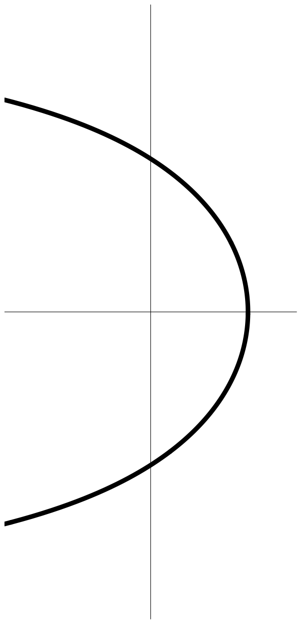


FIGURE 4.3 – *La partie essentielle de la quadratrice*

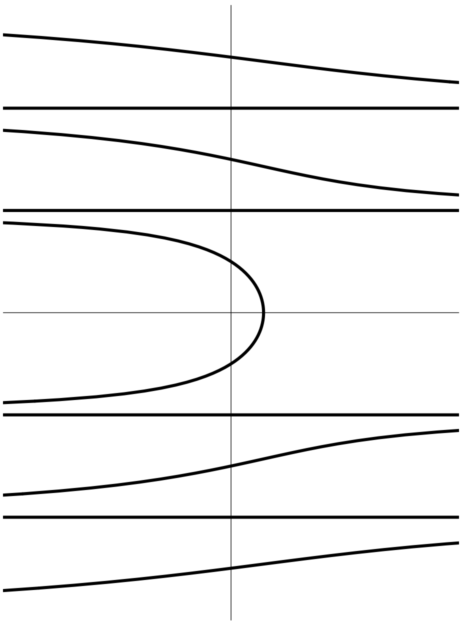


FIGURE 4.4 – *Une vue plus globale de la quadratrice avec asymptotes*

À propos des courbes mécaniques, comme la spirale notamment, Descartes dira plus loin (pages 339 des *Essais* et 411 de AT VI) que l'on peut certes en déterminer précisément une infinité de points[15], mais pas le « point générique », qui leur est « tellement propre » qu'il ne peut être trouvé que par leur mode de définition.

Telle était pour lui la frontière infranchissable entre *géométriques* et *mécaniques*.

À la fin du paragraphe où il explicite cette frontière, il écrit[16]

« *Et pourceque cete façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifferement plusieurs de ces poins, ne s'estend qu'a celles qui peuvent aussy estre descrites par un mouvement regulier & continu, on ne la doit pas entièrement rejetter de la Geometrie.* »

Ne cachons pas que ces lignes sont obscures, faute d'explicitation de la *façon*. Mais un examen plus approfondi montre qu'elles viennent après une étude assez longue de courbes de Pappus autour de la parabole cartésienne. Nous l'interpréterons donc ainsi : pour Descartes, les courbes de Pappus peuvent « *estre recues en Geometrie* », ce sont des courbes géométriques et la quatrième famille est incluse dans la seconde, ce qui est évident pour nous.

Les courbes de Kempe

À l'occasion des « *autres moyens pour tracer & conçevoir des lignes courbes* » (pages 319 des *Essais* et 392 de AT VI), figurent les premiers exemples de courbes de Kempe, définies et construites grâce à l'aide de ce que nous appellerions volontiers un « *mécanisme articulé* » à la Kempe, si le

15. Par exemple, pour la spirale, on peut construire à la règle et au compas les points d'angle polaire $\dfrac{m\pi}{2^n}$ dès que l'on connaît celui qui correspond à $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, et ainsi disposer d'une famille partout dense aboutissant à une connaissance pratique suffisante de toute la courbe : mais il en existe aussi une autre infinité partout dense de points seulement approchables par un processus de limite. À l'inverse, pour une courbe géométrique d'équation $P(x,y) = 0$, il suffit de savoir résoudre toutes les équations $P(a,y) = 0$ et $P(x,b) = 0$, où a et b sont arbitraires : ce que permet *La Géométrie* dans l'esprit de Descartes qui ne savait pas que sa technique ne permettait pas en fait de dépasser le sixième degré.

16. Pages 340 des *Essais* et 412 de AT VI.

mot *mécanisme* ne faisait fâcheusement penser à des courbes mécaniques, ce qui serait un contresens. Les Anglo-saxons écrivent « *linkage* » ; nous pouvons dire *instrument articulé*, *système articulé*, *traceur articulé*, *liens articulés*, *appareil articulé*, *tiges articulées* et même *embiellage* pour évoquer les différents types d'instruments servant à définir et tracer (au moins de manière théorique) les courbes de Kempe, dont le *compas cartésien* évoqué ci-dessus, ouvrant pratiquement le Livre Second [17].

Le fait que ce compas et ses courbes (dont la Kampyle) soient situés dans une section intitulée « *Quelles sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en Geometrie* » prouve que, pour l'auteur de notre traité, les courbes de Kempe, celles donc que l'on peut concevoir et tracer par un système articulé [18] sont des courbes de Descartes, ce qui est facile à démontrer [19].

Le second exemple d'une courbe de Kempe, ou plus exactement d'une construction « à la Kempe », est donné à la page 319 des *Essais* (393 de AT VI) ; il concerne une hyperbole, immédiatement suivie page 322 des *Essais* (395 de AT VI) par l'introduction d'une parabole cartésienne, et ce dans le cadre explicité de courbes possédant des équations [20]. Ces deux exemples montrent bien que, pour Descartes, ces courbes sont géométriques : la troisième famille est donc bien pour lui incluse dans la seconde. Les mots importants sont « *l'instrument qui sert a la descrire* », pages 321 des *Essais* et 394 de AT VI, exactement répétés vingt lignes plus loin ; le terme « *instrument* » se trouvait déjà dans les pages 317 des *Essais* et 391 de AT VI, au moment de l'exhibition du *compas*. Cette expression tient lieu de définition, au passage, du critère « à la Kempe ».

17. Voir l'étude de Michel Serfati. Son utilité principale est de permettre la construction de *moyennes proportionnelles* en nombre arbitraire. On le retrouvera au début du Livre suivant, pages 370 des *Essais* et de AT VI, avec de nouveau deux occurrences du mot *instrument* : sa conception est très ancienne et remonte aux années de jeunesse de Descartes, lorsqu'il croyait pouvoir résoudre toutes les équations du troisième degré grâce à son aide. Le projet de l'algorithme algébrique cartésien, qui le hantait sans relâche, ne date évidemment pas de 1637 !

18. Que Descartes vise sans doute en creux par sa phrase « *on les imagine descrites par deux mouvements separés* », page 317 des *Essais* et 390 de AT VI, puisqu'un tel système conduit à un mouvement continu, donc acceptable et ouvrant la porte de la famille des courbes géométriques.

19. La seule difficulté est, bien entendu, de donner une définition suffisamment précise de ce qu'est un embiellage.

20. Pages 319 des *Essais* et 392 de AT VI.

Donnons un exemple, absent de *La Géométrie*, de tiges articulées adaptées à une courbe très élémentaire, une ellipse

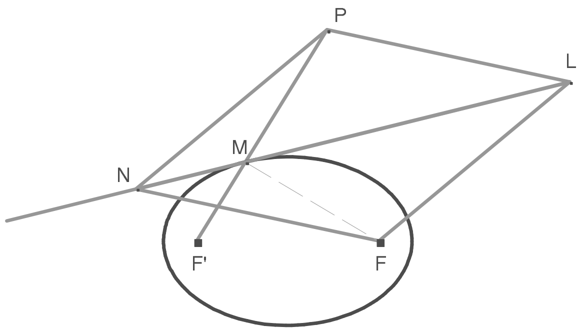


FIGURE 4.5 – *Un système articulé traçant une ellipse*

qui met en place une tige $F'P$ de longueur $2a$ (séparant les deux sommets de l'axe focal), en rotation autour du foyer F', un losange $FLPN$ admettant P et l'autre foyer F comme sommets et pouvant pivoter autour de P, et enfin une tige de sommet L passant systématiquement par le sommet [21] N : l'intersection M des deux tiges FP et LN décrit l'ellipse [22]. La démonstration repose sur le fait que L et N sont symétriques par rapport à FP, et que l'ellipse est caractérisée par l'égalité $MF + MF' = 2a$. Pour mettre au point ce traceur, nous nous sommes inspirés d'une figure extraite des *Cogitationes privatæ*, page 240 de AT X, montrant des losanges analogues formant un (autre) compas cartésien assurant la trisection d'un angle arbitraire

21. On peut imaginer la présence d'un anneau en ce point, à l'intérieur duquel cette tige peut glisser librement.

22. Nous n'insistons pas sur les longueurs, supposées suffisamment grandes, des longueurs FP, au moins égale à la distance séparant F' du sommet associé à F, et LN. La figure laisse entendre que LMN est la tangente en M : c'est en effet un bonus.

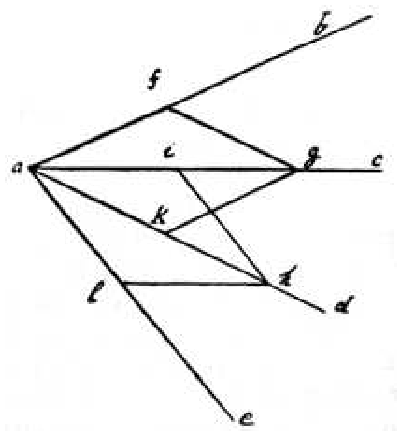


FIGURE 4.6 – *Le compas trisecteur de Descartes*

Ajoutons un peu arbitrairement aux courbes de Kempe celles qu'évoque Descartes aux pages 340 des *Essais* et de AT VI en ces termes

« *Et on ne doit pas rejetter non plus, celle ou on se sert d'un fil, ou d'une chorde repliée, pour determiner l'egalité ou la différence de deux ou plusieurs lignes qui peuvent estre tirées de chaque point de la courbe qu'on cherche* [...] *ainsi que nous avons fait en la Dioptrique*[23] *pour expliquer l'Ellipse & l'Hyperbole* »

auxquels il aurait pu ajouter la technique de tracé de certaines *Ovales* aux pages 356 des *Essais* et 428 de AT VI. Il est bien entendu évident que notre système de tiges coulissantes vient directement de cette technique dite des *jardiniers*. Nous admettrons donc que ces courbes forment une sous-famille de celle de Kempe, elle-même sous-famille de celles de Descartes.

Un problème majeur survient alors : existe-t-elle une courbe géométrique ne pouvant être décrite par un embiellage ? On peut sans doute *imaginer* - bien qu'il ne l'ait pas dit clairement - que Descartes ne le pensait pas. Cette question resta très longtemps ouverte : il faudra attendre 1876 pour que Sir Alfred Bray Kempe montre que courbes de Descartes et courbes de Kempe forment une et une seule famille[24].

23. Pages 90 et 140 des *Essais* et 166 et 214 de AT VI.
24. Voir les conclusions du chapitre fermant l'étude de notre traité.

La référence fondamentale sur cette question est, évidemment, le très beau livre d'Henri Lebesgue sur les constructions géométriques, rédigé *post mortem* par Lucienne Félix d'après son dernier cours au Collège de France.

Au bout du chemin : nos trois familles n'en forment en définitive qu'une chaîne de trois, la seconde et la troisième étant identiques, les courbes mécaniques formant exactement la différence entre les deux premières

Archimède $>$ **Descartes** $=$ **Kempe** $>$ **Pappus.**

Classifications de problèmes et de courbes

Les toutes premières lignes du Livre Second [25] nous renvoient à l'Antiquité (*cf.* Pappus, pages 38 du vol. 1 de Ver Eecke)

« *Les anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Problesmes de Geometrie, les uns sont plans, les autres solides, & les autres linéaires, c'est a dire, que les uns peuvent estre construits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles ; au lieu que les autres ne le peuvent estre, qu'on n'y employe pour le moins quelque section conique ; ny enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée.* »

L'expression *construction de problème* est fréquente chez Descartes : voir par exemple la lettre du 20 février 1639 à De Beaune (page 510 de AT II) ou, dans *La Géométrie* elle-même, les pages 303, 369, 380, 389, 402, 405 et 412 des *Essais*, 376, 442, 454, 463, 476, 478 et 485 de AT VI. Même, elle ouvre et ferme le Livre Troisième ! Regardant ces huit occurrences, on voit que la compréhension de ce mot, qui a un sens assez différent aujourd'hui, n'est pas simple mais qu'elle est essentielle pour comprendre le travail cartésien.

Même si son langage, mélangeant ainsi courbes et problèmes [26], peut paraître d'autant plus obscur que ce dernier mot intervient également à propos de la

25. Pages 315 des *Essais* et 388 de AT VI.
26. Selon la nature des outils nécessaires pour la résolution géométrique des équations $P(x, b) = 0$ où b est arbitrairement donné.

question de Pappus, nous l'adopterons ici et dirons qu'un « **problème**[27] » associé à un polynôme $P(x, y)$ est réputé être

a) **Plan**, si le degré de P relatif à la variable x, pris au sens moderne, est inférieur ou égal à deux soit, dans le langage de Descartes à la fin du Livre Premier, lorsque x n'a pas plus que deux *dimensions*. C'est le cas pour une solution d'un problème de Pappus en deux, trois ou quatre droites, ou même en cinq droites si elles ne sont pas parallèles. La construction de ces racines[28] x peut se faire à l'aide de droites et de cercles (à la règle et au compas ; on pourra se rapporter aux pages 313-4 et 381 des *Essais*, 386 et 454 de AT VI, où Descartes cite explicitement ces deux instruments).

b) **Solide**, si ce degré est trois ou quatre. C'est le cas pour une solution d'un problème de Pappus en un nombre de droites allant de cinq à huit, ou même en neuf droites si elles ne sont pas parallèles. La construction des racines peut se faire à l'aide de coniques auxiliaires (plus précisément d'un cercle et d'une parabole), même si dans certains cas particuliers, comme celui d'une équation bicarrée, règle et compas peuvent encore suffire.

c) **Linéaire** (ou *plus que solide*), si ce degré est supérieur ou égal à cinq. C'est le cas pour une solution d'un problème de Pappus en neuf droites ou davantage. L'auteur affirme (pages 314 des *Essais* et 387 de AT VI) qu'on peut toujours le résoudre car la construction des racines peut se faire à l'aide d'une famille de courbes auxiliaires qu'il sait construire par itérations de sa Transformation à partir d'une parabole ordinaire.

   Le seul cas vraiment traité, au Livre Troisième de *La Géométrie*, est celui où le degré est cinq ou six, correspondant à un éventuel problème de Pappus en neuf à douze droites (ou même treize non parallèles). L'outil permettant la construction dans le cas général est le couplage d'un cercle et d'une Parabole de Descartes. Ici l'algorithme fonctionne bien, mais nous verrons que la méthode cartésienne devient insuffisante au delà, ruinant l'espoir d'avoir pu mettre ainsi un point final à la théorie des équations.

27. Souvent associé à une demande de construction comme placer une parabole donnée sur un cône donné.

28. Plus précisément de segments ayant x comme longueur.

Pour nous, et ce depuis la fin du dix-septième siècle, un polynôme P est surtout caractérisé par son **degré** [29]. Comme nous le verrons, ce mot figure dans Descartes, avec un sens différent ; mais on trouve aussi chez lui une classification voisine des *courbes*, encore appelées *lieux*.

En effet un tel **lieu** associé à un polynôme $P(x, y)$ est réputé être de **genre**

a) **Un** si le degré de P relatif à l'ensemble des variables (pris au sens moderne) est inférieur ou égal à deux : Descartes démontre avec brio qu'il résout un problème de Pappus en trois ou quatre droites (voir les pages 324-335 des *Essais* et 397-407 de AT VI).

   Parmi eux, on distingue les lieux « plans » (les droites et les cercles) et les lieux « solides » (les coniques autres que les cercles). Pourtant Descartes dira lui-même au passage, à propos d'un autre problème de Pappus sans lien avec les précédents [30], que les premiers sont des cas particuliers des autres (« *Car lorsque les problèmes sont plans, on en peut toujours trouver la construction par celles-ci* : il fait allusion au fait que l'on trouve parfois des équations de degré trois ou quatre alors que, par exemple, deux équations du second degré suffisent comme pour résoudre $ax^4+bx^2+c=0$) ; cette contradiction est sans grande importance (comme lorsqu'il change d'avis sur l'appartenance du cercle aux sections coniques [31]).

b) **n** $\geqslant 2$ si ce degré en (x, y) est égal à $2n-1$ ou $2n$. S'il résout un problème de Pappus - et Descartes en est persuadé à tort - c'est qu'il est proposé en $4n-3$, $4n-2$, $4n-1$ ou $4n$ droites. On dit que les lieux associés à P sont **linéaires**. Parmi eux figurent les **sursolides**, c'est-à-dire de genre deux : le degré - moderne - est égal à trois ou quatre, ce qui caractérise respectivement les *cubiques* et les *quartiques* ; le problème de Pappus associé est alors en un nombre de droites compris entre cinq et huit [32].

29. Pour être tout-à-fait rigoureux, une courbe d'équation $P(x, y) = 0$ est aujourd'hui qualifiée comme étant d'*ordre* n, degré en (x, y) de P.

30. Pages 389 des *Essais* et 463 de AT VI.

31. Son exemple numérique de résolution du problème de Pappus à trois ou quatre droites, pages 333 des *Essais* et 405 de AT VI, est circulaire.

32. On voit que la notion de genre renvoie à un problème de construction du lieu concerné, problème qui a été qualifié dans la classification précédente.

Par exemple la *parabole cartésienne*[33] est une cubique, donc de genre deux, donc sursolide et linéaire, alors que le problème de sa construction est plan (cinq droites non toutes parallèles).

Monter peu à peu comme par degrés

Descartes dit qu'un lieu est plus **composé** qu'un autre, ou même *d'un degré plus composé*[34], s'il est de genre strictement supérieur. Parfois cette expression est à prendre dans un sens plus précis encore, et signifie que les genres des deux lieux sont deux entiers consécutifs[35].

Pour mesurer la difficulté de suivre l'auteur dans ses comparaisons, donnons simplement, sans commentaires qui nous entraîneraient trop loin, seize couples (e, a) de noms de pages, respectivement des *Essais* et de AT VI, où interviennent de telles comparaisons, parfois même à plusieurs reprises : (301,374), (308,381), (309,381), (314,387), (315,388), (315,389), (316,389), (317,390), (318,392), (319,392), (335,407), (371,444), (388,463), (389,464), (401,475) et (413,485).

Il est bien clair que toutes ces occurrences, en des formules variées[36] renvoient directement au plus célèbre des préceptes de *Discours*

« *Le troisiesme de conduire par **ordre** mes pensées, en commenceant par les objets les **plus simples**, & les plus aysez a connaistre, pour monter peu a peu comme par **degrés** jusques a la connaissance des **plus composez**. Et supposant mesme de l'ordre entre ceux qui ne se precedent point naturellement les uns les autres.* »

33. On devrait dire « une » parabole cartésienne, car elles ne sont pas nécessairement deux à deux semblables ; mais l'usage semble plus laxiste (comme pour les *Ovales*).

34. Comme on dit dans le langage commun un son d'un ton plus haut, un officier d'un grade plus élevé, une chaussure d'une pointure plus grande ou même un espace de dimension supérieure, avec toujours la même ambiguïté qui renvoie au contexte.

35. On peut lire également la*Dissertatio tripartita* de Pierre Fermat, pages 121 du vol. I et 112 du vol. III de ses *Œuvres complètes*.

36. Courbe ou problème d'un degré plus composé, ligne ou instrument plus composé, courbe ou équation fort composée, courbe de plus en plus composée par degrés à l'infini, genres si composés...

Si *La Géométrie* est surtout, pour nous, un traité d'algèbre plutôt qu'un strict exemple d'application de la *Méthode*, nous disposons ici des passages explicites où cette filiation apparaît cependant, mais il est naturellement tout à fait raisonnable de penser que Descartes avait déjà bâti dans sa tête ses classifications qu'il inventait au fur et à mesure, avant d'écrire le *Discours*. Pour le reste, le livre *La Géométrie* est un objet indépendant des trois autres.

Les courbes citées dans l'œuvre de Descartes

Pour une fois, nous sortirons du cadre strict de *La Géométrie*, pour regarder, notamment dans la *Correspondance*, les allusions faites par Descartes à certaines courbes [37], à étudier plus précisément dans une recension de toute son œuvre mathématique.

Les courbes citées dans *La Géométrie*

a) La *Spirale d'Archimède*, d'équation polaire générale $\rho = a\,\theta$, pages 317 des *Essais* et 390 de AT VI ; nous en avons représenté page 161 une partie correspondant à des valeurs positives raisonnables de la mesure de l'angle polaire θ, à compléter par une symétrie d'axe vertical. Elle est célèbre parce que, bien que « mécanique », la tangente en l'un de ses points s'obtient par une construction très simple due à son découvreur

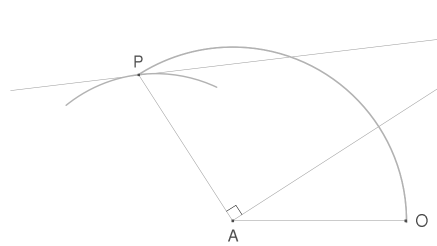


FIGURE 4.7 – *Une tangente à la spirale d'Archimède*

où $AO = AP$ et $AZ = AP\,\tan V = \rho\,\dfrac{\rho}{\rho'} = \rho\,\theta = \overset{\frown}{OP}$.

37. En dehors des droites, cercles et autres coniques, à cause de la trop grande fréquence de leurs apparitions.

b) La *Quadratrice de Dinostrate*, d'équation semi-polaire $y = \theta$, pages 317 des *Essais* et 390 de AT VI ; nous en avons donné page 162 deux aperçus.

c) Les *Conchoïdes de Nicomède*, pages 317, 322 et 351 des *Essais*, 390, 395 et 423 de AT VI ; nous les avons brièvement évoquées dans le chapitre sur le problème de Pappus, et en parlerons plus longuement dans le chapitre sur les normales à une courbe.

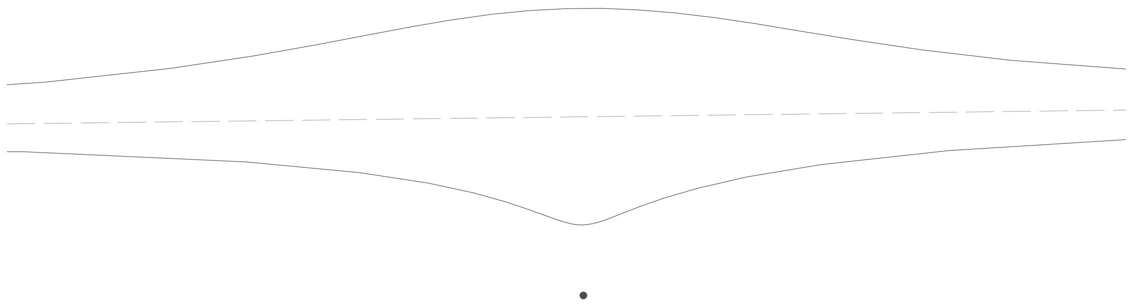


FIGURE 4.8 – *Une conchoïde de Nicomède à point double isolé*

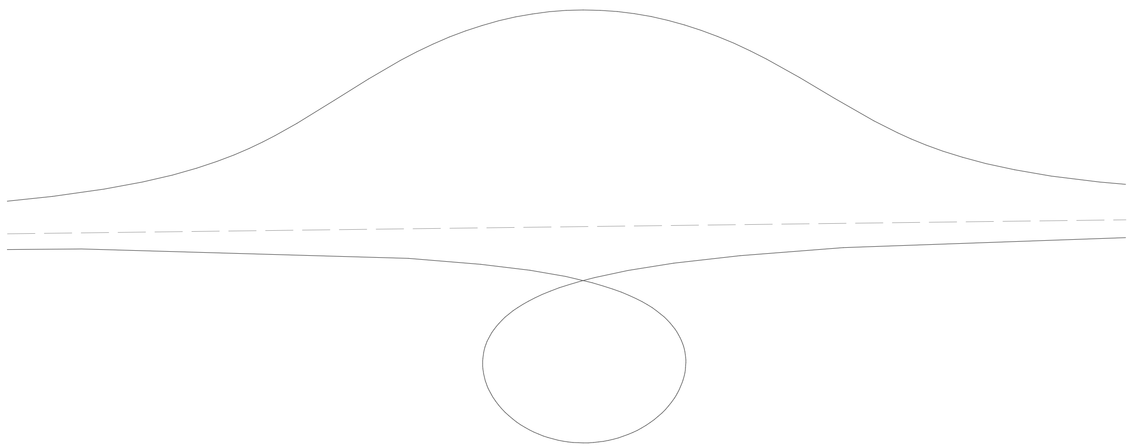


FIGURE 4.9 – *Une conchoïde de Nicomède à point double réel*

Elles ont été conçues pour résoudre mécaniquement (c'est-à-dire avec d'autres outils que la règle et le compas) l'important problème de la *trisection de l'angle*, que nous retrouverons plus bas.

d) La *Cissoïde de Dioclès*, pages 317 des *Essais* et 390 de AT VI ; nous l'avons brièvement évoquée dans le chapitre sur le problème de Pappus, et en parlerons un peu plus longuement dans le chapitre sur les normales à une courbe.

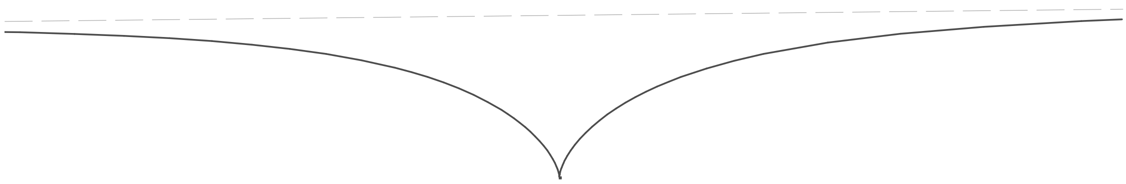


FIGURE 4.10 – *La cissoïde de Dioclès*

e) Une famille de courbes contenant la *Kampyle d'Eudoxe*, pages 318 des *Essais* et 391 de AT VI ; nous en parlerons dans le chapitre sur les équations algébriques.

f) Les *Paraboles de Descartes*, pages 309, 322, 336, 343, 348, 349, 404 et 407 des *Essais*, 382, 395, 408, 415, 420, 421, 477 et 479 de AT VI ; elles apparaissent évidemment dans de nombreux chapitres de cette étude.

g) Les *Ovales*, pages 344 et 352-68 des *Essais*, 416 et 424-439 de AT VI ; nous leur avons consacré un chapitre entier.

Les courbes citées hors *La Géométrie*

Ces courbes sont à revoir lors d'une étude générale des mathématiques dans la *Correspondance*.

a) Une *Courbe cylindrique*, citée dans une lettre à Mersenne du 8 octobre 1629, page 25 de AT I, qui pose problème car son évocation est très brève ; elle servirait à diviser un angle en 27 partes (à la suite de trois trisections sans aucun doute) mais pas en 29 (alors qu'un compas inspiré de celui de la page 166 ferait l'affaire). Cela pose une énigme bien complexe.

b) Les *Spirales logarithmiques*, d'équation polaire générale $\rho = \mathbf{e}^{m\theta}$, citées dans une lettre à Huygens du 5 octobre 1637, page 439 de AT I, puis dans deux lettres à Mersenne des 12 septembre et 11 octobre 638, pages 360 et 390 de AT II.

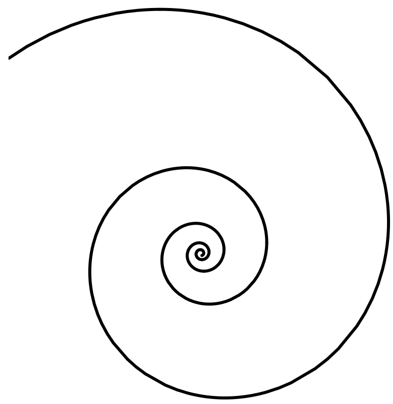


FIGURE 4.11 – *Une spirale logarithmique*

c) Le *Folium de Descartes*, d'équation $x^3 + y^3 = p\,xy$, cité (avec équations, l'une verbale et l'autre en symboles, et figures approximatives) dans deux lettres à Mersenne des 18 janvier et 23 août 1638, pages 490 de AT I et 312 de AT II.

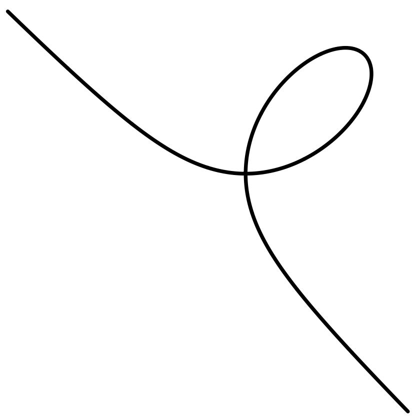


FIGURE 4.12 – *Le Folium de Descartes*

Cette courbe, encore appelée *fleur de jasmin*, *galand* ou *galant*, a été l'objet d'échanges plus ou moins feutrés entre Descartes et le clan Fermat-Roberval. Au départ, seule la partie fermée constituée des points dont les coordonnées ont même signe, a été considérée par nos duellistes, et l'asymptote du coup négligée. Une conséquence intéressante de ce fait c'est que l'idée d'une courbe avec *point anguleux*, seul exemple que l'on peut trouver chez Descartes, n'effraya personne alors.

d) La *Cycloïde*, ou encore *Roulette*, citée dans des lettres à Mersenne des 27 mai, 27 juillet, 23 août 1638 et 30 avril 1639, pages 135, 257, 308 et 532 de AT II.

e) Des *cordes molles*, à propos d'un problème de dynamique, citées dans deux lettres à Mersenne des 13 juillet et 11 octobre 638, pages 238 et 390 de AT II.

f) Des *Paraboles généralisées* d'origine fermatienne, d'équation générale $y^m = x^n$, évoquées comme en passant, appelées « *lignes composées à l'imitation de la parabole* », dans une lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, page 248 de AT II.

g) La courbe *Exponentielle*, ou encore *Logarithmique*, citée dans une lettre à De Beaune du 20 février 1639, page 514 de AT II.

   La détermination de cette courbe, liée aux doubles progresssions géométrique et arithmétique de John Napier en 1614 et citées par Descartes en page 222 de AT X, est essentielle, comme l'étude de la cycloïde, car elle en montre une face, non plus d'algébriste géométrique comme d'habitude, mais comme précurseur du calcul différentiel et intégral.

h) Dans un autre esprit, dans les *Excerpta Mathematica* (page 300 de AT X), la parabole, conique des plus élémentaires, joue un rôle essentiel : pour une fois, Descartes énonce (sans démonstration) un théorème montrant comment une parabole en engendre une autre dans un énoncé assez obscur, qui mérite un décryptage sérieux ne s'éclairant qu'au moyen de généralisations importantes. La rareté du fait mérite qu'on s'y arrête [38].

38. Voir aussi la *Propositio Demonstrata*.

Le rapport de Descartes à l'espace

L'essentiel du travail cartésien porte sur le plan. Il y a pourtant certaines exceptions : nous trouvons par exemple une allusion (certes peu explicite) à un cylindre en 1629 à propos de la division d'un angle en vingt-sept parties égales : mais il s'agit d'un problème concernant avant tout le plan.

Plus sérieux est le fait que, jeune homme, il a écrit tout un traité sur les *polyèdres* : le fameux *De Solidorum Elementis*. Ce texte n'a rien à voir avec le concept de courbes, ni d'ailleurs non plus avec la géométrie analytique, pour ne pas parler de la *mathesis universalis*.

Enfin nous trouvons dans *La Géométrie* elle-même (fin du Livre Second) une référence à une courbe de l'espace [39]

« *Au reste je n'ay parlé en tout cecy, que des lignes courbes, qu'on peut descrire sur une superficie plate ; mais il est aysé de rapporter ce que j'en ay dit, à toutescelles qu'on saurait imaginer estre formées, par le mouvement régulier de quelque cors, dans un espace qui a trois dimensions.* »

Il énonce très correctement un début de géométrie descriptive (« *deux plans qui s'entrecouppent a angles droits* »), ce qui doit manifestement être porté à l'actif de son bilan, mais commet une énorme bourde au sujet d'une normale [40] à une telle « *courbe, qui a trois dimensions* » : il ne maîtrisait donc pas ce sujet.

Pourtant rompu à la géométrie d'Euclide, il aurait du savoir qu'un angle droit, à l'exception des cas où l'un de ses côtés est parallèle au plan de projection, ne se projette pas selon un angle droit. Mais il ose pourtant écrire ce que nous ne pouvons admettre aujourd'hui

« *Mesme si on veut tirer une ligne droite, qui couppe cette courbe au point donné à angles droits : il faut seulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, une en chacun, qui couppent a angles droits les deux lignes courbes* »

planes qui sont ses projections horizontale et frontale. Hélas !

39. Pages 368 des *Essais* et 440 de AT VI.
40. Qu'il croit unique : « **la** *ligne droite cherchée* ».

Annexe I : Le théorème des deux paraboles

« *Dans une parabole, si l'on mène une autre parabole dont le sommet est au foyer de la première et la distance du sommet au foyer est la moitié de celle qui est dans la première, et que l'axe de l'une et de l'autre soit sur la même droite : la parabole inscrite passera par les foyers de tous les diamètres de la parabole circonscrite* ».

Ce texte figure, tout à fait isolé, à la fin de la partie III des *Excerpta Mathematica*; on peut le trouver, respectivement en latin [41] puis en français, aux pages 300 de AT X et 544 du volume III des *Œuvres complètes* chez Gallimard. Il est littéralement incompréhensible pour un lecteur moderne.

Un peu de vocabulaire

Les responsables de cette fâcheuse obscurité sont les deux mots « diamètres » et « foyers ».

- Le premier est facile à situer lorsqu'il s'agit d'une ellipse ou une hyperbole (d'ailleurs dites « coniques à centre ») : un diamètre est alors tout simplement *une droite qui passe par le centre de symétrie*. Pour une parabole il s'agit d'*une droite parallèle à l'axe* de cette courbe. Cela peut se comprendre par le fait qu'une parabole, peut-être considérée comme « limite » d'une conique à centre « étirée » de façon à avoir un point à l'infini et un seul; ce point étant évidemment dans la direction de l'axe, le lien d'avec les autres coniques est alors parfaitement clair.

De manière synthétique, on peut démontrer - cette fois-ci pour tous les types de coniques - qu'**un diamètre est l'axe d'une symétrie, éventuellement oblique, qui conserve globalement la conique considérée**. Cette définition est évidemment la meilleure, mais il y en a d'autres. Par exemple, une direction δ étant donnée, le lieu des milieux des cordes de la conique de

41. *In parabola si ducatur alia parabola cujus vertex sit in foco prioris et distantia verticis a foco sit dimidia pars ejus quæ est in priori, et axis utriusque sit in eadem linea recta : inscripta transibit per focos omnium diametrarum circumscriptæ.*

direction δ est une partie d'une droite [42], alors appelée *diamètre associé à (ou conjugué de) la direction* δ.

Dans de nombreux cas, un diamètre possède un (ou deux) point(s) d'intersection avec la conique ; sa direction associée est alors celle de la (ou des) tangente(s) en ce(s) point(s), appelé(s) *sommet(s)* du diamètre. Tout cela était parfaitement connu des Grecs, et sans doute avant Euclide.

- Si donc la notion de diamètre reste encore familière à un petit nombre de personnes aujourd'hui, celle de *pôle d'un diamètre* est par contre obscure pour tout le monde : à notre connaissance, si elle a peut-être été employée par d'autres mathématiciens, son éventuel emploi n'a guère (voire pas) laissé de trace. Il nous faut donc essayer de reconstituer, à partir de ce qui est à notre connaissance un *hapax*, quelle signification il faut lui donner : heureusement le théorème énoncé par Descartes - malheureusement sans démonstration - permet une reconstitution plausible, que nous allons tenter ci-dessous en posant *a priori* cette définition [43]

***Soit* D *la polaire relative à une conique* Γ *d'un point fixé* F. *Le pôle relatif à* F *d'un diamètre* Δ *de* Γ *est son intersection d'avec la polaire relative à* Γ *du point* $\Delta \cap D$.**

La notion de *polaire* d'un point relative à une conique Γ est très ancienne : nous verrons plus loin son utilisation chez Apollonius [44]. Par exemple, *la polaire d'un foyer d'une conique est la directrice qui lui est associée.* Mais elle est aujourd'hui assez peu connue : nous devons donc en redonner une définition

La polaire d'un point F *relative à une conique est la droite support de l'ensemble des points* H *tels que la droite* FH *coupe la conique en deux points* U *et* V *tels que la division* (F,H,U,V) *soit harmonique* [45].

42. De façon plus précise, ce lieu est un segment pour une ellipse, une demi-droite pour une parabole, et une droite, la réunion de deux demi-droites ou l'ensemble vide pour une hyperbole. Le tout dernier cas, *a priori* peu naturel, est cependant obtenu lorsque δ est la direction de l'une des deux asymptotes.

43. À ne pas confondre avec ce que l'on appelle usuellement le pôle d'un diamètre, qui par définition est un point à l'infini qui ne nous intéresse pas ici directement.

44. Ainsi que celle de *pôle* d'une droite relatif à la même conique.

45. C'est-à-dire vérifie l'égalité $\overline{UF} \cdot \overline{VH} + \overline{VF} \cdot \overline{UH} = 0$ où le nombre $\overline{AB}$ est la *mesure*

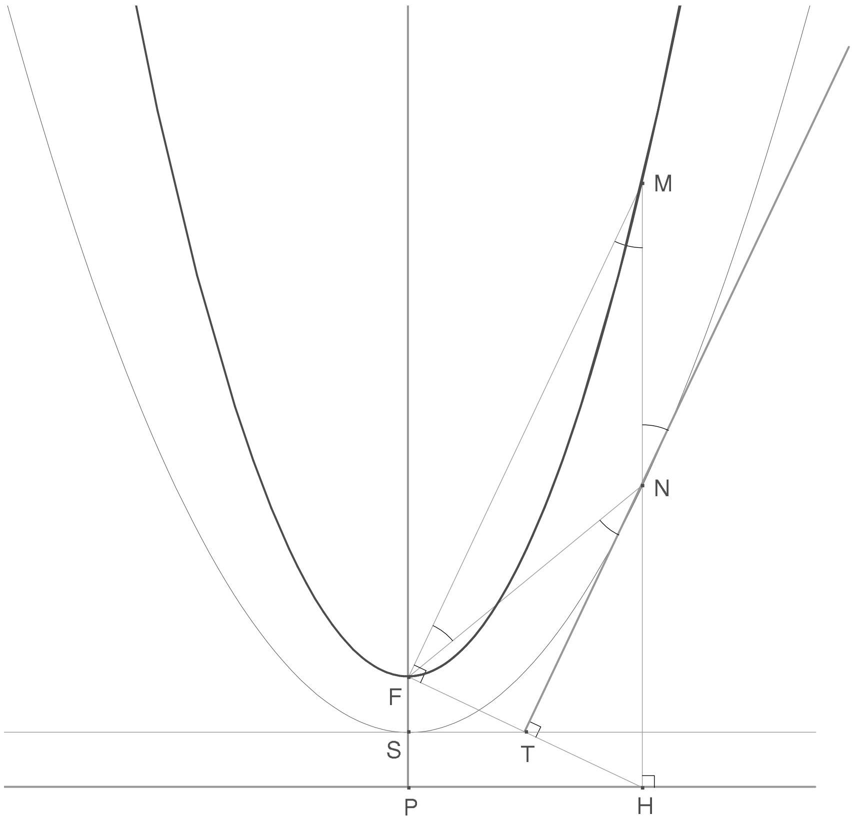


FIGURE 4.13 – *Paraboles circonscrite et inscrite (épaissie)*

Les théories des divisions harmoniques[46] et, partant, des pôles et polaires était connue d'Euclide, comme le prouvent son ouvrage (malheureusement perdu) des *Porismes*. Par exemple, la preuve que la polaire d'un point par rapport à un hyperbole décomposée en deux droites est elle-même une droite se trouve dans Pappus[47], Livre VII, V Proposition 131, page 677 du volume II de la traduction Ver Eecke, et le Lemme V de la page 88 de la tentative de reconstitution de Michel Chasles. Le même théorème pour le cercle se trouve, pour sa part, dans Pappus, Livre VII, VII Proposition 154, page 704

algébrique du segment AB si son support rectiligne est orienté, c'est-à-dire AB si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a même direction que le support, et $-AB$ sinon.

46. Et plus généralement des rapports anharmoniques de quatre points alignés.

47. Ses remarques sur le livre des *Porismes* commencent à la page 669 du du volume II de la traduction Ver Eecke.

du volume cité. Elle ne pouvait donc qu'être familière à Descartes, grand lecteur de Pappus.

La définition de la parabole utilisée dans la figure ci-dessus (soit l'égalité $NF = NH$) est absente des *Coniques* d'Apollonius, mais figurait auparavant dans un autre texte perdu d'Euclide : les *Lieux à la surface*. C'est en tout cas ce que l'on peut déduire de la proposition 236 du Livre VII de Pappus (pages 794 puis 801 du second volume de la traduction Ver Eecke) [48]. Il est donc clair que Descartes pouvait la considérer comme tout à fait classique dans la géométrie antique dont il était un fin connaisseur : cela est d'ailleurs certainement également vrai pour Apollonius lui-même.

Cela dit, nous donnerons plus loin (page 181) une autre manière de définir le problème de Descartes, qui évite cette notion de pôle et polaire, et peut sembler plus lisible à un lecteur non averti.

Une solution courte et naturelle

La démonstration suivante est aujourd'hui la plus naturelle, mais elle s'appuie sur la théorie moderne des pôles et polaires en géométrie projective [49]. Voici un énoncé du théorème de Descartes adapté à cette solution

Le pôle d'un diamètre relatif au foyer F d'une parabole décrit une parabole de sommet F homothétique dans le rapport 1/2

c'est-à-dire plus explicitement

L'intersection d'un diamètre d'une parabole d'avec la polaire de sa projection sur la directrice décrit une parabole homothétique dans le rapport 1/2 dont le foyer est le sommet.

48. Cela se trouve sous le titre général *Pour les lieux à la surface* ; plus généralement, la définition d'une conique par foyer et directrice occupe les propositions 238, 236 et 237, aux pages 793-802 de ce tome. Voir la préface en page C du premier volume. Assez curieusement, l'énoncé de la proposition 238, la plus générale, figure avant les deux autres, de numéros inférieurs, qui contiennent les preuves !

Pour voir que la projection de F sur la tangente en N appartient à la tangente au sommet, on pourra s'inspirer de la Proposition XLV du troisième livre d'Apollonius, page 262 de la traduction Ver Eecke, bien que la parabole n'y soit pas citée. De même pour l'égalité des angles $\widehat{TNF}$, $\widehat{NFM}$ et $\widehat{NMF}$ (XLVI, page 265).

49. C'est-à-dire où l'on considère librement la notion de point à l'infini.

Par définition la polaire de H contient le conjugué harmonique de H par rapport aux deux points d'intersection du diamètre HN d'avec la parabole, à savoir N et le point à l'infini de l'axe, c'est-à-dire **le symétrique** M de H par rapport à N. Cela prouve que M est le pôle du diamètre, et qu'il décrit la courbe affine de la parabole initiale dans l'affinité orthogonale d'axe la directrice PH et de rapport 1/2.

Reste à voir que cette courbe est encore une parabole. Ici la géométrie analytique règle l'affaire en un instant : la directrice de la parabole d'équation $x^2 = 2py$ étant définie par l'égalité[50] $y = -\frac{p}{2}$, les coordonnées (X, Y) de H valent $X = x$ et

$$Y = 2\left(y + \frac{p}{2}\right) - \frac{p}{2} = 2\,y + \frac{p}{2} = \frac{x^2}{p} + \frac{p}{2} = \frac{X^2}{p} + \frac{p}{2}\cdot$$

Une solution apollonienne érudite

Si bien sûr la dernière partie de la solution précédente était tout à fait du style de Descartes, qui y a peut-être testé sa méthode sur un problème qu'il avait résolu auparavant par la géométrie classique, la première est plus difficile à rattacher à notre auteur : la liberté de considérer les points à l'infini comme de véritables points était encore alors en germe chez Desargues puis chez Pascal un peu plus tard[51]. Pour une reconstitution de la preuve originale, mieux vaut rechercher chez celui qui à tout appris à Descartes : son maître Apolllonius. Trouvera-t-on dans ses *Coniques* les matériaux d'une autre preuve plus vraisemblable ?

La réponse est positive. Mais elle demande une autre définition[52] du pôle d'un diamètre dans le cas particulier d'une parabole

Soit* D *la polaire relative à une parabole* Γ *d'un point fixé* F*. Le pôle relatif à* F *d'un diamètre de* Γ *est le symétrique de son intersection d'avec* D *par rapport à son intersection d'avec* Γ*.

50. Voir les Propositions XI, XX et LII du premier livre d'Apollonius, pages 21, 42 et 97 de la traduction Ver Eecke. La notation $2p$ pour le *latus rectum* est moderne.

51. On sait par ailleurs que jamais Descartes, bien qu'admiratif de l'œuvre de Desargues, n'a semblé adhérer à sa nouvelle géométrie.

52. Équivalente à la précédente grâce à la première partie de la solution courte.

Le mot « foyer » qui y figure peut se comprendre, puisque M est bien le foyer F lorsque N est le sommet S.

Une autre définition, encore plus simple, lui est aussi équivalente si l'on oublie F et parle de maintenant de relativité par rapport à D et non plus de F, pôle de D ; cette fois-ci il ne reste plus de trace des pôles et polaires

Le pôle relatif à une droite* $\mathbf{D}$ *d'un diamètre d'une parabole* $\boldsymbol{\Gamma}$ *est le symétrique de son intersection d'avec* $\mathbf{D}$ *par rapport à son intersection d'avec* $\boldsymbol{\Gamma}$*.

Le problème est donc maintenant de démontrer que

Le symétrique de l'intersection d'une droite fixe d'avec un diamètre* $\boldsymbol{\Delta}$ *d'une parabole* $\boldsymbol{\Gamma}$ *par rapport à* $\boldsymbol{\Gamma} \cap \boldsymbol{\Delta}$ *décrit une parabole homothétique dans le rapport 1/2.

Nous nous limiterons au cas où F est *intérieur*, c'est-à-dire par exemple que la direction conjuguée de celle du diamètre passant par F coupe Γ en deux points Z et Z' : nous admettrons qu'alors toute droite passant par F et un point extérieur (c'est-à-dire à partir duquel on peut mener deux tangentes) rencontre la courbe [53] à Γ, et noterons ci-dessous II XXX 146 comme abréviation de la Proposition XXX du Livre II d'Apollonius, page 124 de la traduction Ver Eecke.

Soit F un point fixe et (Q, Q') une corde variable passant par F d'une parabole fixe Γ par rapport à laquelle F est intérieur. Nous noterons H l'intersection des tangentes en Q et Q' et N le sommet (intersection avec Γ) du diamètre de Γ passant par H et coupant la droite QQ' en M.

- II XXX 146 implique que M est le milieu de QQ'.
- II V 122 implique que la tangente en N à Γ est parallèle à $QQ'FM$.
- I XXXIII 60 implique que N est le milieu de HM, et M est donc le point dont on recherche le lieu [54].

53. Voir la proposition XIX du premier livre des *Coniques* d'Apollonius (page 41 de la traduction Ver Eecke). En fait le résultat est général et ne demande pas cette précaution, mais nous avons préféré simplifier au maximum notre étude.

54. Cette proposition est spécifique à la parabole.

- III XXXVII 249 implique que, si (U, V) sont les deux points d'intersection de Γ avec la droite HF (F est intérieur et H extérieur), la division (F, H, U, V) est harmonique [55].

- III XXXVIII 251 implique que, si ZZ' est la corde de Γ dont F est le milieu [56] et D la parallèle à ZZ' issue de P, alors la droite UFV coupe D en O conjugué harmonique de F relativement à (U, V), d'où $H = O$ décrit bien une droite. Par suite M appartient donc à la transformée par une affinité [57] de rapport 2 de la parabole initiale.

- I XI 21 ou I XX 42 et I LII 97 ou I LIII 99 permettent alors de remonter, comme plus haut, de $x^2 = 2py$ à $X^2 = p\left(Y - \frac{p}{2}\right)$ et de conclure.

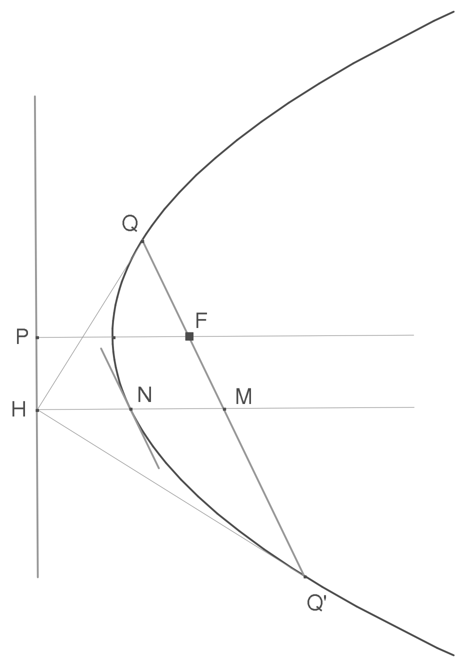


FIGURE 4.14 – *La preuve apollonienne*

55. Si l'on sait qu'une polaire, définie par une condition de ce genre, est une droite, l'item suivant est inutile. Mais nous préférons rester ici au plus près du texte grec, où cela n'est pas expressément dit.
56. Une telle corde a nécessairement pour direction la conjuguée de celle du diamètre passant par F. On peut noter qu'elle existe trivialement si F est le foyer.
57. Oblique ou orthogonale suivant le cas.

Une solution euclidienne percutante

Cette fois-ci, nous supposerons explicitement que F est le foyer de la parabole, ce qui va nous donner une preuve très courte, sans pôles ni polaires, mais sans doute trop artificielle pour être la démonstration d'origine.

Sur la figure ci-dessous, nous avons deux points P et G tels que $PF = p = 4a$ et $FG = a$, et deux points Q et L tels que $HQ = PG = 5a$ et $NL = a$. Posons $r = FH = FN = FM$. Alors, d'après les propositions 12 et 13 du deuxième Élément d'Euclide (pages 403-6 du premier volume de la traduction Heath)

$$MG^2 = LM^2 + LG^2 - 2\,\overline{LM} \cdot \overline{LQ} = (r-a)^2 + r^2 + 2\,(r-a)\,(r-4a)$$

$$= 4\,r^2 - 12\,ar + 9a^2 = (2r-3a)^2 = MK^2$$

ce qui démontre le théorème de Descartes de façon purement euclidienne (avec G pour foyer, F pour sommet et la parallèle à HP passant par K pour directrice), mais qui semble - si jolie soit-elle - trop artificielle, bâtie « après coup » pourrait-on dire [58].

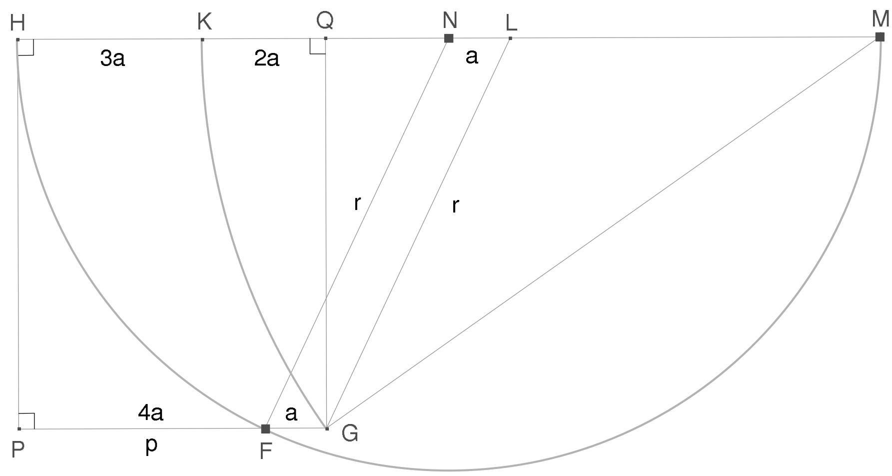


FIGURE 4.15 – *La preuve euclidienne*

58. On peur remarquer que l'égalité $\overline{LQ} = 4a - r$ équivaut à $r\cos\theta = r - p$, soit enfin $r = \dfrac{p}{1-\cos\theta}$, une équation polaire de la parabole.

Une preuve analytique pour une conique générale

La définition des pôles de diamètres a été donnée plus haut (voir page 178) pour une conique Γ autre qu'une parabole. Le résultat de Descartes s'étend alors, pour un point F arbitraire, si l'on accepte de perdre quelques renseignements sur Γ'. Plus précisément

Si H décrit la polaire de F relative à une conique Γ, sa polaire coupe le diamètre $HONN'$ passant par H en un point M appartenant à une conique Γ' indépendante de H.

Il est connu que la polaire de H, contenant M, passe par F puisque celle de F passe par H, et qu'elle est parallèle à la tangente en un point N intersection du diamètre passant par H. Par définition apollonienne d'un diamètre, si FM coupe Γ en Q et Q', M est donc le milieu[59]. Cela permet un calcul facile, à partir de l'équation générale des coniques (à centre ou non), essentiellement connue d'Apollonius.

Nous supposerons donc que F a pour coordonnées (u, v) et que Γ a pour équation $y^2 = 2p\,x + q\,x^2$. Une droite variable passant par F a pour équation $\lambda\,(x-u) + \mu\,(y-v) = 0$, d'où $\lambda = h\,(Y-v)$ et $\mu = -h\,(X-u)$ pour tout point de coordonnées (X, Y) qu'elle contient. Si elle coupe Γ en un segment QQ' de milieu M, Q et Q' ont une abscisse x vérifiant l'égalité

$$(q\mu^2 - \lambda^2)\,x^2 + 2\,(u\lambda^2 + v\lambda\mu + p\mu^2)\,x - (u\lambda + v\mu)^2$$

d'où l'abscisse $X = \dfrac{u\lambda^2 + v\lambda\mu + p\mu^2}{\lambda^2 - q\mu^2}$ de M, et l'égalité

$$X\,[(Y-v)^2 - q\,(X-u)^2] = u\,(Y-v)^2 - v\,(Y-v)\,(X-u) + p\,(X-u)^2$$

qui se simplifie, après division par $X - u$, en

$$Y^2 - q\,X^2 + (uq - p)\,X - v\,Y + up = 0.$$

Cette équation définit bien une conique Γ', courbe de Pappus puisque définissable par l'égalité $Y\,(Y-v) = (X-u)\,(qX+p)$, passant par $F(u, v)$, le point de coordonnées $(u, 0)$ et, si $q \neq 0$, le centre $\omega(-p/q, 0)$ de Γ.

---

59. On retrouve ainsi la seconde définition de M en page 181 du segment QQ'.

On notera que les équations de Γ et Γ' ont même termes de plus haut degré, à savoir $y^2 - q\,x^2$: les directions asymptotiques des deux coniques sont les mêmes. Comme dans l'équation générique des coniques le nombre q est égal à $\mathbf{e}^2 - 1$, où $\mathbf{e}$ est l'excentricité de Γ, il semble normal d'en déduire que les excentricités de Γ et Γ' sont égales et que les deux courbes sont homothétiques. Nous savons que c'est le cas pour les paraboles : on verra plus loin que c'est aussi le cas pour les ellipses. Mais pour les hyperboles, l'excentricité $\mathbf{e}'$ de Γ' peut vérifier l'égalité $\mathbf{e}'^{\,2} - 1 = \dfrac{1}{q}$ et non q. En voici un exemple assez simple où Γ est une hyperbole d'excentricité $\sqrt{3}$

$$u = 0, \quad v = 2, \quad p = 1, \quad q = 2$$

d'où les équations

$$y^2 = 2x + 2x^2, \qquad \text{soit encore} \qquad \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Son centre a pour coordonnées $(-1/2, 0)$ et ses asymptotes vérifient les égalités $y = \pm\sqrt{2}\,(x + 1/2)$. On trouve comme équation de Γ'

$$Y^2 - 2\,X^2 - X - 2\,Y = 0,$$

c'est-à-dire une autre hyperbole, de centre $(-1/4, 1)$, d'asymptotes vérifiant $Y = 1 \pm \sqrt{2}\,(X + 1/4)$ et d'excentricité $\sqrt{3/2}$ puisque son équation mise sous forme normalisée s'écrit

$$\left(X + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{14}}{4}\left(Y - \frac{\sqrt{14}}{4} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(Y - \frac{\sqrt{14}}{4} - 1\right)^2.$$

La figure ci-dessous montre bien que les deux hyperboles ne sont pas homothétiques ; précisément, Γ' (épaissie) est homothétique de l'hyperbole *conjuguée*[60] de Γ, d'équation $y^2 = 2\,x^2 + 2\,x + 1$, ayant mêmes asymptotes que Γ, mais tournant ses concavités perpendiculairement à celles de Γ.

60. *Cf.* la page 115 de la traduction Ver Eecke des *Coniques*. L'hyperbole conjuguée de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est définie par l'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$. Elle est la symétrique de la première par la symétrie oblique dont l'axe est l'une des deux asymptotes et la direction celle de l'autre. On trouve dans Apollonius de très nombreuses figures mettant en évidence des hyperboles conjuguées, par exemple pages 134, 135, 136, 139, 140 et 141, mais aussi 156 et 157 : Descartes ne pouvait ignorer une telle notion.

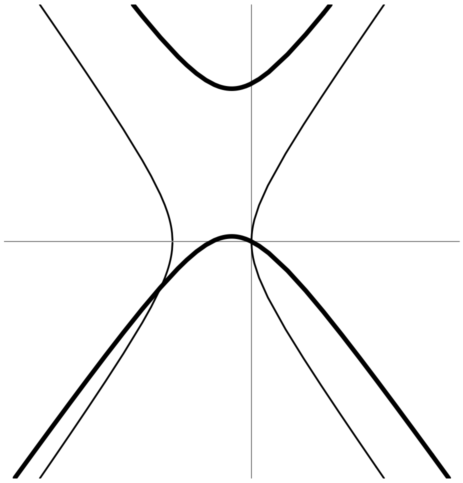


FIGURE 4.16 – *Un cas curieux du théorème généralisé de Descartes*

Il est facile de voir que la « transformée » de la conique d'équation $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}=1$ est celle d'équation

$$\frac{1}{A}\left(X-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{1}{B}\left(Y-\frac{v}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}\right).$$

Cela montre que les centres Ω et Ω de Γ et Γ' sont tels que Ω' soit le milieu de $F\Omega$, De plus, si Γ est une ellipse ou une parabole, Γ et Γ' ont même excentricité $\mathbf{e}=\sqrt{q+1}$ et sont homothétiques l'une de l'autre. Il en va de même si Γ est une hyperbole telle que F appartienne aux mêmes angles délimités par les asymptotes que la courbe elle-même ; par contre, si F appartient aux angles supplémentaires des précédents, l'excentricité de Γ' vaut $\sqrt{\dfrac{1}{q}+1}$: il n'y a plus d'homothétie reliant les deux courbes [61].

Rien n'aurait pu empêcher, au moins en principe, Descartes de se livrer à de tels calculs ; reconnaissons toutefois qu'ils ne figurent ici qu'afin de faire toute la lumière sur le problème des deux paraboles de Descartes et son extension si naturelle. L'hypothèse d'une reconstitution d'un travail effectif de ce genre par notre mathématicien serait bien risquée.

61. Si F appartient aux asymptotes, Γ' est alors décomposée en deux droites qui leur sont parallèles.

Des preuves géométriques pour une conique générale

Après avoir vu analytiquement comment la situation se présentait pour un point F arbitraire et une conique Γ quelconque, nous nous devions de signaler qu'il existe des démonstrations purement géométriques [62] de cette extension.

Il faut toutefois séparer trois cas, ceux de la parabole, des ellipses et des hyperboles : cela est d'ailleurs conforme aux usages anciens.

Il n'a pas paru évident - et c'est regrettable - de déterminer une preuve tout à fait générale couvrant, d'un coup, tout le champ des coniques.

La parabole

La parabole est définie, comme plus haut, par foyer et directrice.

On trouvera une telle preuve, au moins pour le cas où F est intérieur à la parabole, en page 181. Le cas où F est extérieur peut se traiter de manière tout à fait analogue ; il n'a pas semblé nécessaire de le reprendre ici.

Enfin le cas où F appartient à la parabole est trivial : Γ' est l'homothétique de Γ dans l'homothétie de sommet F et de rapport $\dfrac{1}{2}$ puisque l'on a toujours par exemple $Q' = F$.

Le cercle et les ellipses

La définition ici choisie des ellipses est que ces courbes sont les transformées par affinité orthogonale de cercles.

Or la démonstration du théorème dans le cas circulaire est triviale : il suffit de regarder la figure ci-dessous, où Γ et Γ' sont homothétiques (par exemple, le fait que Ω' soit le milieu de $F\Omega$ y est évident).

Le passage aux ellipses se fait alors par l'affinité bien connue rappelée plus haut : cette dernière respectant le parallélisme, le résultat sur l'homothétie en découle aussitôt.

62. Ne reposant, une fois encore, que sur la lecture d'Apollonius.

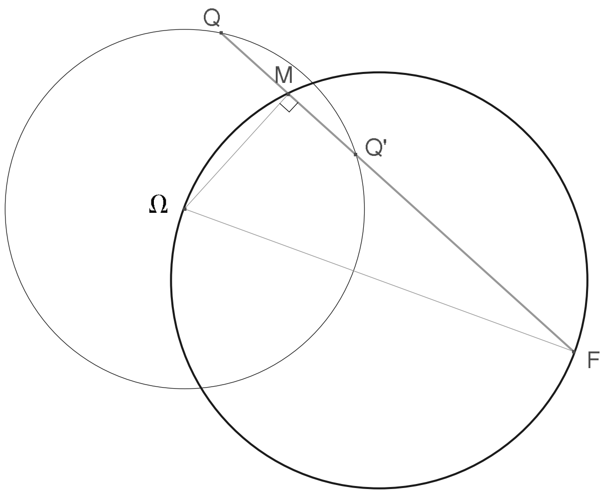


FIGURE 4.17 – *La preuve géométrique pour le cercle*

Les hyperboles

Tout en restant très élémentaire, la preuve est ici un peu plus lourde.

Elle repose sur deux résultats du deuxième Livre d'Apollonius : les Propositions[63] VIII et XVI des pages 124 et 133[64] de la traduction Ver Eecke qui montrent qu'une corde QQ' d'une hyperbole coupe ses asymptotes en deux points K et L symétriques par rapport au milieu du segment QQ'.

Soit donc F un point fixe et Q un point variable d'une hyperbole fixe Γ de centre Ω et d'asymptotes Ωx et Ωy. Si Q' est la seconde intersection[65] de la droite FQ d'avec Γ, le milieu M du segment QQ' est le point dont on recherche le lieu[66].

63. La première concerne les cordes d'une branche, la seconde étendant le résultat aux cordes impliquant chacune des deux branches.

64. Et aussi le cas particulier formant la Proposition III de la page 120 où $Q = Q'$ et où la corde est devenue tangente.

65. Ou la première si FQ est tangente à l'hyperbole.

66. Ou plus précisément la conique Γ' contenant ce lieu : conformément aux traditions anciennes, le problème de la réciproque (tout point de Γ' est-il un point M ?) n'est pas posé ici, mais le mot « lieu » est si commode que nous pouvons nous permettre d'en user à l'occasion.

Soit Ω' le milieu du segment $F\Omega$; les parallèles $\Omega'x$ et $\Omega'y$ issues de Ω' à Ωx et Ωy coupent respectivement la droite $FMKL$ en V et U. Alors $\overline{\Omega\Omega'} = \overline{\Omega' F}$ implique les égalités

$$\overline{LU} = \overline{UF}, \quad \overline{KV} = \overline{VF},$$

$$\overline{MF} + 2\,\overline{FU} = \overline{MF} + \overline{FU} - \overline{LU} = \overline{MU} - \overline{LU} = \overline{ML}$$

$$= \overline{KM} = \overline{KV} + \overline{VM} = \overline{VF} + \overline{VM} = \overline{MF} + 2\,\overline{VM},$$

$$\text{d'où} \qquad \overline{FU} = \overline{VM}.$$

Par suite, FM et UV ont même milieu ; F étant fixe, le point M appartient donc à l'hyperbole Γ' de centre Ω', d'asymptotes $\Omega'x$ et $\Omega'y$ et passant par les points Ω et F.

Pour savoir si, comme dans les cas des ellipses et de la parabole, les deux hyperboles sont homothétiques l'une de l'autre, il faut discuter suivant la position du point F par rapport à Γ

- Si F appartient aux deux quadrants délimités par les asymptotes de Γ contenant Γ, alors Γ' est l'homothétique de Γ dans une certaine homothétie qui conserve l'excentricité.

- Si au contraire F appartient aux quadrants complémentaires des précédents, Γ' n'est plus homothétique de Γ mais de sa conjuguée (voir le cas particulier ci-dessus pour plus de renseignements sur l'hyperbole conjuguée d'une hyperbole).

- Enfin si F appartient à une asymptote de Γ, Γ' est trivialement la réunion des deux droites $\Omega'x$ et $\Omega'y$, formant une hyperbole décomposée. Plus précisément, le lieu de M est ici l'une de ces deux droites, celle qui n'est pas parallèle à l'asymptote contenant F.

Cela termine l'exposition de preuves géométriques « à l'ancienne » de cette extension du problème de Descartes.

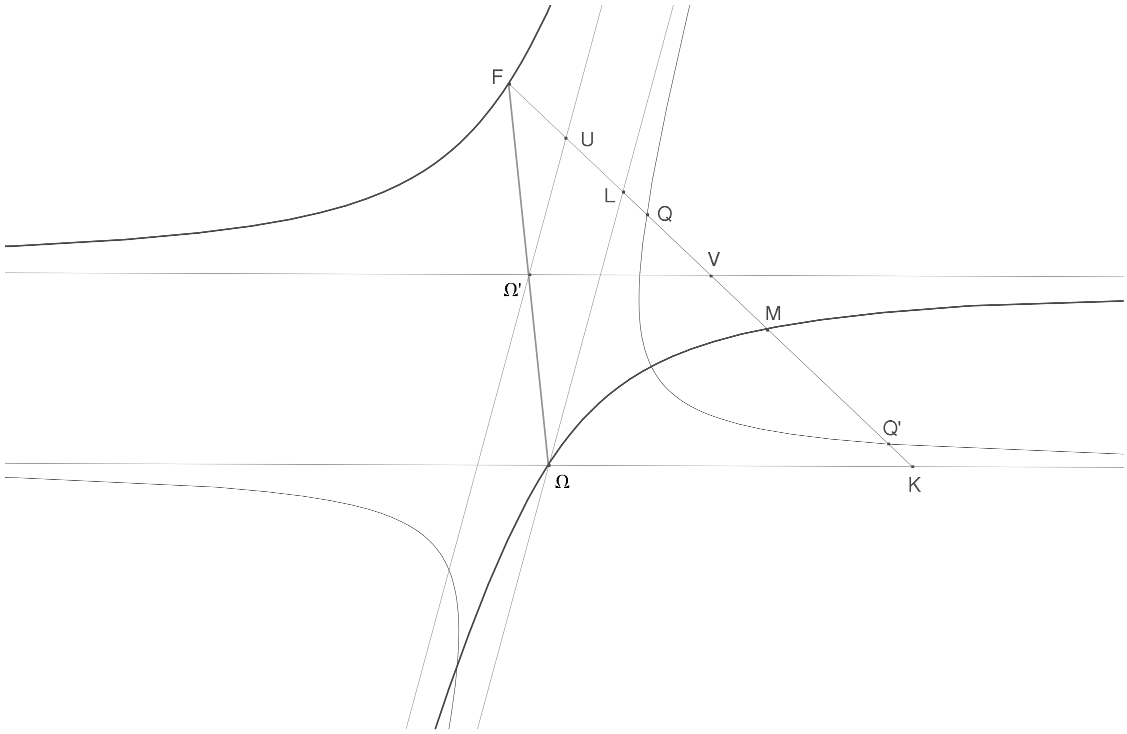


FIGURE 4.18 – *La preuve géométrique pour une hyperbole*

L'ultime généralisation

Nous donnons ici un énoncé plus large de la propriété étudiée par Descartes, bien que ce genre d'extension soit, cette fois-ci, totalement étrangère à la limitation de ses capacités due à son époque. Notre but, dans ces deux pages, est tout d'abord typique des mathématiques de nos siècles : regarder si possible de plus haut pour voir mieux [67]. Par ailleurs, le contenu de la démonstration est ici particulièrement court, preuve de ce que l'idée essentielle sous-jacente au théorème des deux paraboles est vraiment très simple (même si réservée à ceux qui ont une connaissance moins basique des mathématiques). Voici la proposition cachée derrière le problème très élémentaire de Descartes

67. Modulo le fait, naturellement, que nous mettons ici en œuvre, des outils moins banalisés que dans les passages précédents. Il nous semble que cela va dans le sens de la démarche cartésienne typique de montée « par degrés ».

« *Étant donné un espace vectoriel projectifié par usage de coordonnées homogènes et muni d'une forme bilinéaire symétrique φ, un point ω et un hyperplan Δ décrit par un point variable H, l'intersection de la droite ωH et de l'hyperplan polaire de H relatif à l'hyperquadrique Γ d'équation $q(m) = \varphi(m, m) = 0$ appartient à une hyperquadrique fixe Γ'.* »

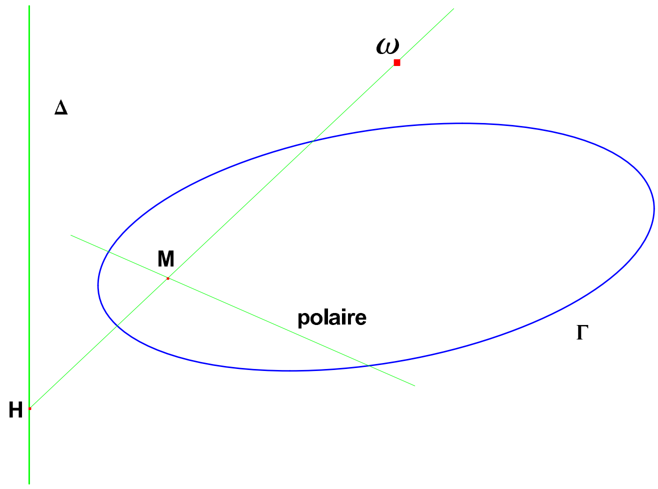


FIGURE 4.19 – *Une évocation de l'ultime généralisation*

Si deux vecteurs de l'espace, m et M, se décomposent en sommes $m = u + t\omega$ et $M = U + t\omega$ avec (u, U) dans un hyperplan fixé supplémentaire de la droite engendrée par ω et si Δ est défini par une égalité de la forme $g(u) = ht$ où g est linéaire, l'alignement de ω, m et M se traduit par une égalité de la forme $U = \lambda u$ et donc l'appartenance de m à Δ par l'égalité $g(U) = \lambda ht$.

Par un résultat classique de polarité relative à φ, que nous admettrons ici, une équation de l'hyperplan polaire de m s'écrit sous la forme

$$\varphi(u + t\omega, U + t\omega) = \varphi(m, M) = 0.$$

On en déduit immédiatement par linéarité les égalités

$$0 = h\lambda\, \varphi(u + t\omega, U + t\omega) = h\left[q(U) + t\varphi(U, \omega)\right] + g(U)\left[\varphi(\omega, U) + tq(\omega)\right].$$

L'objet $q(U)$ est quadratique ; $g(U)$ et $\varphi(U, \omega) = \varphi(\omega, U)$ étant linéaires, une équation de l'hyperquadrique cherchée est donc du type $q(U) + t\, f(U) = 0$ avec f linéaire, ce qui convient. On a $\omega \in \Gamma'$ puisque $f(0) = 0$ et $q(0) = 0$.

Nous avons tenu à effectuer le calcul en entier, mais en vérité la vue de la simple expression $\varphi(u+t\omega, U+t\omega)$ rendait déjà le résultat immédiat. Donnons l'exemple le plus important, avec des notations peut-être plus habituelles, du plan projectif, rapporté à des triplets (X, Y, Z) de coordonnées homogènes. Si et la droite Δ et Γ sont respectivement définies par $ux + vy + wz = 0$ et $A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2 + 2D\,xz + 2E\,yz + F\,z^2 = 0$, on trouve pour Γ' l'équation

$$(wA - uD)\,X^2 + (2w - uE - vD)\,XY + (wC - vE)\,Y^2$$

$$+\big[(wD - uF)\,X + (wE - vF)\,Y\big]\,Z = 0.$$

Le passage en coordonnées homogènes était obligatoire pour pouvoir tenir compte du fait que ω, de coordonnées $(0, 0, 1)$, peut être à l'infini [68] ; si c'est le cas, il suffit de dégrader la variable Z de son statut de variable d'homogénéité pour la remplacer par exemple par X.

En coordonnées cartésiennes usuelles, on trouve naturellement

$$(wA - uD)X^2 + (2w - uE - vD)XY + (wC - vE)Y^2 + (wD - uF)X + (wE - vF)Y = 0.$$

En guise de conclusion

Cinq lignes obscures de Descartes, totalement isolées, pour la première fois objet ici d'une tentative de reconstitution, nous ont conduit à une *hypothèse* - la définition de son concept très particulier de « *pôle d'un diamètre d'une conique* », lié à celui du pôle d'une droite mais différent -, à plusieurs sortes de *démonstrations* et à des *généralisations* naturelles du problème : conique au lieu de parabole, et point F arbitraire.

Tentons de conclure : Descartes n'a très probablement vu, et réglé, que le cas d'une parabole et de son foyer. Parmi les démonstrations possibles proposées plus haut, deux se distinguent : la démonstration *euclidienne* de la page 184, et l'*apollonienne* de la page 181, avec peut-être une préférence pour la seconde, compte tenu de la grande érudition de Descartes en mathématiques grecques. Mais ces suggestions sont à prendre avec grande prudence.

68. C'est bien entendu le cas pour la forme initiale du problème, où ω est le centre de la parabole Γ, donc son point à l'infini.

Annexe II : La courbe cylindrique

« *De diviser les cercles en 27 et 29, je le crois, mécaniquement, mais non pas en géométrie. Il est vrai qu'il se peut en 27 par le moyen d'un cylindre, encore que peu de gens en puissent trouver le moyen ; mais non pas en 29, ni en tous autres, et si on m'en veut envoyer la pratique, j'ose vous promettre de faire voir qu'elle n'est pas exacte.* »

Ce texte se trouve aux pages 25-6 de AT I, dans la première lettre X à Mersenne en date du 8 octobre 1629[69].

Un compas de Descartes, ou une courbe comme celle-ci

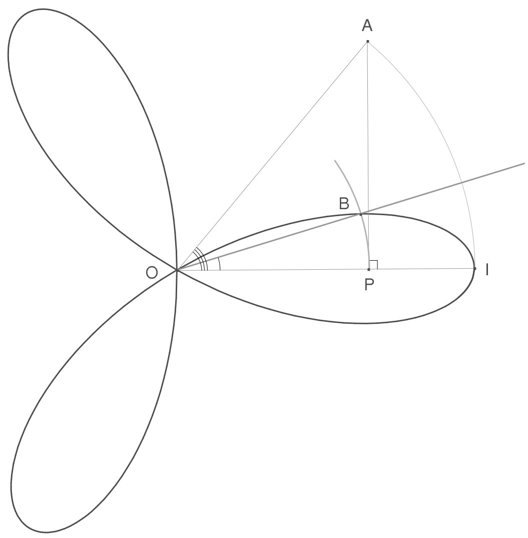


FIGURE 4.20 – *Une courbe trisectrice*

d'équation polaire $\rho = \cos 3\theta$, où $OA = OI$ et $OB = OP$, ou une conchoïde de Nicomède *etc.* permettent la trisection, et donc le découpage en 27 parties. Mais le texte est obscur. À la page 18 de son étude sur le fonds Libri, Paul Tannery parle de façon vague d'une ellipse, que l'on peut en effet placer sur un cylindre : mais comment permettrait-elle une trisection ? En jouant le rôle de la parabole résolvant les équations du troisième degré ?

69. Ou 50 de l'édition Belgioioso-Armogathe (lettre 19). La source est le volume II de la *Correspondance* par Clerselier, CXII p. 531.

Voici - peut-être - une explication. En 1876, Édouard Lucas, professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Saint-Louis, célèbre théoricien des nombres, avait publié une autre réponse en page 6 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, reprise sans commentaire par Francisco Gomes Teixeira aux pages 321 du vol. II et 352 du vol. III de sa compilation. Mathématiquement correcte et très subtile, elle semble trop sophistiquée pour être vraie.

Simplifions sa méthode. Lucas veut calculer géométriquement les lignes trigonométriques de θ connaissant celles de 3θ. Il considère d'abord la *Fenêtre de Viviani*[70], intersection du *cylindre* d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ par la sphère d'équation $(x - a\,\cos 3\theta)^2 + (y - a\,\sin 3\theta)^2 + z^2 = 4a^2$.

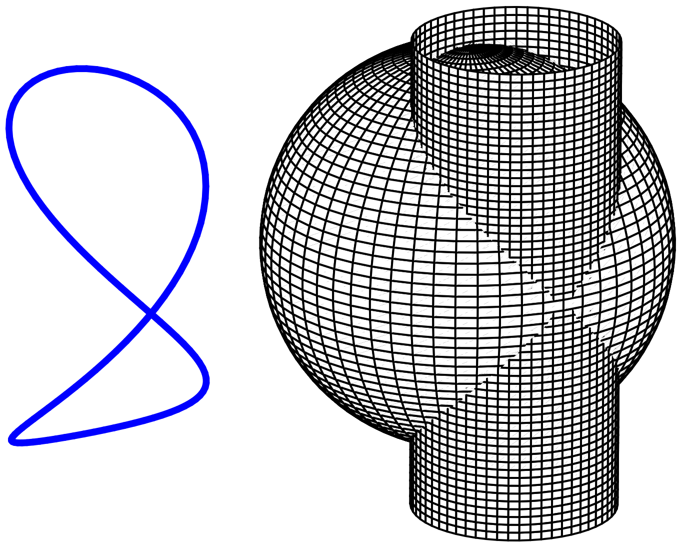


FIGURE 4.21 – *La fenêtre de Viviani*

Il la coupe ensuite par le plan d'équation[71] $z = 2x$, ce qui lui donne quatre points de coordonnées $x = a\,\cos\varphi$, $y = a\,\sin\varphi$ et $z = 2a\,\cos\varphi$, où l'une des valeurs de φ, déterminées par l'égalité $\cos(3\theta - \varphi) = \cos 2\varphi$, est égale à θ. Si efficace que soit ce bref calcul, aurait-il pu être imaginé par Descartes ? On peut en douter. Le mystère subsistera sans doute longtemps.

70. Caractérisée par l'égalité *Longitude* = *Latitude* + Constante, étudiée en 1692 par Vincenzo Viviani, puis en 1693 par Roberval.

71. Ce qui revient à couper la sphère par une ellipse : était-ce l'idée de Tannery ? Dans son article, Lucas coupait la Fenètre par l'intersection du même cylindre d'avec une autre sphère d'équation $(x + a\,\cos 3\theta)^2 + (y - a\,\sin 3\theta)^2 + (z - a\,\cos 3\theta)^2 = a^2(4 + \cos^2 3\theta)$.

Annexe III : La corde molle

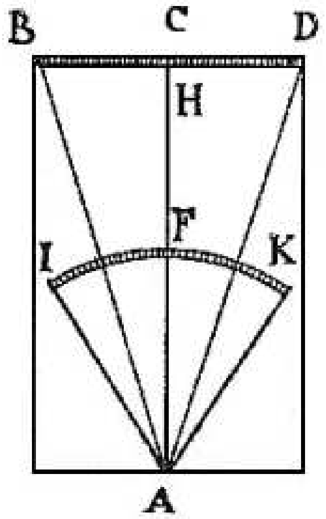


FIGURE 4.22 – *La figure de Descartes*

« *Il est vray que cecy ne se peut entendre que des cors durs ; car pour ceux qui sont liquides il est évident que leurs parties ne se peuvent ainsi soutenir les unes les autres, ny mesme celles des cors qui sont moux & plians. Comme par exemple, si on supose que BD soit une corde, j'entens une corde Mathématique, dont toutes les parties se puissent plier également sans aucune difficulté, & qu'elle soit toute droitte, lorsqu'elle est vers H, la laissant descendre vers A, ses parties se courberont peu à peu à mesure qu'elles approcheront de ce point A. En sorte que lorsque son milieu sera au point F, ses deux bouts seront aux points I & K, que je supose estre tels que la différence qui est entre les lignes IA & BA, ou bien KA & DA, est égale à CF.* »

Cette figure et ce texte se trouvent aux pages 238 et 239-240 de AT II, dans la première lettre CXXIX à Mersenne en date du 13 juillet 1638 [72].

Une corde pesante, tendue horizontalement au temps 0, attirée par le centre A de la Terre, se déforme suivant une règle assez extravagante que les physiciens d'aujourd'hui ne pourraient accepter : les distances curvilignes entre points de

72. Ou 766-7 de l'édition Belgioioso-Armogathe (lettre 174). La source est le volume I de la *Correspondance* par Clerselier, LXXIII p. 341.

cette corde restent invariantes, tandis que K, l'un de ses points arbitrairement choisi, se rapproche de A suivant la même loi que son milieu C, c'est-à-dire vérifie constamment l'égalité $AD - AK = AC - AF\ (= FC)$.

Descartes ne donne pas davantage de renseignements. Faute de connaissances en calcul différentiel et intégral (inventé trente ans plus tard), limité comme on le sait aux indivisibles à la Cavalieri que celui-ci étudiait à la même époque [73], il n'aurait pu déterminer les différentes formes de son fil mou durant sa chute, dont la figure que voici donne l'idée, *a priori* conforme à son intuition

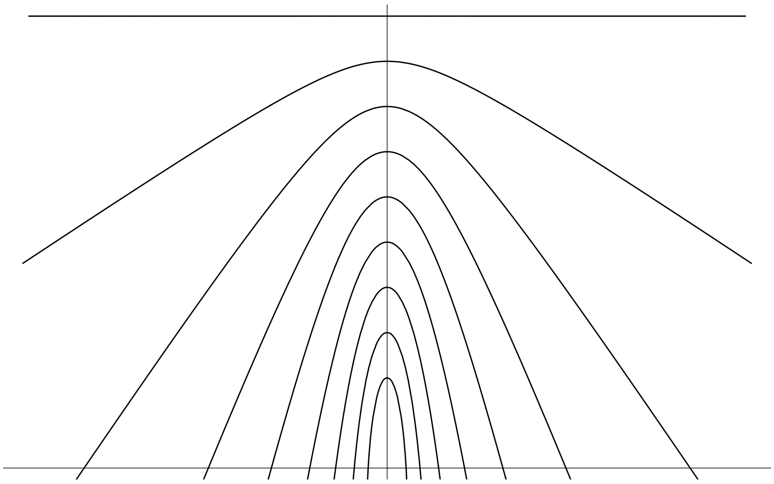


FIGURE 4.23 – *Différents aspects de la corde au cours du temps (si* a << h*)*

En particulier, il n'aurait pu se livrer au calcul ci-dessous, que nous empruntons à Francisco Gomes Teixeira, publié à la page 243 du deuxième volume de son *Traité des Courbes Spéciales* et qui a servi à la construction des courbes ci-dessus.

Si $s = CD = FK$, $h = AC$, $a = FC$, $\rho = AK = AD - a$ et $\theta = \widehat{CAK}$, alors $(\rho + a)^2 = s^2 + h^2$, d'où $\dfrac{ds}{d\rho} = \dfrac{\rho + a}{s} = \dfrac{\rho + a}{\sqrt{(\rho + a)^2 - h^2}} \cdot$ Or une formule classique

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$$

73. Sa *Geometria indivisibilibus* date de 1635.

permet de calculer

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{d\rho} = \pm \frac{h}{\rho \sqrt{(\rho+a)^2 - h^2}} \cdot$$

Nous sommes ramenés à un problème classique de recherche de primitive, que Newton par exemple aurait su résoudre, ce qui conduit à l'égalité

$$\theta = \pm \frac{h}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left(\arctan \frac{\sqrt{(\rho+a)^2 - h^2} - \rho}{\sqrt{h^2 - a^2}} - \arctan \frac{a - h}{\sqrt{h^2 - a^2}} \right)$$

définissant la forme de la corde molle par le biais d'une équation $\theta = \varphi(\rho)$, exploitable pour une construction à la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul mathématique.

On peut en déduire facilement l'existence de deux asymptotes symétriques par rapport à la verticale, ce que la figure laissait parfaitement deviner.

Cela dit, ni Gomes Teixeira ni *a fortiori* Descartes, n'ont su que la forme esquissée dans l'illustration de la *Correspondance* cessait d'être exacte lorsque la variable a s'approchait de h, hauteur initiale séparant la corde du centre de la terre au temps 0. Voici en effet ce que l'utilisation de *Mathematica* (ou tout autre de ses concurrents) révèle : en phase d'approche du centre du globe[74], la courbe est censée se retourner et remonter !

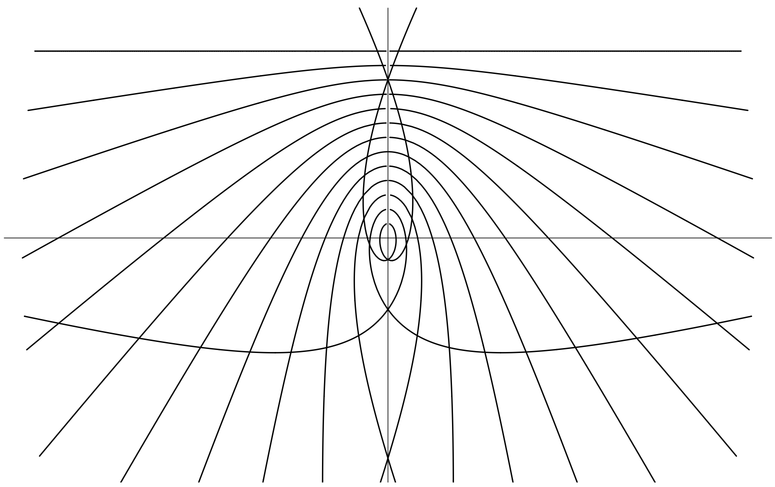


FIGURE 4.24 – *D'autres aspects de la corde au cours du temps*

74. Nous feignons ici de croire que cela a un sens physique, ce qui naturellement est à rejeter : comme toujours, l'aspect privilégié dans ce genre de questions reste théorique.

Annexe IV : La spirale logarithmique

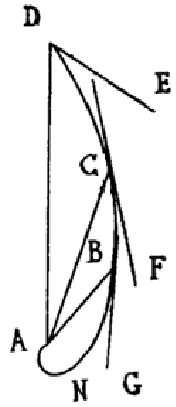


FIGURE 4.25 – *L'introduction de la spirale logarithmique par Descartes*

« *Vous me mandez aussi que je devais plus particulièrement expliquer la nature de la Spirale, qui représente le Plan également incliné, & la façon dont se plie une corde, lors qu'ayant été toute droite & parallele à l'horison, elle descend librement vers le centre de la Terre, & la grandeur de la petite sphere, en laquelle se trouve le centre de gravite d'une autre plus grande sphere. Mais pour cette spirale elle a plusieurs proprietez qui la rendent assez reconnaissable : car si* A *est le centre de la Terre, & que* ANBCD *soit la spirale, ayant tiré les lignes droites* AB, AC, AD, *& semblables, il y a mesme proportion entre la courbe* ANB, *& la droite* AB, *qu'entre la courbe* ANBC, *& la droite* AC, *ou* ANBCD, *&* AD, *& ainsi des autres.*

E si on tire les tangentes DE, CF, GB, *&tc. les angles* ADE, ACF, ABG, *&tc. seront égaux. Pour la façon dont se plie une corde en tombant, je l'ay ce me semble assez determiné par ce que j'en ay écrit, aussi bien que le centre de gravité d'une sphere ; Il est vray que j'en ay omis la preuve ; Mais je vous diray que ce n'est pas mon stile, de m'arrester à de petites demonstrations de Geometrie, qui peuvent aysement estre trouvées par d'autres, & que ceux qui me connaistront ne sçauraient iuger que j'ignore.*

Cette figure et ce texte se trouvent aux pages 359-61 de AT II, dans la lettre CXLII à Mersenne[75] en date du 12 septembre 1638.

75. Ou 862 de l'édition Belgioioso-Armogathe (lettre 187). La source est le volume I de la

Les intuitions de Mersenne

Contrairement à certaines affirmations de commentateurs, ce n'est pas là que la spirale logarithmique fait sa première apparition dans l'histoire des mathématiques. À la page 186 de la livraison 16/2 du volume 16 de la *Revue d'histoire des sciences* de 1963, Jean Itard renvoie au volume IV de la *Correspondance* de Mersenne de 1634 (l'année 1636 qu'il indique est un lapsus), page 259, à propos de sa lettre 263 à Nicolas-Claude Fabri de Peiresc du 26 juillet, où il affirme

« *Je suis maintenant après une nouvelle ligne qui me donnera peut-être quelque lumiere que vous aggreerès, si je la descouvre.* »

Il parle page 264 d'un « plan qui gardast toujours même inclination », et l'on trouve à la page suivante la figure ci-dessous [76]

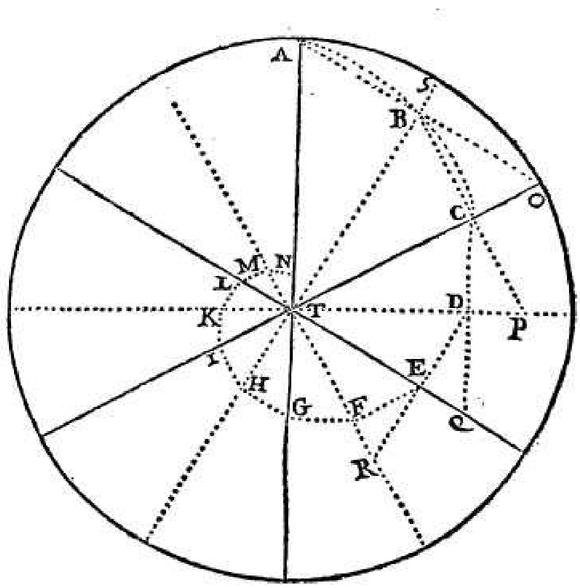


FIGURE 4.26 – *La spirale logarithmique chez Mersenne*

Correspondance par Clerselier, LXXIV p. 353. Voir aussi CXLVI AT II p. 390 (Belgioioso-Armongathe 191 p. 888, Clerselier II XCI p. 398) du 11 octobre de la même année.

76. En fait, nous avons préféré placer ici la figure originale tirée de la page 119 de l'*Harmonie Universelle*, légèrement plus ancienne et très peu différente.

En fait, Cornelius de Waard, éditeur de ce tome, renvoie lui-même aux Propositions VIII et IX du Livre II de l'*Harmonie Universelle* de Mersenne, publié en 1636 aux pages 113-21, où l'auteur s'exprime très clairement [77]

« *Le cercle étant donné dans lequel, & par le moyen duquel on veut descrire un plan dont tous les points soient également inclinez, il est aisé de le tracer par tant de points que l'on voudra, lesquels seront d'autant plus proches les uns des autres, que l'on divisera le cercle dans un plus grand nombre de parties.* »

Il s'intéresse à six diamètres d'un dodécagone régulier, espacés deux à deux de trente degrés sexagésimaux. À partir d'une extrémité A d'un tel diamètre, il obtient sa projection orthogonale B sur le diamètre suivant dans le sens des aiguilles d'une montre, qu'il projette de la même manière en un point C *etc.* jusqu'à retrouver un point N sur le diamètre de départ, mais situé à une distance du centre T *grosso modo* cinq fois moins grande que pour A.

Plus précisément, les rapports égaux $\dfrac{TB}{TA} = \dfrac{TC}{TB} = \cdots = \dfrac{TM}{TL} = \dfrac{TN}{TM}$ valent $\cos\delta = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et $\cos^{12}\dfrac{\pi}{6}$ vaut à peu près $0,18$. L'idée non clairement explicitée de Mersenne est de définir ainsi une « courbe limite [78] » du polygone $ABCDEFGHIKLMN$; les segments TA, TB, … , TN voient leurs longueurs décroître en progression géométrique alors que les mesures de leurs angles d'avec TA décroissent en progression arithmétique, d'où le lien évident avec les logarithmes de Neper introduits en 1614.

Les segments BO, CP, DQ et ainsi de suite sont une certaine approximation des tangentes respectives aux points A, B, C *etc.* à cette courbe imaginée, puisqu'il s'agit en fait des cordes AB, BC, CD … Il apparaît ainsi intuitivement que les tangentes à la spirale logarithmique [79] rêvée par Mersenne forment un angle constant, classiquement noté V, avec les rayons successifs

77. On peut voir aussi la Propositio 4 de la Præfatio de son *Harmonicum Libri*.

78. Lorsque que l'on remplace le dodécagone régulier par un autre polygone régulier d'un nombre infini de côtés, expression courante à l'époque.

79. Que l'on croit généralement ainsi dénommée par Pierre Varignon en 1704, alors que ce nom date de 1691 chez Jacob Bernoulli (dans une note aux *Acta eruditorum* ; en 1692 il parlera de *spira mirabilis* dans son texte *Linea Cycloidales, Evolutæ, Ant-Evolutæ Causticæ, Peri-Causticae, Spira Mirabilis &c*).

TA, TB, TC et autres. Dans ce cas particulier, cet angle vaut ici approximativement $\frac{\pi}{3}$ car le triangle ATO est équilatéral.

Il se présente ici un problème : si la ligne polygonale $ABCDEFGHIKLMN$ admet comme limite (voir les termes *d'autant plus proches les un des autres*, qui ne pouvaient être plus précis à l'époque) une spirale logarithmique d'équation polaire[80] $\rho = \mathbf{e}^{m\theta}$, le nombre $\frac{\ln \cos \delta}{\delta}$ doit tendre vers m : or sa limite est nulle, ce qui conduit au cercle initial ! Ce fait a évidemment échappé à Mersenne : son intuition était certes fort éclairante, mais ne peut être prise entièrement en compte d'un strict point de vue technique.

Passons donc sur les quelques difficultés mathématiques qui se présenteraient naturellement dans un passage rigoureux à la limite, la tentative de Mersenne est remarquable. Elle survient à l'occasion d'une étude *Du Mouvement des Corps* dans une recherche précise ainsi fléchée en page 113

≪ *Démontrer si un poids peut descendre par un plan incliné iusques au centre de la terre.* ≫

Dans le cours du texte (page 116 par exemple), Mersenne indique précisément qu'ils'agit d'un enroulement sans fin, puisque le centre de la terre ne peut être atteint

≪ *D'ailleurs, combien que le dit plan approché toujours du centre, neanmoins il n'y va pas, mais il tornera perpetuellement à l'entour.* ≫

La contribution de Descartes

Descartes - il faut maintenant revenir à son texte de 1638 - a-t-il lu Mersenne ? Le contraire serait totalement invraisemblable, vu les liens entre les deux hommes. De plus la lettre de Descartes est adressée justement à ce même Mersenne, et comporte ces mots : ≪ *vous me mandez* ≫. Enfin on peut aussi remarquer qu'ils partagent exactement le même souci : établir une théorie de la descente d'un point pesant sur un *plan également incliné*[81]. À nos yeux,

80. *Cf.* ci-dessous.
81. *Cf.* les pages 113 et 120 de l'*Harmonie universelle*. Voir aussi l'expression ≪ *plan* [. . .] *tant soit peu voûté* ≫ du ≪ traité ≫ de mécanique cartésien (page 439 de AT I).

ils utilisent le même langage que nous n'accepterions plus, un plan étant aujourd'hui ce qu'ils appelaient un *plan droit*[82].

Le seul obstacle éventuel à la croyance en une posture de Descartes disciple de Mersenne sur cette question, est que les deux mathématiciens diffèrent sur un point essentiel : la figure de la *Correspondance* telle que nous l'avons dans Adam-Tannery insiste, et plus encore que son original de Clerselier, sur le fait que la spirale logarithmique atteint le centre de la terre A. Or nous avons vu que Mersenne le nie, à juste titre. Nous avons peut-être une explication à cette contradiction forte. En effet, à la différence du Minime qui ne traitait que des deux progressions géométrique et arithmétique et surtout de la constance de l'angle V, Descartes introduit ici un résultat capital, absent des textes de son ami : lorsque le point B décrit la courbe, le rapport $\dfrac{s}{\rho} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{AB}$ de la longueur s de l'arc AB au rayon vecteur AB reste constant ; cela est vrai et très important, mais ne pouvait sans doute être concevable pour un homme de ce siècle que pour une ligne bornée et non indéfiniment continuée.

Nous ignorons naturellement comment Descartes a pu en venir à son hypothèse sur la constance de $\dfrac{s}{\rho}$, d'autant plus qu'il ne savait pas bien comment définir $s = \overset{\frown}{AB}$ en utilisant les notations de sa figure. Une réponse possible est pourtant lisible sur la figure de Mersenne.

Posons $n = 12$, $TA = a$, $\delta = \dfrac{\pi}{6}$, $k = \cos\delta$ et $h = \sin\delta$. On trouve aussitôt

$$AB = a\,h, \quad TB = a\,k, \quad BC = a\,kh, \quad TC = a\,k^2, \quad CD = a\,k^2 h,$$

$$TD = a\,k^3, \quad \ldots\ldots \quad , \quad TM = a\,k^{n-1}, \quad MN = a\,k^{n-1}h, \quad TN = a\,k^n,$$

$$\frac{AB}{TA - TB} = \frac{AB + BC}{TA - TC} = \frac{AB + BC + CD}{TA - TD} = \ldots\ldots =$$

$$\frac{AB + BC + CD + \cdots + MN}{TA - TN} = h\,\frac{1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}}{1 - k^n} = \frac{h}{1-k} = \cot\frac{\delta}{2}$$

qui est une constante.

---

82. *Cf.* le *Corollaire* VIII, page 121, à propos de la Proposition IX du Livre VIII de Pappus (page 829 du second volume de la traduction Ver Eecke). Ce glissement de terme constitue aujourd'hui une grosse difficulté de lecture de la lettre du 12 septembre.

Cela signifie ceci : notant s_A et s_N les abscisses curvilignes respectives des points A et N, ainsi que $\rho_A = TA$ et $\rho_N = TN$, on dispose des égalités approchées

$$\frac{\Delta s}{\Delta \rho} = \frac{s_A - s_N}{\rho_A - \rho_N} = \cot\frac{\delta}{2}$$

qui prouvent que s est une fonction affine de ρ, soit $s = \lambda\rho$ si l'on choisit bien l'origine des abscisses curvilignes. Ce résultat est bien entendu indépendant des constantes de départ a, n et δ ; il repose sur le fait intuitif (pour Descartes sans aucun doute) que $AB + BC + CD + \cdots + MN$ est une bonne valeur approchée de $\overset{\frown}{AN} = s_A - s_N$.

Après avoir admis, certainement d'après son mentor, que « *les angles* ADE, ACF, ABG, *&tc. seront égaux* », il a pu en tirer, sans doute conformément aux calculs ci-dessus, son autre proposition selon laquelle « *il y a mesme proportion entre la courbe* ANB, *& la droite* AB, *qu'entre la courbe* ANBC, *& la droite* AC, *ou* ANBCD, *&* AD, *& ainsi des autres* ». Le sens et l'origine des quelques lignes de la lettre à Mersenne, aujourd'hui bien obscures par l'emploi du fâcheux *plan également*[83] *incliné*, semblent donc maintenant raisonnablement éclaircis.

Les mathématiques de la spirale logarithmique

Les mathématiciens qui suivirent Descartes ont longuement étudié cette courbe extraordinaire : citons par exemple Evangelista Toricelli[84], et surtout bien entendu Newton (y compris dans ses *Principia*) puis Jacob Bernoulli déjà rencontré *etc.* Sa théorie est aujourd'hui très simple, donnons-en les premiers éléments, sans entrer dans le problème dynamique du mouvement d'un point pesant attiré par le centre de la terre, hors de notre propos général strictement restreint aux mathématiques.

En ce qui concerne la première affirmation, celle de Mersenne, selon laquelle l'angle V est constant. Cela résulte de la formule $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$; appliquant cela à l'égalité $\rho = \mathbf{e}^{m\theta}$ qui résulte immédiatement de la relation entre les progressions géométrique (celle du rayon vecteur ρ) et arithmétique (celle de

83. C'est-à-dire *régulièrement*.
84. Voir par exemple ses lettres des 17 janvier 1645 et 7 mars 1646 à Michelangelo Ricci.

l'angle θ), cela donne $\tan V = \dfrac{1}{m}\cdot$ Cela montre en plus que la constance de V équivaut à une équation différentielle[85] $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta} = m\rho$ où m est une constante.

C'est également à cette équation que se ramène l'égalité cartésienne $s = \lambda\rho$. Cela résulte de la formule $s' = \dfrac{ds}{d\theta} = \pm\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$, ce qui équivaut ici (à une constante additive près sur s)

$$\rho^2 + \rho'^2 = \lambda^2\rho^2$$

donc à $\rho' = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\,\rho$. La réciproque est évidente.

Reste un point à éclaircir, dont nous avons vu qu'il avait posé un problème entre Descartes et Mersenne : comment définir une abscisse curviligne s nulle pour $\rho = 0$, puisque cela est impossible ? Il s'agit aujourd'hui pour nous d'un simple problème de limite pour une valeur infinie négative[86] de θ ; bagatelle pour nous, cette difficulté était sérieuse pour ce siècle.

Loxodromie et spirale logarithmique

Alexandre Koyré, dans un numéro de la *Revue d'histoire des sciences* de 1956 (vol. 9, 9/4), parle de *loxodromia plana* pour qualifier notre courbe lors de sa présentation du tome IV de la *Correspondance de Mersenne*. On sait que la loxodromie est la technique maritime consistant en une route faisant un angle constant V d'avec les méridiens. C'était évidemment l'idée de départ du Minime, puisqu'il écrivait

≪ *Les vaisseaux de mer qui tiennent leur chemin par les rhums, ou par les loxodromies* AB, C, D, &. *qui coupent les méridiens à angles droits*[87] *iront*

85. Rappelons que ce concept était encore à définir à l'époque de Descartes, même si ce dernier peut être crédité de la résolution du problème de De Beaune. Y-a-t-il eu un lien entre celle-là et notre interprétation du travail cartésien sur la spirale logarithmique ? Cela doit être examiné lors d'une étude détaillée des mathématiques dans la *Correspondance*.

86. Si m est positif, positive si m est négatif.

87. Il généralisera cela huit lignes plus loin à ≪ *toutes autres sortes d'angles, pourveu qu'ils soient toujours egaux entr'eux* ≫.

par une ligne semblable à celle qui est icy descrite, & garderont la mesme inclinaison que les poids qui descendraient par un plan egalement incliné »

à la page 120 de son *Harmonie universelle* : voilà donc son point de départ, et aussi celui de Descartes si nous avons raison de penser à une telle filiation.

- En fait, les liens unissant loxodromie sphérique et spirale logarithmique vont plus loin qu'une simple analogie visuelle : il est classique de montrer que *la seconde est simplement l'inverse de la première si l'on choisit le centre d'inversion*[88] *par exemple au pôle Sud*. Prouvons-le en recourant au classique *repère mobile* (u, v, k) défini, dans un repère orthonormé de l'espace usuel, par la matrice orthogonale directe

$$\operatorname{mat}(u, v, k) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

par rapport auquel le mouvement d'un point est défini par l'égalité vectorielle *cylindrique* $m = \rho\, u + z\, k$ où ρ et z représentent deux fonctions dérivables de la variable θ.

Un déplacement loxodromique sur la sphère terrestre est défini par $\rho = \cos\varphi$, où $\varphi(\theta)$ est la latitude en fonction de la longitude θ, et $z = \sin\varphi$. Par suite

$$m' = \frac{dm}{d\theta} = \cos\varphi\,\frac{du}{d\theta} + \frac{d\varphi}{d\theta}\,(-\sin\varphi\, u + \cos\varphi\, k) = \cos\varphi\, v + \varphi'(-\sin\varphi\, u + \cos\varphi\, k)$$

où ce vecteur m' fait un angle constant α avec le vecteur tangent au parallèle en ce lieu[89], c'est-à-dire v. On en déduit

$$\cos\alpha = \frac{(m'|v)}{\|m'\|\,\|v\|} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \varphi'^2}}$$

soit encore $\varphi'^2\cos^2\alpha = \cos^2\varphi\,\sin^2\alpha$, d'où par exemple $\dfrac{d\varphi}{d\theta} = \cos\varphi\,\tan\alpha$ puis $\theta = (\cot\alpha)\,\ln\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)$ à une constante près. Par suite $\mathbf{e}^{\theta\tan\alpha} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)$ est donc une équation d'une route loxodromique.

88. Encore appelée ici *projection stéréographique*.
89. Il fait donc un angle constant V avec le vecteur tangent au méridien en ce lieu.

L'inverse du point m est immédiat à déterminer : c'est le point p, dans le plan d'équation $z = 0$ et aligné avec m et le point $-k$, donc défini par

$$p = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\,u$$

et l'une de ses équations polaires est

$$\rho = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} = \cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \mathbf{e}^{-\theta\tan\alpha}.$$

- Un calcul voisin permet de démontrer une autre propriété analogue d'une spirale logarithmique : c'est *la projection plane orthogonale d'une loxodromie sur un cône de révolution d'axe parallèle à la direction de projection*.

Soit $z = \rho\,(\tan t)$ l'équation du cône et $m = \rho\,u + z\,k = \rho\,(u + (\tan t)\,k)$. Alors $m' = \rho'(u + (\tan t)\,k) + \rho\,v$ et $\|m'\| = \sqrt{\rho^2 + (1+\tan^2 t)\,\rho'^2}$, d'où

$$\cos V = \frac{(m'|u + (\tan t)\,k)}{\|m'\|\;\|u + (\tan t)\,k)\|} = \frac{\rho'}{(\cos t)\,\sqrt{\rho^2 + (1+\tan^2 t)\,\rho'^2}}$$

soit encore par exemple $(\tan V)\,\rho' = (\cos t)\,\rho$, puis $\rho = \mathbf{e}^{(\cos t)(\cot V)\,\theta}$.

En guise de conclusion

Même si la démarche de Mersenne était vouée à un certain échec puisque nous avons vu que le processus à la limite qu'il avait en tête était défectueux, son intuition, puis celle de son ami Descartes, étaient excellentes ; le point de départ loxodromique était en effet un formidable générateur.

Le problème dynamique initial (celui d'un poids suivant un « plan » s'affaissant régulièrement sur lui-même) resterait à examiner, à l'aide par exemple des lois de Newton - tout comme celui de la corde molle - ; mais le passage de Descartes en question reste une très belle page de mathématiques, proche du futur calcul différentiel et intégral comme la résolution voisine du problème de De Beaune, du moins après les reconstitutions probables que nous avons tentées, espérons avec quelques chances de succès. Un fait s'impose

Descartes aimait toutes les courbes planes.

Chapitre 5

Transformation de Descartes

En 1992, paraissait aux *Cambridge University Press* (Cambridge) le volume *The investigation of difficult things : Essays on Newton and the history of exact sciences*[1] dédié au soixantième anniversaire de Derek Thomas Whiteside. Le troisième essai s'intitulait *Descartes, Pappus' problem, and the Cartesian Parabola : a conjecture*[2], sous la plume de Henk Bos. On y trouve l'expression *the turning ruler and moving curve procedure*, que nous préférons rendre plus concise en parlant ici de *Transformation de Descartes*. Même si l'article ne l'examine pas sous toutes les coutures, on peut considérer qu'à propos d'un problème voisin[3] on y trouve la première ébauche d'une étude moderne du sujet[4].

Du 2 au 4 septembre 1993, se tenait le *French Norwegian Symposium on Computer-Aided Mathematics in Education and Industry* au Sanner Hotel de Gran. Lors de ce Colloque international, l'auteur délivra une communication destinée à prouver grâce à l'aide du logiciel *Mathematica* que la technique cartésienne du Livre Troisième ne s'étendait pas aux équations du huitième degré. À cette occasion, il lui était nécessaire de présenter une interprétation mathématique « moderne » de la Transformation de Descartes, naturellement sans citer le texte d'Henk Bos, qu'il ne connaissait pas à l'époque[5].

1. Peter Michael Harman et Alan Elihu Shapiro, éditeurs.
2. Pages 71-96.
3. Une conjecture sur le Problème de Pappus. Voir l'annexe III de ce chapitre.
4. Voir cependant le commentaire de Paul Tannery à la page 121 du vol. I des *Œuvres complètes* de Fermat à propos de sa *Dissertatio tripartita*.
5. C'est ce travail, resté non publié, qui est à l'origine de la quasi-totalité de ce chapitre.

En 2002, paraissait aux *Presses Universitaires Franc-Comtoises* (Besançon) le volume *De la Méthode : Recherches en histoire et philosophie des mathématiques*[6]. Le premier article s'intitulait *Le développement de la pensée mathématique du jeune Descartes (l'éveil d'un mathématicien)*[7] sous la plume de Michel Serfati.

C'est surtout son Annexe 2, ≪ *Règle-glissière cartésienne* ≫ *et transformée de Descartes*[8] qui nous intéresse ici. Ce texte constitue la première présentation mathématique moderne de la Transformation de Descartes. Dans cette étude, de grande qualité, Serfati cite Henk Bos pour la dénomination de ≪ parabole cartésienne ≫, utilisée dans l'excellente traduction française d'Anne Michel-Pajus *La structure de la Géométrie de Descartes*[9] de 1998.

Géométrie de la Transformation de Descartes

L'origine de ce processus de définition inductive de courbes se trouve dans le Livre Second de *La Géométrie*, plus précisément aux pages 319 et *sq*, puis 343 des *Essais*, 393 et *sq* puis 415 de AT VI. Dans les figures ci-dessous, il faut essentiellement isoler

- le point G, appelé *pôle* par Descartes,
- une droite $ABLK$, non nommée par Descartes, que nous appellerons selon le cas *coulisse* ou *rail* car elle possède deux fonctions distinctes[10],
- et enfin une seconde droite GL, appelée *reigle* par Descartes[11].

Par ailleurs, il servit notamment à l'élaboration d'un problème donné le 8 avril 2005 à l'écrit du Capes externe de mathématiques.

6. Michel Serfati, directeur.
7. Pages 39-104.
8. Pages 81-94.
9. La conférence originale a été prononcée en 1987 à Lecce lors du *Convegno per il 350e anniversario della publicazione del Discours de la Méthode e degli Essais* sous le titre *The Structure of Descartes's Géométrie* et publiée à Florence chez Armando Paoletti, pp. 349-69, dans les Actes du Colloque en 1990 édités par Giulia Belgioioso et *al.* Je profite de l'occasion pour remercie ici publiquement Michel Serfati pour m'avoir jadis communiqué un certain nombre de textes fondamentaux, dont celui-là.
10. Serfati parle de *glissière* pour KL, alors que AB est l'*axe du glissement* (page 82).
11. Dans une allusion aux Conchoïdes de Nicomède, courbes explicitement liées à notre Transformation, Descartes appelle le point A (qui joue le rôle de G) le *pôle*, et - par

Le point C et ses projections orthogonales B et M sur AL et AG - ce dernier étant absent de la première figure -, ainsi qu'un point également variable E qui est une « variante » allusive de C, sont deux « *points courants* » d'une courbe transformée Γ' dont la définition précise sera donnée plus loin.

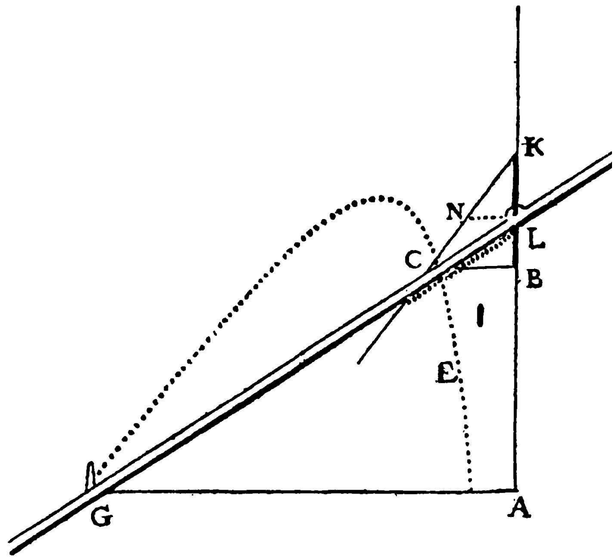


FIGURE 5.1 – *La figure fondamentale de la Transformation de Descartes*

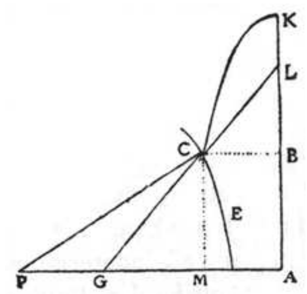


FIGURE 5.2 – *Une variante*

inadvertance ? - la droite BH (qui joue le rôle de BA) la *règle*, ce qui constitue une contradiction : voir les pages 320, 322, 337, 351 et 404 des *Essais*, 393, 394, 409, 423 et 478 de AT VI.

La figure fondamentale a connu quelques avatars : en regardant de près l'édition originale, on voit que la règle GL possède un « intérieur » vide aux environs du point C, ce qui n'est plus exact dans Adam Tannery, où la droite KNC semble passer au dessus, et n'est donc pas interrompue en rencontrant les deux bords [12], ce que nous avons soigneusement évité ici [13].

En voici l'interprétation après décodage d'une figure qui est, il faut bien l'avouer, un peu complexe. La courbe en pointillé est une partie d'hyperbole, transformée de Descartes d'une droite KN, engendrée par un point variable C de KN aligné avec G et L lorsque ce dernier point décrit le *rail* perpendiculaire à GA en A, fixe comme A et G, le point variable K de la *coulisse* KL restant constamment aligné avec A et L et à distance donnée de L.

Descartes parle de « *plan du dessous* [14] » pour désigner un plan que nous appellerions aujourd'hui « *plan fixe* », défini par le pôle G et le rail passant par A ; s'il ne parle pas ici de « *plan du dessus* [15] », soit encore « *plan mobile* », il est facile de compléter son texte par ceci : c'est évidemment le plan qui est défini par le point N et la coulisse KL. Le plan mobile glisse sur le plan fixe en laissant le point L librement décrire le rail, de façon que la coulisse KL garde constamment le rail comme support et que K reste fixe dans le plan mobile. C'est un cas très simple de **mouvement plan sur plan suivant une direction donnée**.

Nous pouvons maintenant définir la Transformation de Descartes : **étant donnée une courbe Γ et un point L fixe dans le plan mobile, la transformée Γ' est le lieu fixe des points tels que la règle GL y**

12. Il y a également une petite variante analogue autour du point L.

13. Si la médiocre édition de 1705 est correcte en ce qui concerne le voisinage de C, elle comporte toutefois une variante bizarre en introduisant un segment pointillé d'origine K et d'extrémité E, autre point analogue à C, ce qui n'a aucun sens. Il est vrai que la figure originale indique bien un segment de ce genre, mais collé à la règle et dont l'interprétation reste mystérieuse. Ajoutons pour faire bon poids que la reproduction photographique de Smith et Latham, en général irréprochable, introduit - au moins lors de la première apparition de la figure - un point I qui paraît incompréhensible. Enfin, comme celle de 1824 de Victor Cousin, l'édition de 1886 de Célestin de Blignières donne un dessin très schématique et trop simplifié (d'ailleurs en une seule occurrence, et non en deux comme il se devrait). Par contre, celles de 1664 et de Schooten sont tout à fait fidèles à celle de 1637.

14. *Cf.* aussi pp. 404 des *Essais* et 478 de AT VI.

15. Voir cependant les pages 404 des *Essais* et 477 de AT VI où il évoque *un plan séparé*.

rencontre Γ. Modifier L dans le plan mobile revient à translater la courbe Γ : des points L distincts donneront en général des Γ' distinctes.

Si l'on veut déterminer l'image C d'un point D de Γ, il suffit de déterminer L sur le rail tel que GL soit parallèle à LD : il est donc nécessaire que D n'appartienne pas à la coulisse.

La première figure ci-dessus montre le cas où Γ est une droite KN, liée à L par les longueurs perpendiculaires $KL = b$ et $LN = c$; son image est alors une hyperbole dont on voit une partie. E est censé en être un autre point, dont le L qui lui est associé n'est pas marqué ; G appartient aussi à cette transformée bien que Descartes n'en parle pas (mais le dessin est explicite).

Si la définition géométrique ci-dessus est finalement claire, il faut bien avouer que sa réalisation par un mécanisme concret comme Descartes les aimait serait bien difficile à réaliser (en bois ? en métal ? avec de crayons circulant dans des rainures ?) mais nous savons bien que l'abstraction lui convenait fort bien ; les calculs qui suivent montrent bien que sa Transformation peut être définie algébriquement de façon nettement plus satisfaisante.

Algèbre de la Transformation de Descartes

Les calculs cartésiens afférents à cette Transformation sont basés sur l'extrait visuel suivant issu des deux figures précédentes

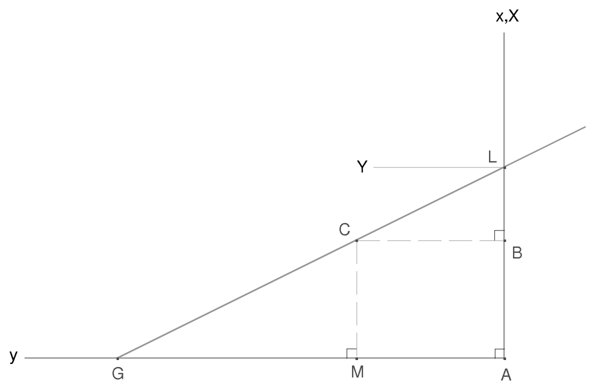


FIGURE 5.3 – *Le schéma de base*

Le triplet $(A; x, y)$ repère notre plan fixe (notations de Descartes), avec $GA = a$; $(L; X, Y)$ le plan mobile[16]. La similitude des deux triangles rectangles homothétiques $\begin{bmatrix} GMC \\ CBL \end{bmatrix}$ - chacun d'entre eux étant homothétique de GAL - permet d'écrire, pour chaque point C possible tel que $y = Y \neq a$ $(C \neq G)$, les égalités orientées[17]

$$\frac{x}{y-a} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM} - \overline{AG}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{BC}} = \frac{X}{Y} \, .$$

Par suite, les coordonnées mobiles (X, Y) de C et ses coordonnées fixes (x, y) sont liées par les deux couples de relations

$$y = Y, \qquad x = \frac{X}{Y}\,(y-a) = X\,\frac{Y-a}{Y}; \qquad Y = y, \qquad X = x\,\frac{y}{y-a}$$

et l'on peut noter l'égalité $\overline{AL} = x - X = -a\,\dfrac{X}{Y}$ qui détermine L.

1) Dans le cas de la première figure, où Γ est le support rectiligne de KN d'équation $\dfrac{X}{b} + \dfrac{Y}{c} = 1$, il en résulte que sa transformée Γ' est l'hyperbole qui a pour équation $c\,\dfrac{xy}{y-a} + by = bc$, soit encore $cxy + b\,(y-a)\,(y-c) = 0$, ce que Descartes écrit (pages 322 des *Essais* et 394 de AT VI)

$$yy \propto cy - \frac{c}{b}\,xy + ay - ac.$$

2) Dans le cas de la seconde figure, où Γ est la parabole d'axe passant par L, de sommet K, de *latus rectum*[18] d et tournée vers les X négatifs, donc d'équation $X = b - \dfrac{Y^2}{d}$, il en résulte que sa transformée Γ' est la *Parabole de Descartes* qui a pour équation $dxy + (y^2 - bd)\,(y-a) = 0$, ce que Descartes écrit[19] (pages 344 des *Essais* et 415 de AT VI)

$$y^3 - ayy - bdy + abd + dxy \propto 0.$$

16. Ce dernier ne figure pas dans Descartes ; il a pour fin de clarifier les calculs à venir.
17. Nous utilisons ici les mesures algébriques de segments introduites par Michel Chasles.
18. Le double de notre paramètre usuel.
19. Cela n'est pas tout à fait exact : en fait, Descartes remplace ici $a = GA$ par b, et $b = KL$ par c, d'où $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0$.

3) Un dernier cas n'est qu'effleuré par Descartes (pages 351 des *Essais* et 423 de AT VI) : celui de la transformée d'un cercle de centre L, qui est une *Conchoïde de Nicomède*. Ici $X^2 + Y^2 = r^2$, d'où une équation de cette courbe
$$x^2y^2 + (y^2 - r^2)(y-a)^2 = 0.$$

Finalement, en suivant Descartes, la transformée d'une courbe Γ dont $F(X,Y) = 0$ est une équation dans le plan mobile, est la courbe dont $f(x,y) = F\Big(\dfrac{xy}{y-a}, y\Big) = 0$ est une équation dans le plan fixe. Cela signifie aussi que si Γ' a $f(x,y) = 0$ pour équation dans le plan fixe, la courbe Γ dont elle est la transformée a pour équation $F(X,Y) = f\Big(\dfrac{X\,(Y-a)}{Y}, Y\Big)$ dans le plan mobile. Deux questions se posent alors : une telle courbe existe-t-elle toujours ? est-elle nécessairement unique ? Les sections suivantes y répondent.

Un point de vue plus moderne

Nous quittons ici la stricte fidélité à Descartes pour deux raisons : obtenir une vision bijective de la Transformation de Descartes en revenant à des dispositions de coordonnées plus habituelles pour un lecteur d'aujourd'hui, qui révèlent une sorte de symétrie entre Γ et Γ' que ne laissait pas deviner les relations ci-dessus.

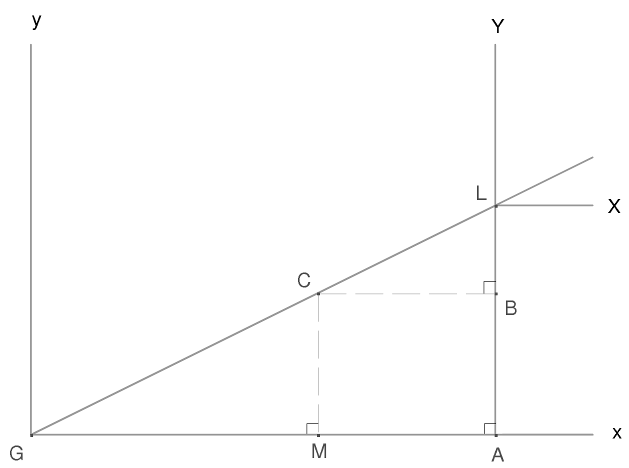


FIGURE 5.4 – *Un autre système de coordonnées*

Ici le triplet $(G; x, y)$ repère le plan fixe et $(L; X, Y)$ le plan mobile. Notons l'égalité évidente $x = X + a$; le rail a pour équation $x = a$ et la coulisse $X = 0$. La similitude des deux triangles rectangles homothétiques $\begin{bmatrix} GMC \\ CBL \end{bmatrix}$ permet d'écrire, pour chaque point C possible tel que $X \neq -a$ ($C \neq G$ ou $x \neq 0$), les égalités orientées

$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{MC}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{BC}} = \frac{Y}{X} = \frac{Y}{x-a}\,.$$

Par suite, (X, Y) et (x, y) sont liées par les deux couples de relations

$$x = X + a, \qquad y = \frac{Y}{X}\,(X + a); \qquad X = x - a, \qquad Y = \frac{y}{x}\,(x - a)$$

et l'on peut noter l'égalité $\overline{AL} = y - Y = a\,\dfrac{Y}{X}$ qui détermine L.

La quasi-symétrie de ces formules montre que Γ est l'image de Γ' par **une autre Transformation de Descartes, de pôle A, où l'on a changé a en son opposé, ce qui signifie que le rail n'est plus la droite passant par A, mais sa parallèle passant par G.**

En effet la courbe Γ d'équation $F(X, Y) = 0$ engendre sa transformée Γ' d'équation[20] $F\Big(x - a, \dfrac{y}{x}\,(x - a)\Big) = 0$. Si l'on prend Γ' comme nouvelle courbe Γ, il faut changer (x, y) en (X, Y) dans cette équation, ce qui donne l'égalité $F\Big(X - a, \dfrac{Y}{X}\,(X - a)\Big) = 0$. Effectuant maintenant la Transformation de Descartes de pôle A et de rail Gy, donc avec a remplacé par $-a$, on doit remplacer X par $x - (-a) = x + a$ et, de même, Y par $\dfrac{y}{x}\,(x + a)$, ce qui fournit finalement

$$F\Big((x + a) - a, \frac{y}{x}\,\big((x + a) - a\big)\Big) = F(x, y) = 0$$

comme équation de la transformée de Γ', qui n'est donc autre que Γ. Nous connaissons par suite une inverse de la Transformation de Descartes initiale, qui est une autre Transformation de Descartes[21]. Cette remarque essentielle

20. En coordonnées projectives, l'équation de Γ mise sous la forme $F(X, Y, Z) = 0$ devient $F(x\,(x - az), y\,(x - az), zx) = 0$ comme équation de Γ'.

21. Son découvreur n'a très vraisemblablement pas connu cette propriété forte, car son choix de système de coordonnées avec origine en A était malencontreux.

indique qu'en un certain sens la Transformation est bijective, mais il faut être plus précis puisque, dans ces formules, apparaissent des dénominateurs x et X qui ne doivent donc pas être nuls. Nous abandonnerons ici le cas général pour nous limiter, comme Descartes lui-même, aux courbes algébriques d'équations $F(X, Y) = 0$ et $f(x, y) = 0$, chacune de ces deux propositions étant équivalentes à $F\Big(x - a, \dfrac{y}{x}\,(x - a)\Big) = 0$ et $f\Big(X + a, \dfrac{Y}{X}\,(X + a)\Big) = 0$.

Vérifions la sur le premier exemple de *La Géométrie*, celui de la droite KN, d'équation[22] $bX - cY + bc = 0$. On trouve d'abord l'hyperbole d'équation $\dfrac{x\,(bx - cy) + b\,(c - a)\,x + acy}{x} = 0$, réécrite sous la forme $\dfrac{X\,(bX - cY) + b\,(c - a)\,X + acY}{X} = 0$, qui devient enfin, tous calculs faits[23], à $bx - cy + bc = 0$, ce qui nous ramène donc à la droite de départ.

Dans cet exemple, la première Transformation a engendré une courbe de degré 2 à partir d'une courbe de degré 1, alors que c'est exactement l'inverse pour l'autre. Cela montre que **l'idée naïve de Descartes selon laquelle le degré de** Γ' (noté ici N) **était toujours égal à celui de** Γ **augmenté de un** (noté ici $n + 1$) **était lourdement inexacte**. Nous reviendrons plus loin sur ce problème de degrés. Donnons six autres exemples intéressants montrant (presque) toute la variété possible

a) $F(X, Y) = Y^n - X - a$, où $F\Big(x - a, \dfrac{y}{x}\,(x - a)\Big) = \dfrac{y^n(x - a)^n - x^{n+1}}{x^n}$, soit $N = 2n$. Une équation de Γ' est alors $y^n(x - a)^n - x^{n+1} = 0$.

b) $F(X, Y) = X^p - Y^q$, où $F\Big(x - a, \dfrac{y}{x}\,(x - a)\Big) = \dfrac{x^q(x - a)^p - y^q\,(x - a)^q}{x^q}$ et $n = \max(p, q)$, soit $N = n$ si $p \geqslant q$ et $2n - p$ sinon. Une équation de Γ' est alors $x^q(x - a)^{p-q} - y^q = 0$ si $p \geqslant q$, et $x^q - y^q(x - a)^{q-p} = 0$ sinon[24].

22. Dans le nouveau système.

23. C'est-à-dire notamment après une simplification par $x + a$. Si l'on avait fait sauter le dénominateur x pour l'hyperbole, on aurait obtenu l'égalité $(x + a)\,(bx - cy + bc) = 0$, c'est-à-dire une adjonction de la droite *parasite* Gy d'équation $x = -a$ à cette conique, ce qui donne une cubique décomposée.

24. *Cf.* Fermat, aux pages 121 et 112 des vol. I et III de ses *Œuvres complètes* ; voir aussi Rabuel, Livre II (VIII), page 125 de ses *Commentaires*, pour un cas voisin.

c) $F(X,Y) = X^{d+1} + (X+a)^d Y^d$, où $F\Big(x-a, \dfrac{y}{x}(x-a)\Big) = (x-a)^d(y^d+x-a)$ et $n = 2d$, soit $N = d = \dfrac{n}{2} \cdot$ Une équation de Γ' est alors $y^d + x - a = 0$.

d) $F(X,Y) = X^d + (X+a)^{d+1} Y^d$, où $F\Big(x-a, \dfrac{y}{x}(x-a)\Big) = (x-a)^d(xy^d+1)$ et $n = 2d+1$, soit $N = d+1 = \dfrac{n+1}{2} \cdot$ Une équation de Γ' est alors $xy^d + 1 = 0$.

e) $F(X,Y) = (X+a)^p Y^q + 1$, où $F\Big(x-a, \dfrac{y}{x}(x-a)\Big) = x^{p-q}(x-a)^q y^q + 1$ et $n = p+q$, soit $N = 2q$ si $q \geqslant p$ et $N = n$ sinon. Une équation de Γ' est alors $(x-a)^q y^q + x^{q-p} = 0$ si $q \geqslant p$, et $x^{p-q}(x-a)^q y^q + 1 = 0$ sinon.

f) $F(X,Y) = (X+a)^p Y^q + X$, où $F\Big(x-a, \dfrac{y}{x}(x-a)\Big) = x^{p-q}(x-a)^q y^q + x - a$ et $n = p+q$, soit $N = 2q-1$ si $q \geqslant p$ et $N = n-1$ sinon. Une équation de Γ' est alors $(x-a)^{q-1} y^q + x^{q-p} = 0$ si $q \geqslant p$, et $x^{p-q}(x-a)^{q-1} y^q + 1 = 0$ sinon.

Dans chacun de ces exemples, on vérifie facilement que l'application à Γ' de la Transformation de Descartes où A et G sont échangés et a multiplié par -1 est bien Γ, ce qui est normal.

On y voit également que
$$\frac{n}{2} \leqslant N \leqslant 2n.$$
Cette remarque sera généralisée plus loin à toutes les courbes algébriques.

De plus, on peut montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier m compris entre $\dfrac{n}{2}$ et $2n$, donc encore entre la partie entière de $\dfrac{n+1}{2}$ et $2n$, il existe une courbe algébrique de degré $N = m$.

Définition cissoïdale de la Transformation de Descartes

Un dernier exemple, très frappant, où Γ n'est autre que le cercle de diamètre GA avec $L = A$, montre que l'équation de Γ' peut sembler être assez complexe à cause de mises en facteurs parasites fâcheuses. Ici $F(X,Y) = X^2+Y^2+aX$ dans le repère $(L;X,Y)$, ce qui donne $\dfrac{x-a}{x^2}\left(x\left(x^2+y^2\right)-ay^2\right)$, réécrit sous la forme $\dfrac{X-a}{X^2}\left(X\left(X^2+Y^2\right)-aY^2\right)$ et enfin, tous calculs faits,

$$\frac{x}{(x+a)^2}\left((x+a)\left((x+a)^2+\frac{y^2}{x^2}(x+a)^2\right)-a\,\frac{y^2}{x^2}(x+a)^2\right)=x^2+y^2+ax.$$

Débarrassée de ses facteurs inopportuns, Γ' apparaît comme étant la courbe [25] d'équation $x\left(x^2+y^2\right)=ay^2$, c'est-à-dire une *cissoïde droite de Dioclès* [26], évoquée par Descartes dans un autre contexte (classification des courbes, admissibles ou mécaniques) page 317 des *Essais* et 390 de AT VI.

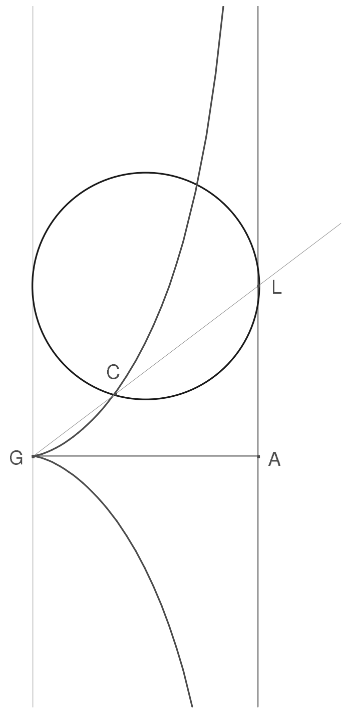


FIGURE 5.5 – *La cissoïde droite de Dioclès*

25. C'est un cas particulier d'un exemple de Serfati (page 90).
26. Inventée vers l'an 200 avant Jésus-Christ pour résoudre la duplication du cube.

Ce que nous venons de voir est un cas particulier de *transformée cissoïdale*[27], technique fort ancienne : une courbe $\mathcal{C}$, un point G et une droite $\mathcal{D}$ étant donnés, **la cissoïde de $\mathcal{C}$ relative à G et $\mathcal{D}$ est le lieu des points M' définis par $\overrightarrow{LM'} = \overrightarrow{GM}$ où M décrit $\mathcal{C}$ et L est l'intersection des droites GL et $\mathcal{D}$ si elle existe**[28].

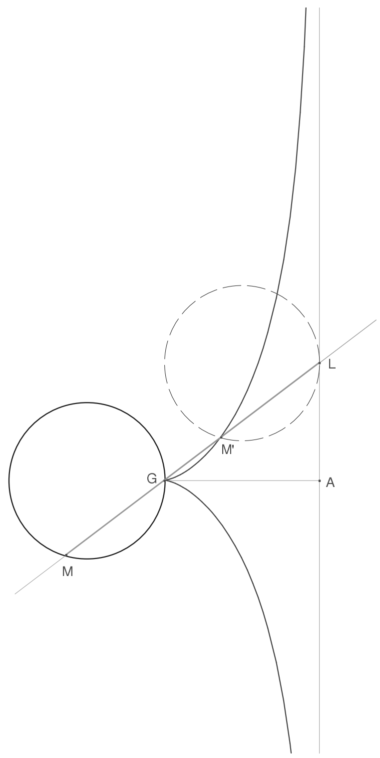


FIGURE 5.6 – *Un exemple de transformée cissoïdale*

Les deux dernières figures peuvent être généralisées à toute Transformation de Descartes : si la courbe Γ (par exemple un cercle dans ce cas) subit la

27. Signalons au passage que la transformée cissoïdale d'un cercle par rapport à un point de ce cercle jouit de propriétés remarquables : c'est aussi l'*inverse* d'une conique par rapport à l'un de ses points, la *podaire* d'une parabole et, surtout, une *cubique circulaire à point double*, c'est-à-dire une courbe dont une équation dans un plan euclidien est $x\,(x^2+y^2)+ax^2+bxy+cy^2=0$, soit $\rho = -\dfrac{c}{\cos\theta} + (c-a)\cos\theta - b\sin\theta$.

28. On rencontre aussi une autre définition, très voisine, où $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{ML}$, ce qui revient à remplacer $\mathcal{C}$ par sa symétrique relative à G puisque, dans le premier cas, on construit $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{GM}$, alors que, dans le second, on construit $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GL} - \overrightarrow{GM}$.

translation de vecteur $\overrightarrow{LG}$, la transformée cissoïdale de sa translatée par rapport à G et au rail Ay est évidemment la Transformée de Descartes Γ' de Γ puisque $\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{LM'}$ d'où $C = M'$. La cissoïde de Dioclès est donc une transformée cissoïdale !

Cela montre qu'en dépit de son apparence d'extrême originalité la Transformation de Descartes est simplement un rhabillage d'une vieille et harmonieuse technique grecque, qui était encore couramment enseignée en France aux jeunes bacheliers entrant dans l'enseignement supérieur scientifique jusqu'à la fin des années 1960.

Voici une interprétation frappante de cette dernière propriété : si Γ admet une *équation polaire*[29] $\rho = f(\theta)$ avec L pour pôle, alors

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + f(\theta)$$

en est une pour Γ' avec G pour pôle. Par exemple, si f est constante, on retrouve aussitôt que la Transformée de Descartes d'un cercle centré en L est bien une conchoïde de droite[30].

Signalons simplement ici[31] que, connaissant la tangente à Γ en un point M, on peut alors construire la tangente en M' de sa transformée cissoïdale Γ' : cette dernière et la symétrique de la tangente en M par rapport à G déterminent sur Δ un segment de milieu L. Cette propriété[32] était très certainement inconnue de Descartes ; en effet, la construction de la tangente à la Parabole de Descartes qu'il donne comme exemple de sa technique propre (page 349 des *Essais*, et 421 de AT VI), est en effet tout à fait différente.

Rappelons que l'inversibilité de la Transformation de Descartes mise en évidence plus haut[33] possède une conséquence très importante : **toute courbe Γ' est en effet une transformée de Descartes d'une courbe** Γ, qui n'est qu'autre que sa transformée où les points A et G ont échangé

29. Ce concept, très présent chez Newton, par exemple dans son livre sur les fluxions et les suites infinies, est absent chez Descartes.

30. On porte, de part et d'autre de L, la longueur constante f, ce qui donne deux points courants de la transformée.

31. Voir l'Annexe I.

32. Application un peu lourde du théorème de Menelaüs.

33. Et que l'interprétation cissoïdale rend également évidente.

leurs rôles, ce qui signifie en bref que **la Transformation de Descartes est bijective**[34].

Notons au passage que l'usage exclusif d'égalités algébriques telles que les précédentes masque le fait que la transformée ne dépend pas seulement de Γ mais aussi du choix du point L, puisque ce point est tout simplement l'origine du repère dans lequel on caractérise Γ. La géométrie analytique (cartésienne) permet donc une simplification effective fort efficace par rapport à la simple définition géométrique de départ, même sous sa forme très concrète de transformation cissoïdale.

Les transformées des courbes algébriques

Écrivons ici un algorithme précis déterminant la Transformation de Descartes des courbes algébriques, définies par l'annulation de polynômes à deux variables $F(X,Y)=0$. Sagement, nous ne nous poserons pas le problème difficile de l'unicité (à un coefficient multiplicatif près) d'un tel polynôme F, ici supposé irréductible, pour une courbe Γ donnée[35] ; il n'est pas évident *a priori* que l'algorithme ci-dessous donnerait le même résultat avec un polynôme $\widehat{F}$ ayant même fonction que F sans lui être proportionnel.

Cela dit, voici la méthode annoncée. Nous poserons

$$F(X,Y)=\sum_{m=v}^{n}\sum_{k=0}^{m} f_{m,k}X^{m-k}Y^{k}$$

où n est le degré[36] de Γ, v sa *valuation*, c'est-à-dire qu'il existe un i et un j tels que $f_{n,i}$ et $f_{v,j}$ sont non nuls. Nous poserons $q \geqslant 1$ pour le degré de F relatif à Y, c'est-à-dire tel qu'il existe un μ tel que $f_{\mu,q}$ soit non nul, avec $f_{m,k}=0$ pour tous les (m,k) tels que $k>q$.

34. Voir pourtant Serfati, *op. cit.*, page 86 ; mais cela tient simplement au fait que cet auteur ne recherche pas systématiquement à éliminer les droites parasites issues de l'expression $F\Big(x-a, \dfrac{y}{x}\,(x-a)\Big)$.

35. Pourtant, $X^2-Y=0$ et $X^4-X^2Y+X^2-Y=0$ caractérisent la même parabole...

36. Le terme technique correct est *ordre*, mais le mot *degré* est plus concret pour un non-spécialiste de géométrie algébrique.

Nous définirons enfin la fraction rationnelle

$$\varphi(x,y) = F\Big(x-a, \frac{y}{x}\,(x-a)\Big) = \sum_{m=v}^{n}\sum_{k=0}^{m} f_{m,k}(x-a)^m \frac{y^k}{x^k}\,.$$

De manière très concrète, nous imaginerons les réels $f_{m,k}$ placés dans une matrice carrée Φ d'ordre n (complétés par des zéros là où $f_{m,k}$ n'est pas défini *a priori*).

La première étape consiste à calculer $\varphi(x,y)$, simplifier ses termes, et lire sur ceux d'entre eux où figure un x au dénominateur le nombre r égal au *plus petit* entier k tel que $x^k\varphi(x,y)$ soit polynomiale. Il est clair que $r \leqslant q$; l'exemple de $F(X,Y) = 1+(X+a)^3Y^2$, pour lequel $\varphi(x,y) = 1+x\,(x-a)^2y^2$, montre que l'on peut avoir $r < q$ (ici $r = 0 < 2 = q$).

Nous poserons alors

$$g(x,y) = x^r\varphi(x,y) = \sum_{m=v}^{n}\sum_{k=0}^{m} f_{m,k}(x-a)^m x^{r-k}y^k$$

Cette expression est peut-être simplifiable par une certaine quantité de la forme $(x-a)^h$. Plus précisément, en guise de seconde étape, on peut écrire [37]

$$f(x,y) = (x-a)^{-v}g(x,y) = \sum_{m=v}^{n}\sum_{k=0}^{m} f_{m,k}(x-a)^{m-v}x^{r-k}y^k$$

et il est facile de voir que v est *le plus grand* entier h tel que $(x-a)^{-h}g(x,y)$ soit polynomiale.

Nous définirons enfin, pour la première fois, Γ' comme la courbe algébrique dont $f(x,y) = 0$ est une équation. Le polynôme f est irréductible par bijectivité. Son degré N est clairement

$$N = n - v + r$$

37. Cela revient à modifier Γ en lui ôtant ses éventuels points sur la coulisse, caractérisés par $X = 0$ (ce qui équivaut à $x = a$). En coordonnées projectives on obtient

$$f(x,y,z) = \sum_{m=v}^{n}\sum_{k=0}^{m} f_{m,k}(x-az)^{m-v}x^{r-k}y^kz^{n-m}.$$

et vérifie l'inégalité $N \leqslant 2n$, puisque

$$n - v + r \leqslant n + r \leqslant n + q \leqslant 2n.$$

Les exemples cités ci-dessus, notamment le b) de la page 218, montrent que n'importe quel entier entre n et $2n$ peut être le degré d'une courbe Γ'. Mais inversement, puisque Γ est aussi l'image de Γ' dans une autre Transformation de Descartes, on dispose de l'inégalité $n \leqslant 2N$, soit finalement [38]

$$\frac{n}{2} \leqslant N \leqslant 2n,$$

et tout entier entre $\frac{n}{2}$ et $2n$ (plus précisément entre la partie entière de $\frac{n+1}{2}$ et $2n$) peut être le degré de la transformée d'une courbe de degré n.

La Parabole Cartésienne

La Parabole Cartésienne [39] est la transformée de Descartes d'une Parabole dont l'axe, qui contient L distinct de son sommet K, forme la coulisse.

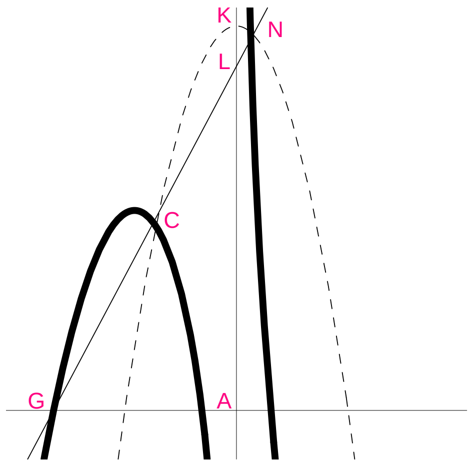


Figure 5.7 – *La Parabole Cartésienne vue par Descartes*

38. Ce qui prouve que l'intuition selon laquelle $N = n + 1$ pour toute courbe Γ est largement inexacte. Fermat avait bien raison de douter dans sa *Dissertatio tripartita*...

39. Ou Cubique Cartésienne, ou Conchoïde parabolique ou Cartésienne, ou Conchoïde cubique, ou Conoïde Parabolique, ou Trident (mot que nous devons à Newton) *etc.*

Elle apparaît à sept reprises dans *La Géométrie*. Les références que nous donnons ici sous la forme de couples de nombres (e, a) signifient « aux pages e des *Essais* et a de AT VI ».

1 Dans le Livre Premier, une seule occurrence

a) une brève allusion (309,381)

> « *Au reste la premiere, & la plus simple de toutes aprés les sections coniques, est celle qu'on peut descrire par l'intersection d'une Parabole, & d'une ligne droite, en la façon qui sera tantost expliquée* »,

juste avant l'introduction des coordonnées cartésiennes, à propos d'un lieu de Pappus à quatre lignes.

2 Dans le Livre Second, quatre occurrences

a) Définition (322,395) par la Transformation de Descartes.

b) Définition, sur un cas un peu particulier (336,408), comme courbe de Pappus à cinq droites, et équation

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0 \qquad \text{(avec ici } \; -b = 2c = 2d = -2a).$$

c) Première étape (343,415) de la recherche du pied de la normale par introduction de (v, s) dans l'équation générale [40].

d) Seconde et troisième étapes (348-9,420-1) de cette recherche (établissement d'un système de six équations linéaires, puis détermination effective de l'ordonnée v du pied de la normale).

3 Dans le Livre Troisième, deux occurrences

a) Entrée en scène (404,478) de la Parabole Cartésienne dans la résolution des équations de degré 5 ou 6.

40. Voir le chapitres sur la construction cartésienne des normales à une courbe.

b) Introduction (407,472), avec démonstration, d'une troisième définition géométrique de la Parabole Cartésienne, pour en rendre la manipulation moins « incommode ».

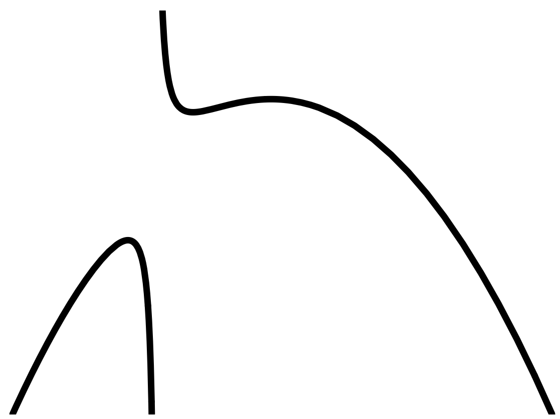


FIGURE 5.8 – *Une autre Parabole Cartésienne*

Elle engendre cinq figures distinctes dans *La Géométrie*, dont quatre sont utilisées deux fois

1 Dans le Livre Second, trois figures, toutes doublées

a) Définition graphique générale de la Transformation de Descartes (320,393), reprise en (321,395) : elle ne montre pas vraiment la Parabole Cartésienne, mais en fait une partie d'hyperbole (transformée d'une droite) qui lui ressemble approximativement.

b) Illustration graphique, bien peu lisible, d'un cas particulier (336,409), reprise en (338,410), comme courbe de Pappus à cinq droites, accompagnée de son *adjointe*, qui en est la symétrique, relative à GA. Ici figure aussi la seconde branche, quasi rectiligne.

Dans cette figure, à l'inverse des autres cas, la parabole génératrice est tournée vers le haut, et la Parabole Cartésienne a la forme suivante

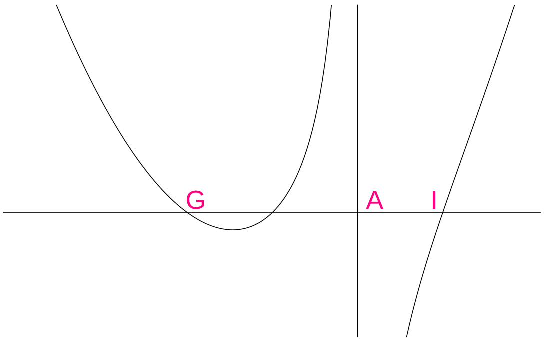


FIGURE 5.9 – *La courbe d'équation* $axy = y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3$

c) Image de la première étape (343,415), reprise en $(349, 421)$ pour les étapes suivantes de la recherche du pied de la normale. Ici la partie de Parabole Cartésienne est réduite à un petit arc CE, à côté d'un autre petit arc KC de la parabole génératrice.

2 Dans le Livre Troisième, deux figures, l'une doublée, l'autre non

a) Représentation complète de la technique complexe de résolution graphique des équations de degré 5 ou 6 (404,477), reprise en (410,481), avec une branche de Parabole Cartésienne, la parabole génitrice et un cercle, pour une équation n'ayant que quatre racines. Cette figure essentielle, summum du Traité, sera longuement étudiée au chapitre consacré à cette méthode fortement originale.

b) Illustration de la troisième définition de la Parabole Cartésienne (406,479), avec représentation d'une seulement de ses branches. Des indications barbares telles que $2C$ ou $3C$ compliquent la lecture : il faut simplement comprendre qu'ils s'agit d'avatars inutiles et variés du point courant C (idem pour $2S$, $3S$, $2T$, $3T$, $2V$ et $3V$).

Quelques propriétés de la Parabole de Descartes

Nous partirons de l'équation fondamentale

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0.$$

La Troisième définition

Pour simplifier le travail du supposé dessinateur résolvant graphiquement une équation de degré six, Descartes introduit tout à la fin du Livre Troisième une variante qui n'utilise que la règle et le compas [41], sans Problème de Pappus à résoudre ni de parabole génératrice à faire glisser.

Nous utiliserons ici les notations de la figure de l'Annexe II dans laquelle le lecteur trouvera la démonstration mathématique de la validité de cette trouvaille ingénieuse (pour coïncider avec celle de la fin du Traité, il lui faudra changer A en B et G en A).

Voici la technique. Au départ, on se donne trois constantes strictement positives (b, c, d), le pôle G de coordonnées [42] $(0, b)$ et deux points fixes sur le rail, A et K, de coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(0, -d)$.

Ayant pris arbitrairement un point T sur la partie positive du rail Ax, il reste à construire le point V de cet axe vérifiant $\overline{VT} = c$ et un point S intersection de l'axe AG d'avec le cercle de diamètre KT. Il en existe deux possibles, correspondant aux deux branches de la Parabole Cartésienne à construire, mais l'on en sélectionne un de manière arbitraire [43].

Cela fait, le point courant C de la courbe est obtenu comme intersection de la parallèle SC à KA et de la droite GC parallèle à SV. Il décrira toute la Parabole Cartésienne d'équation $y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$.

Visiblement, Descartes n'était très probablement pas en possession de cette technique simplificatrice lorsqu'il écrivit ses deux premiers livres, et cette variante avantageuse serait une découverte de dernière minute, d'où sa place bizarre dans le plan du Traité.

41. Même si l'intersection d'une droite et d'une parabole peut être aussi déterminée par la règle et le compas, les manipulations restent assez lourdes.

42. Ces nombres ne sont pas dans le texte : ils ne sont introduits ici que pour permettre de construire aisément la figure et suivre la démonstration de l'Annexe.

43. Un raffinement, plus simple puisqu'éliminant tout cercle, consiste à choisir arbitrairement $S \neq A$ sur AG, puis à en déduire V sur KA en rendant droit l'angle $\widehat{KSV}$.

Une équation réduite

Nous échangerons ici x et y afin de retrouver une vision plus simple et plus classique de l'étude de la représentation graphique d'une équation de la forme $y = \varphi(x)$, à savoir

$$y = \frac{x^3 - bx^2 - cdx + bcd}{-dx} = -\frac{1}{d}\left(x^2 - bx - cd + \frac{bcd}{x}\right)\cdot$$

Posons $k = \sqrt[3]{bcd}$, $a = \dfrac{b}{2k}$, $X = \dfrac{x}{k}$ et $Y = \dfrac{1}{4k^2}\,(b^2 + 4cd - 4dy)$. Un calcul mécanique donne aussitôt

$$Y = (X - a)^2 + \frac{1}{X}$$

comme une équation réduite de la parabole cartésienne dans un repère encore orthogonal (mais pas nécessairement orthonormé).

Cette équation met en lumière le rôle d'une *parabole asymptote* $Y = (X-a)^2$, et celui d'une asymptote usuelle d'équation $X = 0$.

Si l'on ne tient plus nécessairement à avoir des axes orthogonaux, on peut encore trouver plus simple, à savoir

$$\eta = \xi^2 + \frac{1}{\xi}\cdot$$

Il suffit en effet de poser $\xi = X$ et $\eta = Y + 2aX - a^2$.

Inversement, si l'on se restreint à des changements de base orthonormés couplés à une homothétie, en posant $u = -\dfrac{b}{d}$, $v = \dfrac{cd}{b^2}$, $y = by'$ et $x = bx' + c$, il vient

$$x' = u\left(y'^{\,2} - y' + \frac{v}{y'}\right).$$

La critique de Newton

On ne peut quitter la Parabole Cartésienne sans citer Newton qui, vers 1670, dans ses *Errores Cartesij Geometriæ*[44], attaque fortement Descartes pour

44. Page 344 du volume IV de ses *Mathematical Papers* édités pat Derek Thomas Whiteside en 1967.

avoir affirmé que sa courbe était la plus simple après les coniques. Il dit notamment que l'hyperbole d'équation $(y-1)(y+1) = x^2$, lieu de Pappus à quatre ligne, était plus simple que le cercle (pourtant d'équation très analogue, $(1-y)(1+y) = x^2$), et que cette notion de simplicité était bien trompeuse. Il ajoute qu'il en va d'ailleurs de même pour la parabole

« *Hyperbola et Parabola essent simpliciores quam circulus siquidem locus puncti est ad istas figuras ubi duæ sint parallelæ rectæ et tertia ijs.* »

Ce texte étrange ne fait guère honneur au grand Newton dont l'une au moins de ce qu'il croit pouvoir traiter de *Three mistakes in Descartes' Geometrie*, est incompréhensible de nos jours. Pendant plusieurs siècles, paraphrasant Pascal, nous pouvons dire que la vérité ne fut pas toujours la même à Londres et à Paris. Cela dit, la phrase de Descartes n'était pas heureuse, et d'ailleurs la courbe dont il était si fier n'a pas franchi les siècles.

Annexe I : Les tangentes d'une transformée

Commençons par un lemme très simple : soit une courbe $\mathcal{C}$ définie dans un repère d'origine G par des équations paramétriques

$$x = u(t), \qquad y = v(t)$$

où u et v sont des fonctions dérivables, Δ la droite d'équation $x = a$ et A le point de coordonnées $(a, 0)$.

La tangente en un point $\big(u(t), v(t)\big)$ de $\mathcal{C}$ coupe en général la droite Δ en un point T tel que

$$\overline{AT} = v + (a-u)\,\frac{v'}{u'}$$

(sous la condition $u'(t) \neq 0$) puisqu'une équation paramétrique de la tangente s'écrit

$$x = u + \lambda u', \qquad y = v + \lambda v'.$$

Supposons qu'un point M décrive la courbe Γ d'équations paramétriques

$$x = X(t), \qquad y = Y(t).$$

Pour obtenir l'intersection U de Δ d'avec la symétrique de la tangente en M par rapport à l'origine G, il suffit d'appliquer le lemme précédent au couple $u = -X$, $v = -Y$ ce qui donne

$$\overline{AU} = -Y + (a + X)\,\frac{Y'}{X'}\cdot$$

Si C est le point associé à M sur la transformée de Descartes Γ' où G est le pôle et Δ le rail, sa tangente coupe en général Δ en V tel que

$$\overline{AV} = (a + X)\,\frac{Y}{X} - \frac{X}{X'}\left(\frac{X\,(X'Y + (a + X)Y') - X'(a + X)\,Y}{X^2}\right)$$

$$= 2a\,\frac{Y}{X} - a\,\frac{Y'}{X'} - X\,\frac{Y'}{X'} + Y = 2a\,\frac{Y}{X} - \overline{AU} = 2\,\overline{AL} - \overline{AU}$$

en posant ici $u = a + X$ et $v = (a + X)\,\dfrac{Y}{X}$, ce qui démontre l'assertion.

Annexe II : La troisième définition

La figure ci-dessous, et une ligne de calculs basée sur l'homothétie de deux triangles rectangles, prouve l'identité de la troisième définition avec les deux autres, par l'intermédiaire de l'équation générale des Paraboles Cartésiennes. On y lit que les triangles $\begin{bmatrix} SGC \\ ASV \end{bmatrix}$ sont semblables (mêmes valeurs des trois angles), et que $\overline{AK}\cdot\overline{AT} = -AS^2$. Par suite

$$\frac{x}{b - y} = \frac{\overline{SC}}{\overline{AG} - \overline{AS}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SG}} = \frac{\overline{AV}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AT} - \overline{VT}}{\overline{AS}} = \frac{-AS^2 - \overline{VT}\cdot\overline{AK}}{\overline{AS}\cdot\overline{AK}} = \frac{-y^2 + cd}{-dy}$$

c'est-à-dire

$$dxy = -(y - b)\,(y^2 - cd) = -y^3 + by^2 + cdy - bcd$$

ce qui termine la preuve (la réciproque est évidente).

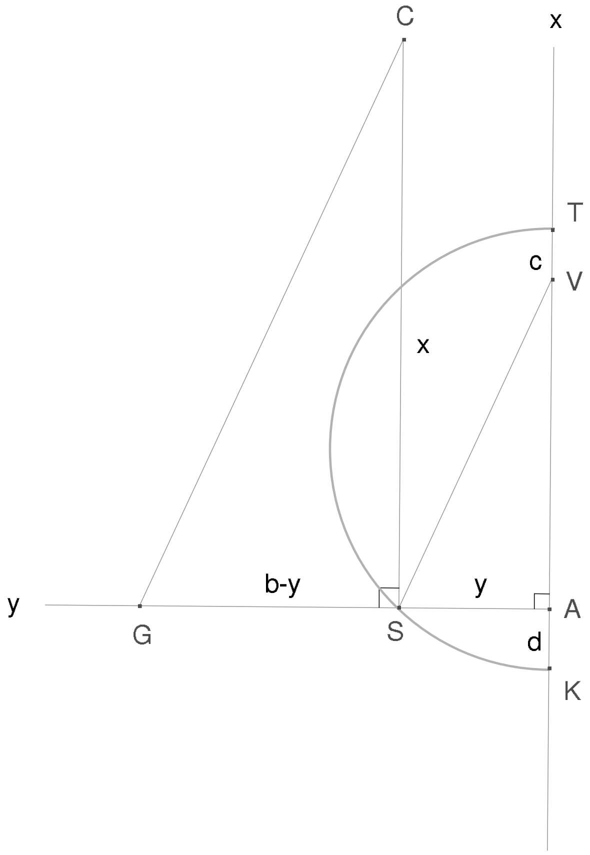


FIGURE 5.10 – La troisième définition de la Parabole Cartésienne

Les deux branches de la courbe correspondent aux deux positions possibles de S par rapport au rail. Cela justifie la position de Descartes dans l'une de ses polémiques avec Roberval [45], même si ses figures ne montrent en général qu'une fraction de l'une de ces deux branches.

Pour conclure, on remarquera que toutes les trois définitions possibles de la Parabole Cartésienne sont certes exprimables en termes géométriques, et qu'elles sont naturellement équivalentes, mais que ce fait ne peut s'établir simplement qu'en recourant à la géométrie analytique (ici fort élémentaire il est vrai, ce qui permet de déguiser ce recours sans trop d'algèbre). Cela montre la puissance de l'outil analytique, que Descartes maîtrisait visiblement très bien, ce qui est tout à fait naturel !

45. Voir la lettre CXXIV à Mersenne, 3 juin 1638, page 156 de AT II.

Annexe III : La conjecture de Bos (1992)

La figure qui suit est un extrait de celle que l'on peut lire page 336 des *Essais* et 409 de AT VI. Elle correspond à la définition d'un cas particulier de Parabole Cartésienne comme lieu de Pappus à cinq droites

$$D_1 D_2 D_4 = a\, D_3 . D_5$$

où $D_1 = 2a - y$, $D_2 = a - y$, $D_3 = y$, $D_4 = a + y$ et $D_5 = x$ dans le repère $(G; x, y)$ où l'axe Gy est horizontal et tourné vers la gauche, et l'axe Gx dirigé vers le haut de la feuille, les signes étant distribués de façon à rendre positifs les cinq nombres D_i compte-tenu de la position du point courant C choisie par le dessinateur.

C'est son étude attentive qui a conduit Henk Bos à formuler en 1992 une conjecture assez curieuse dans l'article cité tout au début de ce chapitre (page 209). On y voit la parabole ordinaire d'équation $a\,X = (Y - a)\,(Y + a)$ dans le repère $(L; X, Y)$ analogue à $(G; x, y)$.

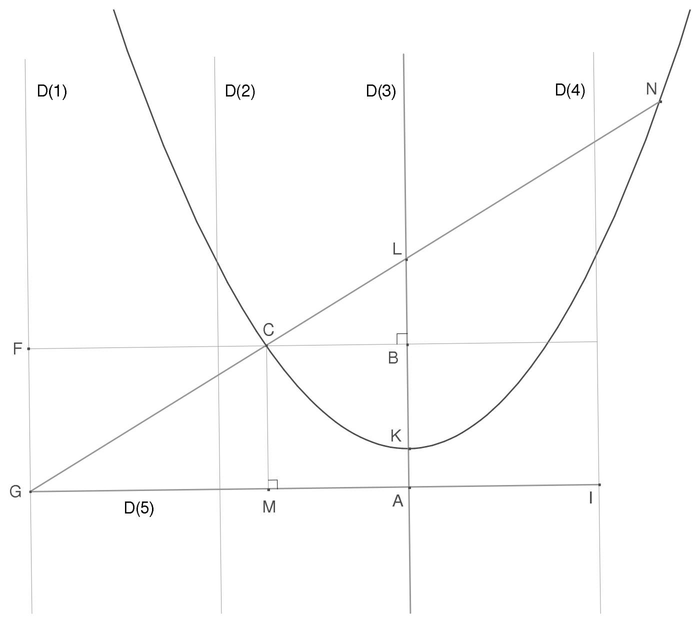


FIGURE 5.11 – *La figure de la conjecture de Henk Bos*

L'idée est d'introduire un nouveau paramètre à côté des D_i, à savoir

$$z = \frac{D_3 D_5}{D_1} = \frac{1}{a}\, D_2 D_4.$$

Ce nombre, défini par la première égalité, possède une interprétation géométrique simple, puisque les triangles homothétiques $\begin{pmatrix} GMC \\ CBL \end{pmatrix}$, déjà remarqués[46], permettent d'écrire

$$\frac{z}{D_3} = \frac{D_5}{D_1} = \frac{CM}{FC} = \frac{CM}{GM} = \frac{LB}{CB} = \frac{LB}{D_3}$$

d'où $z = LB$.

Bien entendu cette relation ne dépend que de la définition de la Transformation de Descartes, et non du cas particulier de l'image d'une parabole.

Mais dans ce cas précis, on peut retrouver facilement l'autre égalité, à savoir $z = \dfrac{1}{a}\, D_2 D_4$ d'après les égalités

$$z = -X = \frac{(a+Y)\,(a-Y)}{a} = \frac{D_2 D_4}{a},$$

ce qui caractérise une solution à un Problème de Pappus à trois droites (non spécial), puisque z est la distance de C à une droite LY, fixe dans le plan mobile comme D_2 et D_4.

Henk Bos remarque que l'introduction de ce nouveau paramètre[47] revient à montrer que la Transformation de Descartes agit sur un lieu à trois droites pour donner un lieu à cinq droites, soit une augmentation de deux degrés et donc d'un genre.

Il écrit explicitement, en page 80,

46. Et explicitement cités par Descartes, pages 337 des *Essais* et 409 de AT VI.

47. Certes explicitement absent du texte, mais qui y figure quand même implicitement au moment où Descartes écrit que $BK = a - \dfrac{XY}{2a-Y}$ ce qui équivaut à $z = \dfrac{XY}{2a-Y} = \dfrac{D_3 D_5}{D_1}\cdot$

« *I propose as a conjecture that Descartes found this reduction*[48] *and its kinematic interpretation at an early stage of his study of the Pappus' problem, probably soon after Golius had suggested the problem to him. Moreover I propose that this combination of an analytic method of reduction of a problem to one of a simpler type, and a kinetic model to generate intricate curves from simpler ones, was decisive in the formation of Descartes' ideas on geometry, on his proper demarcation and on its legitime methods of construction* ».

Soit, mais il faut remarquer que cela n'a fonctionné ici que parce que les droites D_2 et D_4, communes aux définitions des deux courbes de Pappus en question, sont toutes deux invariantes par translation et donc parallèles ; ce cas est loin d'être général. L'intuition prêtée à Descartes apparaît alors comme fragile, même si la tentative de Henk Bos était attirante.

48. D'un problème à cinq lignes à un problème en un nombre inférieur de lignes.

Chapitre 6

Pappus II redéfinit les Coniques

Lors de l'étude du Problème de Pappus, nous avions indiqué qu'il paraissait intéressant de le décomposer en deux sous-problèmes, Pappus I (*que peut-on dire d'une ligne à N droites ?*), et Pappus II (*montrer que pour $N = 4$ ou 3, cette ligne est une Conique*[1], voir la page 82). Le premier a été réglé, de manière fort originale, comme on l'a vu dans notre chapitre 3, en mettant au point les coordonnées cartésiennes ; il lui reste à boucler le second, préparé par exemple en notre page 91 qui explicite le textes et les calculs de sa *Réponse à la question de Pappus*, pages 307 des *Essais*, 380 de AT VI, et suivantes.

L'importance du résultat qu'il annonce et démontre (presque) sans faille ne saurait être surestimée. D'abord, comme il n'a pas manqué de le souligner lui-même avec force, c'est la fin d'un très vieux problème, énigme laissée par l'Antiquité : comment mieux prouver sa force qu'en se mesurant aux Anciens, et en explicitant comment ses méthodes modernes lui donnent une puissance de feu jusque là inconnue ?

Cela dit, de notre point de vue d'aujourd'hui, ce théorème de Pappus II (ou plus exactement d'Apollonius-Descartes) est un acte fondateur : en dépit des apparences, il ne s'applique pas seulement aux lieux à quatre droites, mais à toute équation $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme à deux variables de degré 2, en donnant une signification géométrique aux ensembles ponctuels qu'elle

1. À la différence - toute en apparence - de Descartes, nous acceptons le Cercle comme une Conique. Il est d'ailleurs si peu respectueux de cette distinction fort ancienne que le cas particulier qu'il va développer est justement consacré à un Cercle !

définit. Il suffit de permettre au degré de prendre n'importe quelle valeur pour pouvoir disposer d'un stock immense, et tout neuf, de courbes que Descartes utilisera notamment pour pouvoir résoudre, comme il le croyait, toutes les équations algébriques.

La figure pappienne fondamentale

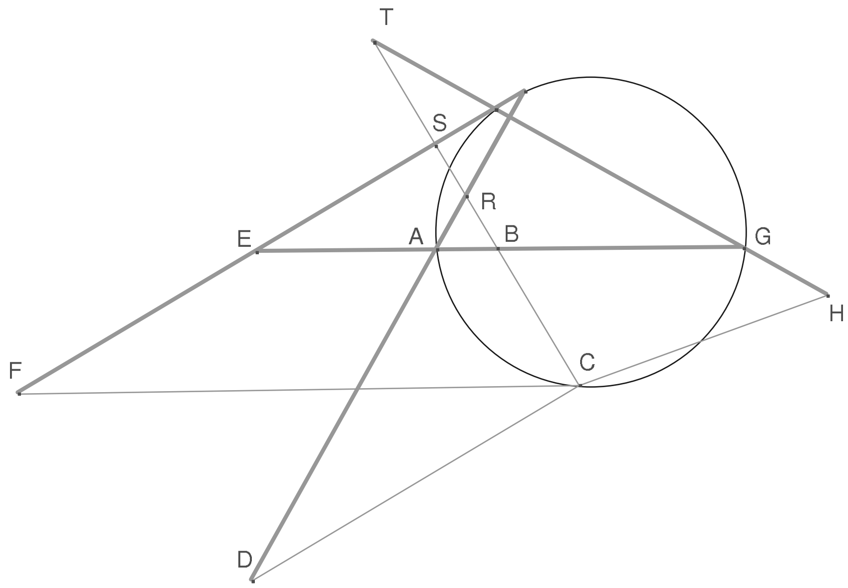


FIGURE 6.1 – *La figure circulaire du lieu à quatre droites*

La figure ci-dessus joue un rôle essentiel dans la démonstration. On la rencontre sept fois, aux pages 309, 311, 325, 327, 329, 331 et 334 des *Essais*, et aux pages [2] 382, 384, 398, 400, 404, 402 et 406 de AT VI.

Descartes nous donne, pages 333 des *Essais* et 405 de AT VI, les clefs numériques de sa construction. Reprenant les notations que nous avons explicitées dans notre chapitre 3, il tire aussitôt des égalités suivantes

$$EA = 3; \qquad AG = 5; \qquad AB = BR; \qquad BS = \frac{1}{2}BE;$$

2. Attention à l'inversion entre les numéros de page 402 et 404, résultant d'une erreur étonnante d'Adam et Tannery.

$$GB = BT; \qquad CD = \frac{3}{2}\,CR; \qquad CF = 2\,CS; \qquad CH = \frac{2}{3}\,CT$$

les valeurs ci-dessous

$$z = b = f = 1; \qquad c = \frac{1}{g} = \frac{3}{2}; \qquad e = \frac{1}{d} = 2; \qquad k = 3; \qquad \ell = 5$$

d'où $ez^3 - cgz^2 = 1$ et

$$CB = y; \qquad CD = \frac{3}{2}\,(x+y); \qquad CF = 2y+x+3; \qquad CH = \frac{2}{3}\,(y-x+5).$$

Il en déduit que $m = 1$, $n = \dfrac{1}{2}$, $o = 4$ et $p = \dfrac{3}{4}\cdot$ *Sur ce dernier point il a tort* [3] ; il faut lire $p = -\dfrac{3}{4}\cdot$ Des équations de la courbe lieu du point C, dans son repère qui n'est pas orthogonal, sont donc [4]

$$y^2 + (x-2)\,y + x^2 - 5x = 0; \qquad y\,(2y + x + 3) = (x + y)\,(y - x + 5);$$

$$y = 1 - \frac{x}{2} \pm \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}\,x^2}.$$

Cette courbe est un Cercle, comme il va le prouver plus loin. Son *adjointe* [5], définie par l'équation obtenue en changeant le signe du second membre, soit $y\,(2y+x+3) = -\,(x+y)\,(y-x+5)$, et finalement $3y^2+xy-x^2+8y+5x = 0$, est une Hyperbole, qui coupe le cercle aux quatre points fixes

$$A(0,0); \qquad G(5,0); \qquad U(3,-3); \qquad V(7/3,-8/3).$$

Enfin il choisit arbitrairement C sur le Cercle, en posant par simplicité [6] $x = 1$, d'où $y = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ (en prenant le signe $+$), soit environ $2,56$.

3. Ah, les nombres négatifs !

4. Naturellement le signe $\pm$ est moderne, Descartes utilise seulement le $+$, ce qui ne lui donne en théorie qu'une demi-courbe.

5. Sur laquelle Descartes fait silence.

6. Il ne le dit pas, mais cela peut de déduire d'une étude attentive de la figure. Cette valeur de x doit être bien entendu comprise entre les deux racines du trinôme $1+4x-\dfrac{3}{4}\,x^2$, approximativement $-\,0,23$ et $5,57$, ce qui le rend positif.

Construction explicite de la figure cartésienne

L'on connaît l'extrême importance que Descartes apportait aux constructions géométriques, de courbes comme des figures qu'il a confiées au talent graphique de Van Schooten. Nous n'avons aucun document précis sur ce cas, mais il n'est pas difficile de reconstituer le travail de mise au point de celle-ci.

La simple considération d'un triangle équilatéral (première Proposition du premier Élément d'Euclide !) permet d'obtenir instantanément des angles de mesures $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$, un segment de longueur $\sqrt{3}$ et, par conséquent, un angle [7] α dont le sinus vaut $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$ Il est encore plus facile de se donner un angle [8] β dont le sinus vaut $\frac{3}{4}\cdot$

Munis de ces ingrédients, on peut commencer à se donner un triangle isocèle EVG d'angles à la base de mesure $\frac{\pi}{6}$ et de base $EG = 8$, à laquelle appartient le point A tel que $EA = 3$ et $AG = 5$, ce qui donne approximativement une section dorée. On y place également le milieu B de EG. Les côtés EG, EV et GV sont naturellement les droites D_1, D_2 et D_4. Par le point A on fait passer la droite D_3, perpendiculaire à D_4, qui forme avec EG un angle de mesure $\frac{\pi}{3}\cdot$ Tout cela détermine les éléments de la figure indépendants de C.

Les points (A, G, V) appartiennent à un même cercle Γ qu'il est immédiat de tracer [9]. La perpendiculaire en S à EV issue de B coupe D_3 en R et D_4 en T, et Γ en deux points dont l'un est C, situé dans le demi-plan d'arête EG qui ne contient pas V. Cette droite CB fait un angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ avec D_1.

Restent à construire les points (F, D, H) où C se projette obliquement sur D_2, D_3 et D_4. Le premier est immédiat : CF est en effet parallèle à D_1, puisque $e = 2z$. Les autres sont un peu plus lourds à obtenir, car ici interviennent $\alpha = \widehat{CDR}$ et $\beta = \widehat{THC}$, mais il suffit de remarquer que $\widehat{FCD}$ a pour mesure

7. Approximativement de 35 degrés sexagésimaux.
8. Approximativement de 49 degrés sexagésimaux.
9. Nous savons que ce Cercle passe aussi par le point $U = D_3 \cap D_4$: voir page 89.

$\dfrac{\pi}{3} - \alpha$, approximativement 25 degrés sexagésimaux, et que $\widehat{HCF}$ a pour mesure $\dfrac{7\pi}{6} - \beta$, approximativement 161 degrés sexagésimaux[10].

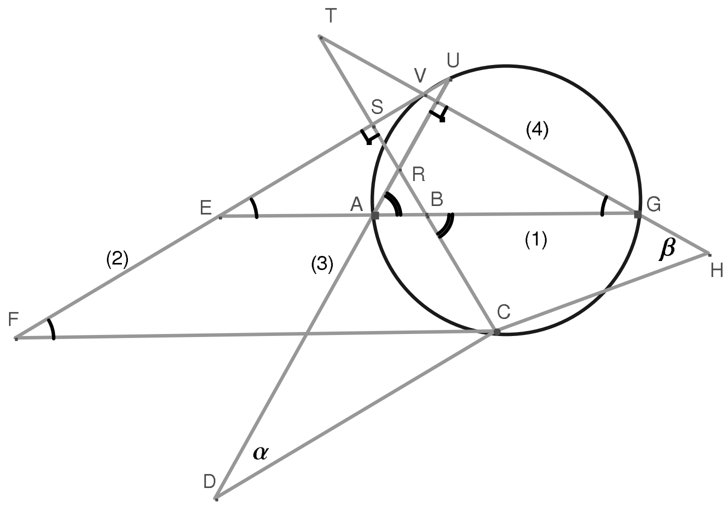


FIGURE 6.2 – *Construction de la figure du lieu à quatre droites*

Comme on vient de le voir, tout cela relève donc des seuls règle et compas, ce qui est bien le moindre pour un auteur obnubilé par la constructibilité de ses courbes.

Les deux lignes adjointes dans un repère orthonormé

Le repère cartésien associé à ses figures est normé, mais non orthogonal. L'origine est A, et l'axe des abscisses est la droite AB. Posons $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{AB}$, de longueur 1, et introduisons $\overrightarrow{J}$ tel que $(A; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ soit un repère orthonormé direct. Dans ce repère, celui de Descartes, que nous noterons $(A; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, vérifie les égalités

$$\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{I}; \qquad \overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{I} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{J}; \qquad \overrightarrow{I} = \overrightarrow{\imath}; \qquad \overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\imath} - \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\jmath}.$$

10. Les valeurs de $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ proviennent des formules donnant, page 90,

$$\frac{3}{2} = \frac{c}{z} = \frac{\sin\widehat{DRC}}{\sin\widehat{CDR}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}; \qquad \frac{2}{3} = \frac{g}{z} = \frac{\sin\widehat{CTH}}{\sin\widehat{THC}} = \frac{1}{2\sin\beta}.$$

.

Si l'on pose $\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} = X\,\overrightarrow{I} + Y\,\overrightarrow{J}$, il vient

$$x = X + \frac{Y}{\sqrt{3}}; \qquad y = -\,\frac{2Y}{\sqrt{3}}; \qquad X = x + \frac{y}{2}; \qquad Y = -\,y\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

On peut alors en déduire de nombreuses relations, dont les suivantes

$$AC^2 = x^2 + xy + y^2 = X^2 + Y^2,$$

écrire les équations pappiennes du Cercle et de l'Hyperbole comme suit

$$D_1D_2 = y\,(2y + x + 3) = -\,\frac{2Y}{\sqrt{3}}\,(X - Y\sqrt{3} + 3)$$

$$= \pm\Big(X - \frac{Y}{\sqrt{3}}\Big)\,(-X - Y\sqrt{3} + 5) = \pm(x + y)\,(y - x + 5) = \pm D_3D_4,$$

$$y^2 + xy + x^2 - 2y - 5x = X^2 + Y^2 - 5X - \frac{Y}{\sqrt{3}} = 0,$$

$$3y^2 + xy - x^2 + 8y + 5x = -\,X^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\,XY + 3Y^2 + 5X - \frac{11}{\sqrt{3}}\,Y = 0,$$

$$6\,Y\sqrt{3} = 4X + 11 \pm \sqrt{52X^2 - 92X + 121}.$$

On peut en déduire, par exemple, les coordonnées euclidiennes du centre du Cercle, $\frac{5}{2}$ et $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, soit approximativement $2,50$ et $0,29$, puis son rayon $r = \sqrt{\frac{19}{3}}$, soit environ $2,52$.

Ces égalités montrent que pour Descartes, compte tenu des droites D_i et des angles de projections qu'il'avait choisis, son repère, normé mais non orthogonal, était plus commode qu'un repère orthonormé aujourd'hui devenu classique. Cela dit, dans la totalité des figures de *La Géométrie* qui suivent, le repère sera euclidien, donc nettement plus facile à reconnaître pour un œil moderne.

Le calcul cartésien

Reprenons le texte cartésien (pages 325 des *Essais*, 398 de AT VI) dont l'étude a déjà été esquissée dans notre page 91. Partant des valeurs des quatre longueurs CB, CF, CD et CH

$$CB = y;\quad CF = e\,\frac{zy + dk + dx}{z^2};\quad CD = c\,\frac{yz + bx}{z^2};\quad CH = g\,\frac{zy + f\ell - fx}{z^2},$$

où $x = AB$ et $y = BC$ sont les variables fondamentales, et $(b, c, d, e, f, g, k, \ell)$ les paramètres, on les lie par l'égalité

$$CB \cdot CF = CD \cdot CH$$

ce qui donne

$$z^2(ez - cg)\,y^2 = cz\,(fg\ell - dkz)\,y - z\,(dez + cfg - bcg)\,xy + bcfg\,(\ell - x)\,x$$

soit encore, si le coefficient de y^2 n'est pas nul,

$$y^2 = uy + vxy + wx + kx^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad y^2 - (u + vx)\,y - kx^2 - wx$$

ce qui représente une équation du second degré en y. Signalons dès maintenant que, si Descartes distingue à juste titre les cas $ez - cg > 0$ et $ez - cg < 0$, il oublie celui où $ez - cg = 0$. Il s'en repentira d'ailleurs quelque peu dans sa lettre à Mersenne du 31 mars 1638, où il écrit [11]

« *Il y a toutefois un cas, des plus aysez de tous, que j'ay omis pour sa trop grande facilité ; mais ne les en avertissez pas, s'il vous plaist, car vraysemblablement ils n'y prendront pas garde, et il me sera aysé de l'y ajouter en 3 mots dans une seconde impression* ».

Ce cas omis est en effet sans grande importance, puisqu'il se ramène simplement, dans le cas général, à la considération d'une hyperbole bien ordinaire d'équation de la forme

$$y = Ax + B + \frac{C}{x - x_0}\,\cdot$$

11. CXIX *in* AT II page 84. Tannery pensait, au contraire, qu'il s'agissait du cas d'une conique réduite à un point, effectivement négligé.

Descartes dit aussi, avec gentillesse, dans cette lettre que « *Pour l'analyse, i'en ay omise une partie, affin de retenir les esprits malins en leur devoir ; car si ie leur eusse donnee, ils se fussent vantez de l'avoir sceue long temps auparavant, au lieu que maintenant ils n'en peuvent rien dire qu'ils ne descouvrent leur ignorance.* »

Signalons aussi que, dans sa lettre CLVI du 20 février 1639 à De Beaune (AT II page 511) il regrette également de n'avoir pas évoqué le cas $d = 0$, ou le fait de n'avoir pas signalé que l'absence de terme constant dans son équation (c'est-à-dire le fait que la courbe passe par l'origine) aurait du être indiqué comme étant très général mais parfois inadéquat comme dans le cas de $x^2 + y^2 + 1 = 0$ où l'ensemble des points ainsi défini est vide [12].

L'équation obtenue $D_1D_2 = CB \cdot CF = CD \cdot CH = D_3D_4$, ou encore

$$[y]\left[\frac{ezy + dek + dex}{z^2}\right] = \left[\frac{czy + bcx}{z^2}\right]\left[\frac{gzy + fg\ell - fgx}{z^2}\right],$$

est donc de la forme

$$\left(y - m + \frac{nx}{z}\right)^2 = m^2 + o\,x + \frac{p}{m}\,x^2$$

où il a introduit les abréviations suivantes [13]

$$2m = \frac{cfg\ell z - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}; \quad \frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2};$$

$$o = -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}; \quad \frac{p}{m} = \frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}.$$

Signalons une difficulté du texte sous sa forme originale (pages 326, 328 et 333 des *Essais*, 399, 400 et 405 de AT VI), où l'on peut lire $-\dfrac{p}{m}\,xx$ au lieu de $\dfrac{p}{m}\,xx$ qui découle de la valeur donnée *a priori* pour p. Paul Tannery a choisi de changer p en son opposé dés le départ ; nous préférons l'option inverse, et donc la rectification des trois occurrences de $\dfrac{p}{m}$, en restant fidèle à l'idée moderne de Descartes indiquant (pages 326 des *Essais* et 399 de AT VI) que l'on peut (ou doit) « *change*[r] *les signes + et −, selon qu'il seroit requis a cet effect* », qui signifie simplement que les paramètres introduits n'ont nul besoin d'être positifs. C'est ce nous ferons donc ici lors de la description des calculs cartésiens.

12. L'exemple est de notre plume, et ne figure pas dans la lettre dont le texte est étonnamment elliptique.

13. Où o est un paramètre littéral, et non le nombre 0.

L'équation résolue en y

Descartes écrit donc[14]

$$y = m - \frac{n}{z}\,x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}\,x^2}.$$

Il va ensuite faire de la géométrie à la mode apollonienne, en cherchant à se retrouver devant la situation connue d'un diamètre et de sa direction conjuguée d'une conique[15].

Il va de soi que nous écririons cela aujourd'hui avec un signe $\pm$ devant la racine carrée, mais en ce siècle ce symbole était inconnu et le seul signe $+$ pouvait en tenir implicitement lieu[16]. En tout cas Descartes était bien sensible au fait que toute équation du second degré comme celle-là avait deux racines si $m^2 + ox + \frac{p}{m}\,x^2 > 0$. Il le prouve d'ailleurs par exemple en traçant un cercle entier dans le cas particulier cyclique, et non un demi-cercle (voir sa figure fondamentale pour Pappus II, déjà longuement étudiée).

Pour ce faire, il va introduire cinq nouveaux points, K, I, L, N et M, et un nouveau paramètre a. Au départ, il pose $BK = m$, si $m > 0$, avec K sur BC, puis $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{BA}$, avec des variantes évidentes (qu'il souligne lui-même) si $m < 0$ ou $m = 0$. Il construit L, toujours sur BC, tel que $\frac{IK}{KL} = \frac{z}{n}$; il en déduit $a = \frac{z}{x}\,IL$ lorsque K est entre L et C, ce qui est vérifié sur sa figure, avec - là aussi - des variantes revenant à des changements de signe si ce n'est pas le cas[17]. On peut noter la relation

$$\frac{a}{z} = \frac{IL}{IK} = \frac{\sin\widehat{LKI}}{\sin\widehat{ILK}}\,.$$

La lecture du texte de Descartes est assez fastidieuse, mais facile. Pour le confort du lecteur, nous allons utiliser ici la géométrie analytique, ce que

14. Modulo notre choix de rester fidèle à la définition de p.

15. *A priori* non nécessairement principal, ce cas exceptionnel étant toutefois obtenu si l'angle $\widehat{ILC}$ introduit plus bas est droit.

16. On constate d'ailleurs aisément, sur cette expression, que la courbe recherchée passe bien par A de coordonnées $(x, y) = (0, 0)$.

17. Les introductions de N et M seront effectuées un peu plus loin.

l'auteur a certainement fait, au moins dans sa tête, mais n'a pas osé coucher sur le papier telle quelle, ainsi que le grand confort des mesures algébriques à la Chasles.

L'introduction de (K, I, L) se traduit aussitôt, dans le repère $(A; X, Y)$ d'origine A, d'axe des abscisses AB et où les ordonnées sont calculées parallèlement à BC ; les coordonnées de ces trois points sont respectivement [18] $K(x, m)$, $I(0, m)$ et $L\Big(x, m - \dfrac{n}{z}\,x\Big)$. Il en résulte que I est fixe, et que la droite IL, d'équation $Y = m - \dfrac{n}{z}\,X$, est fixe même si L lui-même est variable. En résulte l'égalité de Descartes

$$\overline{LC} = \pm\sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}\,x^2},$$

distance orientée de C à la droite fixe IL selon la direction (fixe) de AI.

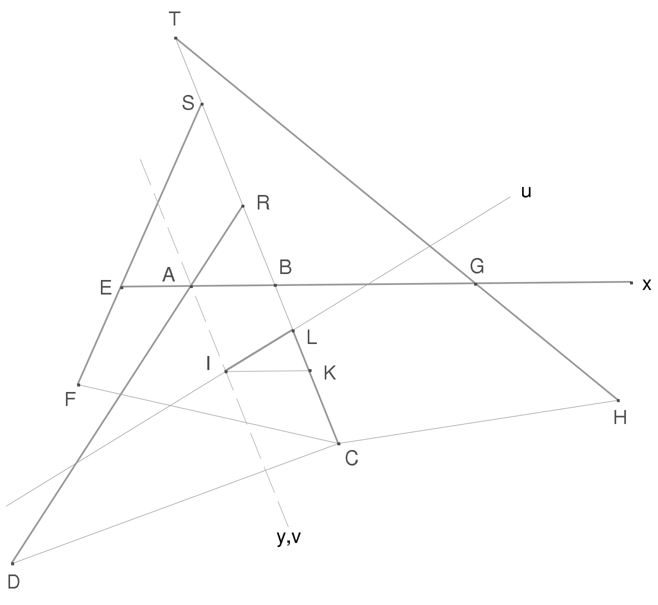


FIGURE 6.3 – *Le changement d'axes pour le lieu à quatre droites*

18. La seule chose non évidente est l'ordonnée de L, qui provient des égalités $\overline{IK} = x$, $\overline{BK} = m$, $\overline{KL} = -\dfrac{n}{z}\,x$ et $\overline{BL} = \overline{BK} + \overline{KL}$.

Ce qui vient d'être réalisé, c'est un véritable *changement d'axes cartésiens*, le premier de l'histoire [19]. Dans ces nouveaux axes associés au repère $(I; u, v)$, le point C a pour coordonnées

$$u = \overline{IL} = \frac{a}{z}\,x, \quad v = \overline{LC} = \pm\sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}\,x^2} = \pm\sqrt{m^2 + \frac{oz}{a}\,u + \frac{pz^2}{ma^2}\,u^2}.$$

Le reste de cette partie du Livre II est consacré à l'étude de cette courbe algébrique d'équation $v = \pm\sqrt{au^2 + bu + c} = \pm\,\varphi(u)$.

Coniques à l'ancienne / coniques d'aujourd'hui

Pour mieux suivre le texte cartésien, nous allons regarder son problème, pour un instant, avec un œil d'aujourd'hui, en utilisant librement ce qu'est devenu sa géométrie analytique, mais aussi en essayant de relier son travail à celui d'Apollonius, auquel il se réfère explicitement.

Descartes va démontrer que, par exemple dans le cas où le lieu à quatre droites est une ellipse dont N est un sommet [20] situé sur IL et M le centre, le segment LC a pour direction la conjuguée de celle de NL, ce que les Anciens traduisaient par l'expression : « LC *est appliquée par ordre à ce diamètre* » (*cf.* pages 328 des *Essais* et 401 de AT VI).

Dans la théorie des coniques, très certainement depuis Euclide sinon auparavant, la notion de *directions conjuguées* est fondamentale. Pour ces courbes, les cordes CC' ayant une direction donnée D ont en effet une propriété remarquable : leurs milieux sont alignés sur une droite Δ appelée *diamètre* conjugué de la direction D.

Inversement, le diamètre conjugué de la direction D' de Δ a lui-même D comme direction. Si Δ coupe la courbe en un point N, la tangente en N, cas limite de corde CC', a D comme direction.

19. Voir pourtant un commentaire, sans doute trop optimiste, de Paul Ver Eecke à la page 96 de sa traduction *Les Coniques d'Apollonius de Perge*.
20. Pas nécessairement principal, c'est-à-dire tout simplement un point de la courbe.

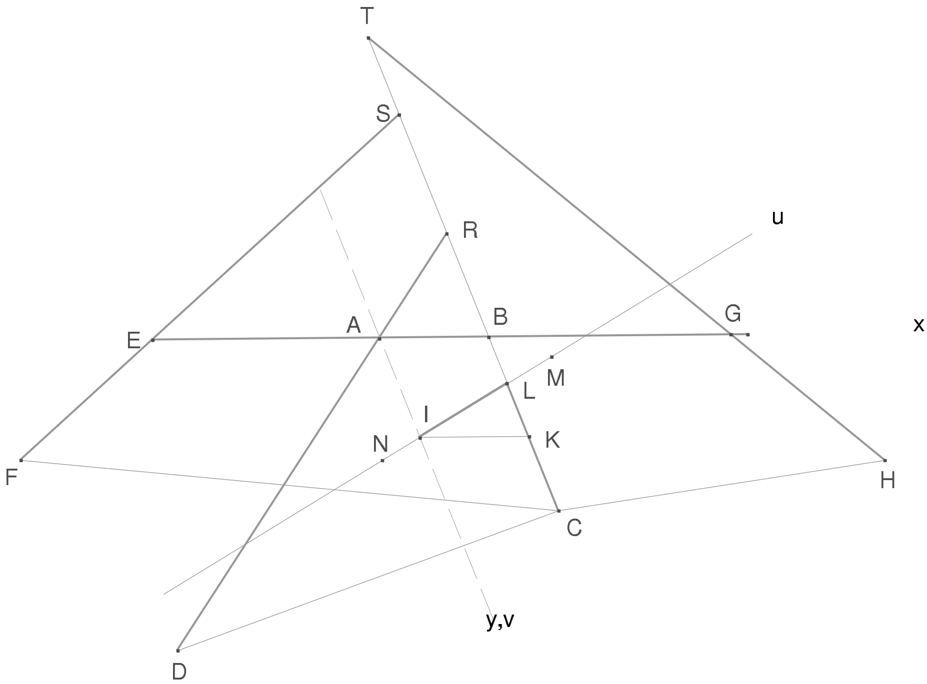


FIGURE 6.4 – *Centre M et sommet N du lieu à quatre droites*

La figure ci-dessous montre ce que sont un diamètre et sa direction conjuguée dans le cas d'une ellipse ; pour une hyperbole dont le diamètre considéré coupe lui aussi la conique en deux points N et N', ou pour une parabole lorsqu'il n'y a qu'un point N, le centre M étant alors à l'infini, les figures seraient très analogues et nous les omettrons.

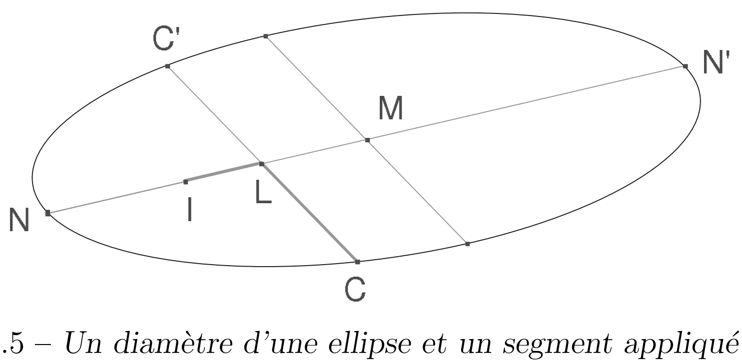


FIGURE 6.5 – *Un diamètre d'une ellipse et un segment appliqué par ordre*

Par contre le cas d'une hyperbole disjointe du diamètre étudié [21] nécessite une illustration assez différente, où les points N et N' sont remplacés par des points [22] O et O'

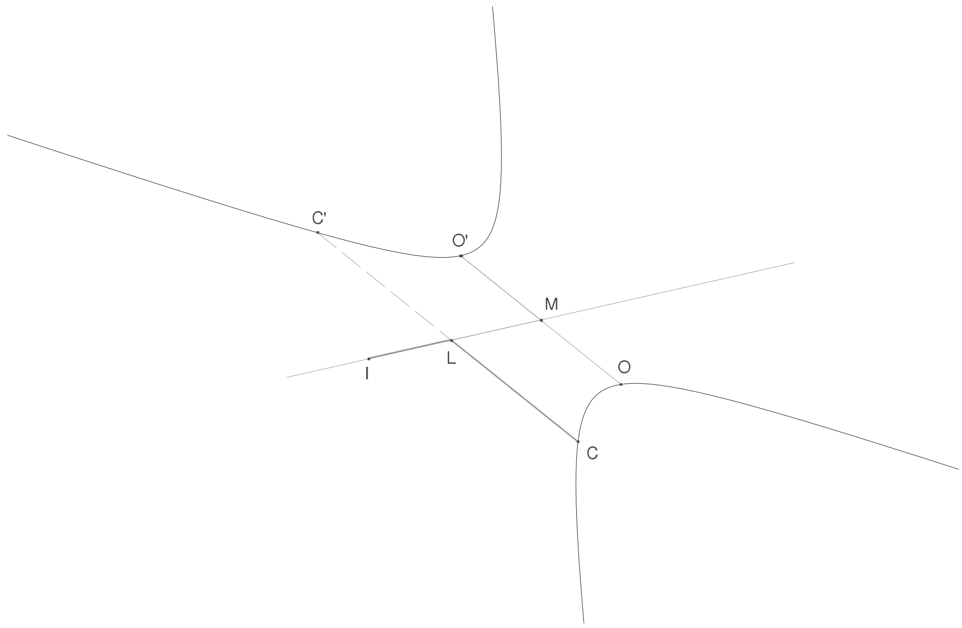


FIGURE 6.6 – *Un diamètre sans sommets d'une hyperbole*

En lisant Apollonius

Les usages d'« équations » de coniques chez Apollonius sont innombrables. Les théorèmes fondamentaux sont les suivants, d'après l'édition Ver Eecke

- Pour la parabole : Propositions XI, XX, LII et LIII (Livre I, pages 21-24, 42-43, 97-99 et 99-100)
- Pour l'hyperbole : Propositions XII, XXI, LIV et LV (Livre I, pages 24-28, 43-44, 101-103 et 104-106)
- Pour l'ellipse : Propositions XIII, XXI, LVI et LVII (Livre I, pages 28-31, 43-44, 106-109 et 109-100).

21. C'est-à-dire où le diamètre est entièrement extérieur à la courbe, qui ne la coupe pas en deux points tels que les N et N' des cas précédemment cités.
22. Les notations N et O sont de Descartes, mais N' et O' sont modernes.

Nous trouvons à chaque fois quatre propositions (dont une commune aux deux coniques à centre), figurant toutes dans le Livre I

- La première établit l'« équation » pour les diamètres principaux, c'est-à-dire orthogonaux à leur direction conjuguée, à savoir respectivement

  $$y^2 = rx, \qquad y^2 = \frac{r}{t}\, x\,(t+x), \qquad y^2 = \frac{r}{t}\, x\,(t-x)$$

  pour la parabole, l'hyperbole et l'ellipse [23].

- La seconde généralise la première à des diamètres quelconques (où l'angle n'est plus nécessairement droit).

- La troisième établit une réciproque : une « équation » étant donnée, construire explicitement une conique lui correspondant avec un diamètre principal [24]. C'est ce que Descartes appelle les trois *problèmes d'Apollonius* du Livre I.

- La quatrième généralise la troisième à des diamètres quelconques.

L'emploi des nombres x et y n'était évidemment pas possible chez les Grecs : on écrivait cela par exemple, pour une ellipse ou une hyperbole, sous la forme $\overline{LN}\cdot\overline{LN'} = k\,LC^2$, ou plus exactement on énonçait que le rapport $\dfrac{LC^2}{\overline{LN}\cdot\overline{LN'}}$ était constant lorsque le point L se déplaçait [25].

23. Les nombres r et t s'appellent respectivement le *latus rectum*, double de notre paramètre moderne p, et le *latus transversum*, soient le côté droit et le côté transverse. Aujourd'hui, nous utilisons une équation unique

$$y^2 = 2p\,x + q\,x^2 \qquad \text{(et même} \quad y^2 = 2p\,x + (\mathbf{e}^2-1)\,x^2 \quad \text{si le repère est orthonormé)}$$

où $\mathbf{e}$ est l'excentricité de la conique.

24. On se donne par exemple un sommet, le centre et le côté droit pour une conique centrée, ou le sommet, l'axe et le côté droit pour une parabole.

25. Naturellement l'utilisation de mesures algébriques est moderne : dans l'Antiquité, les mathématiciens utilisaient explicitement deux cas distincts suivant la nature de la courbe, ce qui créait de nombreuses redondances.

Pour sa part, Descartes écrit, comme nous l'avons vu, son équation générale du lieu à quatre droites sous la forme

$$LC \propto \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}\,xx}$$

ce que nous écririons aujourd'hui sous la forme $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$ que nous allons utiliser pour une étude conforme à nos usages actuels.

Les courbes d'équations $y^2 = ax^2 + bx + c$

Indiquons, sans preuves (immédiates à obtenir si nécessaire) les principales caractéristiques des courbes définies, par rapport à un repère cartésien [26], par l'équation $y^2 = T(x) = ax^2 + bx + c$. Si le trinôme T a des racines, nous les noterons x_1 et x_2.

a) Si $a = b = 0$, $y^2 = T$ définit un couple de droites parallèles si $c > 0$, une droite unique si $c = 0$ et l'ensemble vide si $c < 0$.

b) Si $a = 0$ et si $b \neq 0$, $y^2 = T$ définit une parabole de côté droit b et de sommet N de coordonnées $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$.

   Nous supposerons désormais $a \neq 0$.

c) Si T possède une racine double, $y^2 = T$ définit une conique décomposée en deux droites sécantes si $a > 0$ et un singleton sinon.

d) Si T possède deux racines simples, $y^2 = T$ définit une ellipse si $a < 0$ et une hyperbole sinon. Le point N de coordonnées $(x_1, 0)$ en est un sommet ; le point M de coordonnées $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ est leur centre ; leurs côtés droits valent $r = \sqrt{b^2 - 4ac}$; leurs côtés transverses valent $t = |x_2 - x_1| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$.

26. Non nécessairement orthonormé.

e) Si T ne possède pas de racine, $y^2 = T$ définit si $a > 0$ une hyperbole ne rencontrant pas l'axe des x, de côté droit $r = \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{a}}$, de côté transverse $t = \sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{a}}$ et possédant comme sommets les points O et O' de coordonnées $\Big(-\dfrac{b}{2a}, \pm\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}}\Big)$, et l'ensemble vide si $a < 0$.

Retour au texte cartésien

Traduisons cela dans les notations de Descartes où [27]

$$a = \frac{p\,z^2}{ma^2}, \qquad b = \frac{oz}{a}, \qquad c = m^2.$$

a) En pages 328 des *Essais* (400-1 de AT VI), il commence par étudier quatre cas de dégénérescence. D'abord celui où $m = o = p = 0$, c'est-à-dire $a = b = c = 0$, la droite unique de notre a), ensuite celui où le trinôme a une racine double [28] c'est-à-dire $o^2 = 4pm$ ($b^2 = 4ac$, d'où a et c de même signe), cas où *ce point* C *se trouverait en une autre ligne droite*. Il s'agit plutôt bien entendu du couple de droites sécantes de notre c), cette erreur provenant de l'oubli du signe $\pm$ devant la racine carrée. Il ne peut pas être réduit à un singleton car le lieu contient au moins deux points distincts, par exemple A et G qui sont différents dans la pratique.

Il ajoute que cela se produirait également si $mm = ox = 0$ ($b = c = 0$, cas particulier de $b^2 = 4ac$) ou si $ox = \dfrac{p}{m} = 0$ ($b = a = 0$, ce qui est notre a) lorsqu'il y a décomposition en deux droites parallèles distinctes ; le cas de droites non réelles est exclu, puisque le lieu contient au moins un point réel, par exemple A).

27. On pourrait s'attendre à ce que nous posions $a = \dfrac{p}{m}$, $b = o$ et $c = m^2$, mais ici x n'est pas égal à l'abscisse u dans les nouveaux axes du point courant C, qui vaut $\overline{IL} = \dfrac{a}{z}\,x$.

28. « *s'ils estoient tels que la racine s'en pust tirer* ». Il suppose mm et $\dfrac{p}{m}\,xx$ *estant marqués d'un mesme signe* $+$ *ou* $-$: comme $mm > 0$, cela signifie que l'on doit prendre m et p tous deux positifs par exemple. Adam et Tannery ont cru voir dans la présence du signe $-$ une « inadvertance » : ce n'est pas notre opinion.

b) Pour notre b) où l'on étudie une parabole, c'est-à-dire quand $p = 0$, on trouve $\overline{IN} = -\dfrac{c}{b} = -\dfrac{am^2}{oz}$, à comparer [29] avec $IN = \dfrac{amm}{oz}$ comme il est écrit en la page 329 des *Essais* ou 401 de AT VI ; de même le côté droit vaut $b = \dfrac{oz}{a}\cdot$

Une phrase de cette page peut paraître étrange : « *Mais il ne peut jamais y avoir* −mm, *en la façon que les termes ont icy esté posés* ». Cela signifie tout simplement que la courbe passant par le point A, la longueur LC doit prendre l'une des deux valeurs $\pm m$ pour $x = 0$ (c'est-à-dire $K = I$), ce qui implique que le terme constant de LC^2 est nécessairement m^2 et ne peut être changé de signe, à la différence des autres paramètres, et en particulier de p ou de $\dfrac{p}{m}\cdot$

c) Désormais le lieu étudié est une conique à centre usuelle, à savoir ellipse éventuellement circulaire [30], hyperbole que nous appellerons ici *du premier type* si IL coupe la courbe, ou hyperbole *du second type* sinon.

Dans notre d), nous avions caractérisé l'ellipse par $a < 0$ et l'hyperbole du premier type par $a > 0$, laissant l'hyperbole du second type pour le e). Comme Descartes, intéressons nous d'abord aux deux premiers cas, ellipse si $mp < 0$, hyperbole du premier type si $mp > 0$. Pour Descartes, c'est surtout l'ellipse qui l'intéresse comme nous le verrons au moment de la réciproque des pages 332-3 des *Essais* et 404-5 de AT VI, et à celui où il traite d'un exemple numérique (voir page 238). C'est en pensant à elle qu'il avait écrit plus haut

$$LC \propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$$

avec, en ce lieu, p et m supposés strictement positifs pour ne pas effrayer son lecteur avec des paramètres pouvant être négatifs.

Il se pose ici une question redoutable, peu évoquée à notre connaissance. Lisons en effet d'abord page 328 des *Essais* (401 de AT VI)

29. Au signe près, bien sûr !

30. Aujourd'hui nous considérons le cercle comme un cas particulier d'une famille plus générale, les courbes du second ordre.

> « *A sçavoir si le terme* $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{m}}\mathrm{xx}$ [...] *s'il est marqué du signe* +, *c'est une Hyperbole ; & enfin s'il est marqué du signe* − *c'est une Ellipse* »

ce qui est correct puisque $\frac{p}{m}xx$ est marqué du signe + si, et seulement si, $a = \frac{p}{m}$ est positif. Mais, deux pages plus loin, nous tombons sur quelques lignes à l'allure énigmatique

> « *le costé droit de la figure doit estre* $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$ *lorsqu'on a* + mm, *& que la ligne cherchée est un cercle, ou une Ellipse ; ou bien lorsqu'on a* − mm, *& que c'est une Hyperbole* »

ce qui *a priori* n'a pas de sens comme on l'a vu plus haut [31].

La clef de cette énigme est tout à fait intéressante parce qu'elle nous révèle des habitudes (plus ou moins fâcheuses) de ces temps d'algèbre balbutiante. Rappelons nous d'abord que, dans un polynôme donné tel que $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par exemple, on écrit souvent [32] (A, B, C, D) sous la forme (t, u^2, v^3, w^4) pour respecter la vieille règle d'homogénéité sans que l'on ait nécessairement $B \geqslant 0$ et $D \geqslant 0$.

Il en va de même ici. Au départ, Descartes sait très bien qu'il travaille sur son problème de Pappus, et notamment que $c = m^2$ est bien positif par nécessité [33]. Mais au cours du calcul, il oublie un peu cela et veut traiter en fait du cas le plus général en algébriste abstrait dégagé des contraintes du moment. C'est ainsi que pendant quelques instants il s'intéresse à une expression de la forme $y^2 = ax^2 + bx + c$ où les signes de (a, b, c) sont *a priori* arbitraires. Nous avons déjà dit que, dans les conditions de notre d), le côté droit valait $r = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Dans le cas d'une Ellipse a doit être négatif ; si de plus on a $+mm$ (si c est positif), alors $r = \sqrt{b^2 + 4|ac|}$ ce qui coïncide bien avec l'expression

$$r = \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} = \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 (o^2 + 4mp)}$$

31. Ces quelques lignes et les suivantes du même tonneau ne contribuent pas qu'un peu à faire paraître obscures ces séries de calculs indigestes, même s'ils sont bien entendu, pour l'essentiel, tout à fait sensés et corrects, comme on va le voir.
32. Voir par exemple les page 301, 348, 350 des *Essais* et 373, 420, 422 de AT VI.
33. Cela résulte par exemple du fait que le lieu passe par A.

si l'on impose ici à tous les paramètres (a, m, o, p, z) d'être remplacés en cas de besoin par leurs valeurs absolues.

Finalement ce que fait Descartes revient à ceci : le *latus rectum* des courbes définies par $y^2 = ax^2+bx+c$ ou $y^2 = -ax^2+bx-c$ vaut $\sqrt{b^2-4ac}$, alors que c'est $\sqrt{b^2+4ac}$ pour $y^2 = ax^2+bx-c$ ou $y^2 = -ax^2+bx+c$. En fait, ces quatre courbes, la seconde et la troisième ne peuvent pas être des lieux à quatre droites comme traités par Descartes, mais l'auteur s'est laissé emporter par son élan sans y plus réfléchir.

L'explication de ces lignes opaques est donc bien subtile et demande plus qu'une ou deux lectures superficielles ; elle prouve que, à certains moments, Descartes pense que toutes les lettres qu'il emploie sont de signe arbitraire, mais qu'il est obligé de les expliciter sous forme de nombres positifs précédés s'il le faut de signes $-$ pour rester cohérent avec de très anciennes obligations, dont il a lui-même - ces hésitations le prouvent - parfois quelque mal à se dépêtrer.

Bien entendu, dans le cas opposé (par exemple Ellipse où « *on a* $-$mm »), le côté droit vaut

$$r = \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} = \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 (o^2 - 4mp)}.$$

Toujours en séparant ces deux cas, on montre que $t = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$ conduit aux égalités

$$t = \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} \pm \frac{4aam^3}{pzz}} = \sqrt{\left(\frac{ma}{pz}\right)^2 (o^2 \pm 4mp)}$$

où le signe $+$ correspond par exemple aux Ellipses « avec $+mm$ » et aux Hyperboles « avec $-mm$ ». Tout cela est donc concordant, l'ancien et le moderne se retrouvant d'accord sur le fond même si la forme varie.

d) Il reste à Descartes à traiter le cas [34] des hyperboles que nous avons qualifiées de second type : celle qui ne rencontrent pas le diamètre IL. Ici

34. Notre e).

$a > 0$ puisqu'il s'agit d'hyperboles, et T n'a pas de racines, ce qui implique $b^2 - 4ac < 0$, et *a fortiori* $ac > 0$ d'où $c > 0$ comme a. Par suite il n'existe qu'un seul type de telles courbes [35], pour lesquelles

$$r = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{4ac - b^2}{a}} = \sqrt{\frac{a^4 m^3}{z^4 p^3}\,(4mp - o^2)},$$

$$t = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{a}} = \sqrt{\frac{m}{p}\,(4mp - o^2)}.$$

Le sommet O qui remplace le N inexistant est donné par les égalités

$$\overline{IM} = -\frac{aom}{2pz}, \qquad MO = \sqrt{\frac{m}{4p}\,(4mp - o^2)}$$

ce qui coïncide bien avec les formules données par Descartes, pages 331-2 des *Essais* et 403-4 de AT VI, dont les affirmations coïncident donc avec les résultats qu'avait fournis les calculs ci-dessus.

Mais il reste bien entendu à justifier ces proclamations. Descartes ne le fera que pour un cas, qui lui permet le plus important de tous [36], celui d'une ellipse. Il occupe les pages 332-3 des *Essais* et 404-405 de AT VI. Pas plus que dans le passage où il étudie le cas particulier numérique déjà traité ci-dessus page 238, qui est couvert dans les pages 333-4 et 405-6, ses calculs ne présentent de difficulté, et il ne semble pas nécessaire de les examiner au scalpel : il s'agit de simples vérifications mécaniques.

Il nous reste à reproduire ici les deux figures illustrant tout cela : la lecture de la première a déjà été longuement préparée au début de ce chapitre, et il n'y a rien à en dire de plus sauf que les points N et I ont l'air d'être pratiquement confondus [37]. La seconde, avec une branche d'hyperbole du deuxième type, est bien plus critiquable : cette fois-ci le point G est très éloigné de la courbe, et elle semble passer par H, ce qui est inexcusable [38].

---

35. Descartes n'a donc pas besoin, dans cette situation, de chercher à généraliser : une phrase telle que *si on a ici* $-mm$ ne peut donc apparaître dans son discours.

36. C'est d'ailleurs celui de son exemple numérique qui suit aussitôt.

37. De plus, le lieu cherché, un cercle, ne semble pas contenir le point G ce qui est bien entendu inexact.

38. On y voit aussi un point P, projection oblique de C sur l'axe MO dans la direction de CL. Rappelons que l'édition Adam-Tannery a malencontreusement interverti les deux figures, ce qui ne semble pas avoir été beaucoup remarqué.

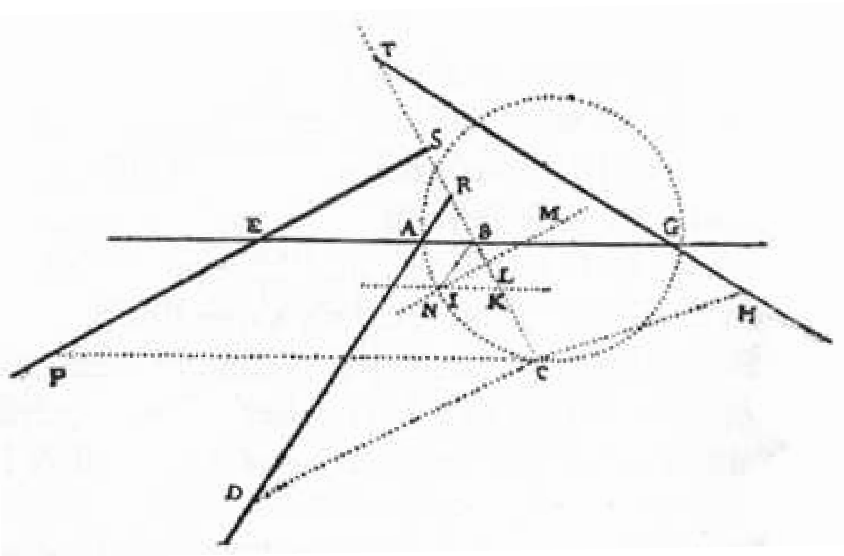


FIGURE 6.7 – *Le cas où le lieu est une ellipse*

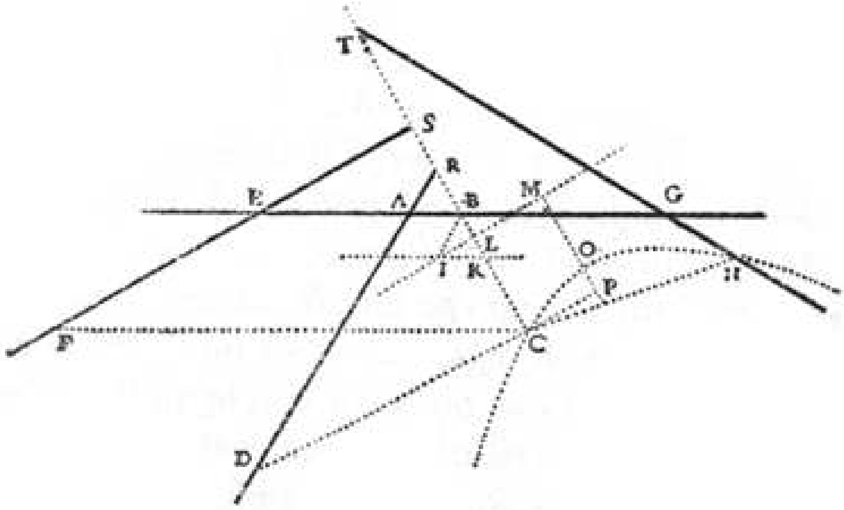


FIGURE 6.8 – *Le cas d'une hyperbole ne rencontrant pas le diamètre IL*

Descartes a donc bien tenu sa promesse : il a réglé le Problème de Pappus II, prouvant ainsi que les lieux à quatre lignes n'étaient autres que les coniques : c'est un tour de force presque sans scories, et il est normal que sa perception aiguë de ses capacités personnelles en soit sortie confortée.

Annexe I : Caractérisation des cercles

En page 328 des *Essais* (401 de AT VI), Descartes affirme

« *Excepté seulement si la quantité* aam *est égale à* ppz *& que l'angle* ILC *soit droit : auquel cas on à un cercle au lieu d'une Ellipse* ».

Cela résulte en effet de la caractérisation des diamètres et de leur direction conjuguée : Δ et D le sont si Δ est l'axe d'une symétrie oblique de direction D conservant globalement la courbe. Par suite, dans un cercle, D est orthogonale à la direction de Δ, et IL est perpendiculaire à LC ; de plus $t = r$, soit $a = -1$. La réciproque est évidente si l'on sait montrer que les seuls parallélogrammes inscrits dans un cercle sont des rectangles [39].

Annexe II : Pappus II aujourd'hui

Voici une démonstration adaptée à nos habitudes (issues de l'esprit subtil de Descartes !) et fidèle à sa technique de dénombrement sans failles. Si le repère de départ est orthonormé, tous les autres le seront (car obtenus par rotation ou translation).

Il s'agit de prouver que l'ensemble E des points d'un plan définis par

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bx + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

est en général une conique.

a) Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, E est une droite si $(d, e) \neq (0, 0)$ et, sinon, l'ensemble vide ou le plan entier selon que $c \neq 0$ ou non.

b) Soit désormais $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrons qu'on peut toujours se ramener au cas où $b = 0$. Posons en effet

$$X = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad Y = -\,x\sin\theta + y\cos\theta, \quad \text{soit}$$

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad y = X\sin\theta + Y\cos\theta, \quad \text{d'où}$$

39. Considérer les médiatrices de deux côtés parallèles.

$$\varphi(x, y) = AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F$$

avec $2B = (c - a)\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta$. Si $a = c$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ convient ; sinon il suffit que θ vérifie l'égalité $\tan 2\theta = \dfrac{2b}{a - c}\cdot$

c) Cela fait, l'équation devient $ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Par hypothèse sur b, $(a, c) \neq (0, 0)$, et par exemple $a \neq 0$, ce que nous supposerons désormais. Si l'on a aussi $c \neq 0$, posant $X = x + \dfrac{d}{a}$ et $Y = y + \dfrac{e}{c}$, l'expression devient
$$\frac{X^2}{c} + \frac{Y^2}{a} = -\frac{F}{ac}$$
ce qui définit une ellipse si a, c et $-F$ ont même signe, une hyperbole si $ac < 0$ et $F \neq 0$, deux droites sécantes si $ac < 0 = F$, un singleton si $ac > 0 = F$ et l'ensemble vide si a, c et F ont même signe (au sens strict).

d) Supposons enfin $c = 0$; posant $X = x + \dfrac{d}{a}$ il vient $aX^2 + 2ey + F = 0$, ce qui définit une parabole si $e \neq 0$, deux parallèles si $e = 0$ et $aF < 0$, une droite (double) si $e = F = 0$ et l'ensemble vide si $e = 0$ et $aF > 0$.

On a ainsi retrouvé tous les cas du Problème de Pappus II. Cet algorithme est très facile à programmer. Notons enfin que la réciproque est évidente : depuis Apollonius, on sait que toute conique admet une équation très simple de la forme $\varphi(x, y) = 0$.

Chapitre 7

Les normales chez Descartes

« *Et enfin, pour ce qui est de toutes les autres propriétés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dependent que de la grandeur des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. Mais lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les couppent a angles droits, aux poins ou elles sont rencontrées par celles avec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que ie prends icy pour le mesme, qui couppent leurs contingentes; la grandeur de ces angles n'est pas plus malaysée a trouver, que s'ils estaient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoy je croyray avoir mis icy tout ce qui est requis pour les elemens des lignes coures, lorsque j'auray généralement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent a angles droits sur tels de leurs poins qu'on voudra choisir.* **Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus utile, & le plus general non seulement que je sçache, mais mesme que i'aye jamais désiré de sçavoir en Geometrie**[1] ».

Ce chapitre traite d'un point essentiel du Livre Second, *la construction de la normale en un point donné d'une courbe algébrique*, par le biais du calcul des coordonnées de son point d'intersection avec l'un des axes : c'est la première méthode jamais imprimée pour construire normale et donc tangente en un point donné d'une courbe donnée.

La méthode cartésienne est entièrement originale, et a encore des applications profondes aujourd'hui en géométrie algébrique, là où toute analogie cinématique est impraticable faute de topologie sur des coordonnées appartenant à un corps plus abstrait que celui des nombres réels.

1. Page 341 des *Essais*, 413 de AT VI.

Cela dit, pour les courbes du plan ou de l'espace usuel, elle a été très vite abandonnée au profit des algorithmes du calcul différentiel et intégral de 1665-1675 (Newton-Leibniz), car elle est trop souvent impraticable. Son étude n'en est pas moins très intéressante, même de nos jours.

Surtout, pour un lecteur moderne, sa place dans *La Géométrie* fait souvent problème, toute cette fin du Livre Second apparaissant comme totalement injustifiée : il s'agirait d'une application parmi d'autres du calcul avec coordonnées, appréciée par Descartes car elle lui avait permis de réaliser un vieux rêve (celui de trouver une courbe permettant le stigmatisme absolu en optique), mais qui aurait pu être rejetée en annexe ou même écartée d'un livre dont le but principal aurait été d'exhiber les fondements de la géométrie analytique dont les développements à venir auraient été confiés à ses « neveux ».

Par ailleurs, les travaux absolument contemporains de Pierre Fermat et - dans une moindre mesure - de Gilles de Roberval, soucieux eux-aussi de trouver des voies personnelles pour tracer des tangentes, montrent que le problème ainsi résolu par Descartes était mûr. Quelques années plus tard, on s'aperçut qu'il relevait essentiellement de l'analyse (au sens actuel), mais certains - dont justement Descartes - purent le traiter assez correctement de manière formellement algébrique, conformément aux possibilités du temps.

Ce qui étonne encore aujourd'hui, c'est que chacun croyait avoir trouvé l'unique technique possible ; c'est ainsi que Fermat, à la sortie de *La Géométrie*, s'étonnait de voir que son confrère n'y ait pas inséré une méthode quasiment identique à la sienne propre, qu'il appelait *De maximis et minimis*. Or les trois chercheurs avaient travaillé dans des directions vraiment différentes et toutes intéressantes [2].

La fin du chapitre permet de mettre en évidence la nouveauté incroyable de Descartes par rapport à ses maîtres grecs, mais même son contemporain et rival Fermat, lui aussi auteur - indépendamment - d'une méthode de construction de la tangente [3] en un point donné d'une courbe, pas nécessairement algébrique d'ailleurs.

2. Ce chapitre aurait pu consacrer quelques pages aux travaux assez peu connus de Roberval ; nous nous contenterons de dire qu'il avait privilégié des analogies cinématiques qui ne seront pas sans rapport avec les techniques newtonniennes. Il les appliquera notamment aux Ovales de Descartes après leur diffusion de 1637.

3. Obtenir la normale ou la tangente sont deux problèmes trivialement équivalents.

L'origine de la méthode cartésienne

Contrairement au scepticisme général sur l'intérêt de l'introduction d'un calcul consacré aux normales dans *La Géométrie*, nous pensons que le sujet s'imposait avec évidence aux yeux de l'auteur dans le cadre de l'écriture de ce qu'il voyait comme un traité sur la résolution des équations algébriques. Pour le montrer, il faut entrer dans sa *Table des matières*.

En utilisant plutôt la numérotation des chapitres de cet ouvrage-ci, plus courte et synthétique que la table originelle, nous nous trouvons en effet devant trois parties essentielles, à savoir

A) Chapitre 2 : résoudre les équations de degrés 1 ou 2

B) Chapitre 10 : résoudre les équations de degrés 3 ou 4

C) Chapitre 11 : résoudre les équations de degrés 5 ou 6 (et plus...)

soient les parties initiale du Livre Premier et finale du Livre Troisième. Dans ce plan, manquent évidemment les descriptions et justifications des outils nécessaires pour attaquer les degrés strictement supérieurs à 2 : c'est le rôle des chapitres 3 à 9.

Descartes n'aurait pas vraiment eu besoin du langage des coordonnées pour pouvoir présenter sa technique de résolution des équations de degrés 3 ou 4, pour lesquels son originalité n'est pas très grande ; il aurait pu placer ces dernières juste après celle de degrés 1 ou 2, donc encore au tout début du Traité[4]. Nous pensons qu'il a préféré la reporter à la place qu'il occupe dans les *Essais* car elle éclaire en effet très fortement celle, autrement plus complexe, qu'il présente pour les équations de degrés supérieurs et lui est donc accolée. Par suite, il lui fallait commencer à présenter son arsenal dès que les équations de degrés 1 ou 2 ont été passées en revue : toutefois commencer le Livre Second à ce moment aurait encore un peu plus déséquilibré le découpage en trois Livres[5], et l'on ne peut finalement qu'approuver *a posteriori* son choix.

4. Notre chapitre 10 serait alors devenu le 3.
5. Rappelons les paginations respectives dans les *Essais* : 18, 55 et 44 pages sur 117.

Restent donc à traiter sept parties à insérer entre nos chapitres 2 et 10

A) Chapitre 3 : invention des coordonnées par le Problème de Pappus

B) Chapitre 4 : invention d'une famille infinie de courbes

C) Chapitre 5 : Transformation et Parabole Cartésiennes

D) Chapitre 6 : les Coniques sont les plus simples courbes de Pappus

E) Chapitre 7 : racines multiples d'une équation et normales aux courbes

F) Chapitre 8 : normales aux Ovales et applications optiques

G) Chapitre 9 : transformations d'équations.

Parmi ces sept chapitres, suivant rigoureusement l'ordre de Descartes,

a. les quatre premiers (dont un dans le Livre Second) traitent de l'invention, grâce aux coordonnées, des nouvelles courbes dites de Pappus indispensables aux équations de degrés 5 et au delà,

b. les deux suivants illustrent la notion de racines au moins doubles sur l'exemple de l'intersection d'un cercle et de l'une de ces courbes (qui base toute la technique des chapitres 10 et 11),

c. le dernier (débutant le Livre Troisième), rassemble toutes les manipulations nécessaires à la suite, notamment afin de pouvoir éliminer les « fausses » racines (les négatives) d'une équation.

En particulier ce chapitre 7 est, en dépit des apparences, complètement fondé sur la technique cartésienne fondamentale de *La Géométrie* : **étudier, grâce aux coordonnées, les points d'intersection d'un cercle centré sur une droite donnée avec une courbe donnée** et ce afin de résoudre toutes les équations. Plus particulièrement, on s'y intéresse à la notion d'intersection multiple en un même point.

Ce phénomène, dont Descartes a du comprendre subitement, un jour, tout l'intérêt géométrique, avait évidemment été remarqué par le chercheur lors d'exemples préparatoires conduits à la main. En voici cinq preuves.

La première surtout est essentielle : elle figure aux pages 345-347 des *Essais* (417-418 de AT VI) ; retenons deux passages percutants

« *si ce point* P *est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point* C, *y touchera la ligne courbe* CE, *sans la coupper : mais que si ce point* P *est tant soit peu plus proche, ou plus éloigné du point* A, *qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non seulement au point* C, *mais aussi nécessairement en quelque autre* [...] *Et enfin elles*[6] *sont entièrement égales, s'ils sont tous deux fois en un, c'est à dire si le cercle, qui passe par* C, *y touche la courbe* CE *sans la coupper* ».

Puis, à la page 393 des *Essais* (page 467 dans AT VI), on trouve les expressions « *le cercle* FG *peut coupper, ou toucher la Parabole* » puis « *si ce cercle ne couppe, ni ne touche la Parabole* », et encore - pages 405-406 des *Essais* et 478-479 de AT VI - « *Ce cercle couppera ou touchera la ligne courbe* » et surtout « *Mais lorsqu'il la coupe en moins, cela témoigne qu'il y a quelques-une de ces racines qui sont égales entre elles, ou bien qui ne sont qu'imaginaires* », citations fort claires qui justifient pleinement notre affirmation.

Sa place était donc inévitable dans *La Géométrie*, et l'emplacement choisi se révèle finalement être très rationnel dans une table des matières relue à la lumière du but fondamental : *résoudre les équations algébriques*[7]. Loin d'être une excroissance intéressante mais un peu marginale, la méthode des normales de Descartes, totalement originale par rapport au passé et même au présent, était donc entièrement partie prenante de son projet.

Il aurait pu nous dire tout cela, mais à quoi bon ? Puisque les résultats sont là, c'est à nous de faire l'effort de le comprendre et non à lui de s'abaisser à dévoiler ses plans. Cela n'excuse pas l'obscurité apparente sciemment acceptée (recherchée ?) par l'auteur, mais il est vrai que tenter de reconstituer le chemin qu'il a suivi n'était pas dès lors une tâche inintéressante.

---

6. Deux racines d'une certaine équation.

7. Tout au plus pourrait-on penser, aujourd'hui, que le contenu de nos chapitres 7 et 8 aurait pu être rejeté par son auteur en annexe, après le traitement des degrés 5 et 6 : mais la belle symétrie entre début et fin de *La Géométrie* aurait été perdue.

Ce qui, par contre, n'était peut-être pas absolument indispensable pour un Traité des Équations, c'est le long passage sur les Ovales.

Mais ce dernier montre toute la puissance de feu des techniques cartésiennes, qui mettaient le point final à un problème fondamental d'optique dans lequel Descartes triomphait de tous ses rivaux, Kepler y compris : on imagine bien que dès lors il ne pouvait laisser passer une telle occasion.

Calculer le pied de la normale

La technique mathématique employée par Descartes est simple dans son esprit, mais plutôt complexe dans sa mise en œuvre. De plus sa présentation dans *La Géométrie* est particulièrement malcommode à suivre : la raison essentielle est que théorie et pratique se mélangent sans cesse, de lourds calculs entrecoupant les expositions des deux étapes fondatrices, qui auraient gagné à être mieux mises en valeur. Mais encore une fois, Descartes n'a cure de pédagogie...

I. Comme on l'a vu plus haut, cela commence en page 341 des *Essais* (413 dans AT VI) : « *lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les*[8] *couppent a angles droits* ». La technique préparatoire, basée sur un calcul de coordonnées, est exposée en moins de deux pages, sans justification. Commencent alors trois descriptions d'exemple de mise en œuvre, explicitement sur une ellipse, une Parabole Cartésienne et enfin une Ovale (rencontrée ici pour la première fois, page 343 des *Essais* et 416 dans AT VI). Ce travail sera dénommé plus loin *calcul préliminaire*.

II. En page 345 des *Essais* (417 dans AT VI), Descartes expose l'idée fondamentale, dans un texte subtil et très lourd à décrypter où, emportés par 350 années de calcul différentiel, nous pourrions lire un embryon de limite de droite (nous montrerons que ce serait une faute lourde).

8. Les courbes algébriques.

III. Deux pages plus loin, il revient de manière complètement détaillée sur chacun de ses trois exemples précédents [9]. Nous parlerons cette fois-ci de *calcul central*.

IV. Enfin, en page 351 des *Essais* (423 dans AT VI), il donne, sans justification aucune, une construction de la normale en un point d'une Conchoïde de Nicomède en une page, qui fera couler beaucoup d'encre. Il y commet une erreur comme nous le verrons page 291 et le système d'axes n'est pas habituel : tout cela peut porter à confusion, et c'est très dommage, mais nous verrons qu'en fait tout est dans l'ordre.

V. Descartes ne reviendra dans ce livre sur sa méthode qu'une fois, page 360 des *Essais* (431 dans AT VI) pour montrer comment le calcul effectué pour l'Ovale lui sert à justifier le fait que cette courbe est bien solution du problème du stigmatisme réfractif absolu. Son point de vue a un peu changé : il ne s'agit pas ici de construire une normale, mais de montrer qu'elle vérifie une égalité angulaire intéressante.

On sait que Fermat [10] s'opposera publiquement à cette méthode, et qu'il s'en suivra une longue - et douloureuse - polémique à partir de janvier 1638 [11] jusqu'à la reddition en rase campagne de Descartes du 27 juillet de la même année [12] : la *Correspondance* comporte plusieurs lettres agressives des uns et des autres qui sont décryptées ailleurs, à leur place, dans notre étude sur l'œuvre mathématique de Descartes.

Pour être tout à fait complet, il faut juste ajouter que Descartes reviendra plus tard trois fois sur un problème de normale (tangente) [13]. Il y travaillera en effet sur la courbe dite *Folium de Descartes/Galand/Galant* [14], lors de

9. En passant, il invente la technique de calcul d'introduction de *coefficients indéterminés*, d'usage universel depuis.

10. Aidé de quelques-uns de ses amis, dont Roberval.

11. De la lettre de Descartes à Mersenne, AT I XCVIII p. 486, puis à Mydorge le premier mars, AT II CX p. 2, suivie par celle de Roberval contre Descartes en avril, AT II CXX p. 104, *etc.*

12. Descartes à Fermat, AT II CXXXII, p. 280.

13. En dehors, bien entendu, de la grave dispute avec Fermat en 1638.

14. Voir notamment la lettre essentielle à Mersenne en date du 23 août 1638, AT II CXXXVIII, p. 313.

ses études sur la *Cycloïde/Roulette/Trochoïde*[15], et enfin sur la courbe dite de De Beaune[16] : nous renvoyons ici encore le lecteur au chapitre sur sa *Correspondance*, où d'ailleurs les techniques utilisées pour ces trois courbes sont complètement différentes.

Une affirmation de Descartes concernant ses méthodes

Avant d'entrer dans les détails de la technique cartésienne, il est sans doute bon de citer un extrait assez énigmatique d'une lettre du 11 juin 1640 à Mersenne (AT III CXCII, p. 86) où Descartes écrit avec hauteur

« *Et pour ceux qui veulent gloser sur ce que j'ai écrit de la conchoïde, ce ne peuvent être que des esprits de bas aloi : car je n'en ai donné que la construction, qui est fort courte, et j'ai averti que, par la façon que j'avais donnée, on s'y pouvait engager en de longs calculs;* ***d'où ils devaient connaître que j'avais divers moyens pour les tangentes, que je ne leur avais point voulu dire***. »

Ce passage, comme le travail sur la Roulette évoqué ci-dessus, ont pu faire croire que Descartes ne méprisait pas les outils incertains de l'analyse alors débutante : nous y reviendrons. Il suffira sans doute de dire ici que, si l'étude de la tangente à la Cycloïde[17] est effectivement orthogonale à tout ce qu'il a présenté dans cette fin du Livre Second, elle ne fonctionne que sur ce cas très particulier, et que la tangente à la Conchoïde, quant à elle longtemps apparue comme plus ou moins mystérieuse, relève pourtant entièrement des calculs algébriques développés ci-dessous[18] : les « divers moyens » ne sont donc probablement pas aussi révolutionnaires qu'on a bien voulu les lire.

15. Dans deux lettres à Mersenne du 27 juillet et du 23 août 1638 (AT II CXXXI, p. 257 et, déjà citée, p. 308). La coïncidence entre les dates de l'une des lettres à Mersenne et de celle envoyée à Fermat pour protester de son amitié est amusante. Nous y reviendrons.

16. 20 février 1639, AT II CLVI, p. 514

17. Venant après des considérations d'aires visiblement inspirées des infiniment petits de Cavalieri tout juste contemporains.

18. Voir pages 291 et suivantes.

Qu'est-ce qu'une normale à une courbe ?

Cette question, ou ce qui revient parfaitement au même, *qu'est-ce qu'une tangente à une courbe ?*, n'a reçu de réponses vraiment satisfaisantes qu'après la naissance du calcul différentiel. Son étude nous paraîtrait, dans une Éducation nationale plus assoiffée de culture qu'elle ne l'est aujourd'hui, devoir être par exemple le pivot de l'une des notions significatives d'histoire des sciences, et des mathématiques en premier lieu bien entendu [19].

À l'époque cartésienne, on ne connaissait que ce qu'en avaient fait Euclide, Archimède et Apollonius [20], donc normales et tangentes au cercle, à la Spirale d'Archimède et aux trois coniques, avec leurs propriétés géométriques de base. Rien d'autre, pour la quadratrice par exemple.

Ces trois génies créateurs furent très loins de donner une unité à leurs trois démarches [21]. En fait ils donnent trois définitions (naturellement implicites, compte tenu de l'époque) adaptées à leurs thèmes de recherche : aucune vision vraiment généralise ne peut en être tirée ; il est par notamment dommage que la tangente au cercle ne soit pratiquement pas liée à la tangente à une conique, basée sur une autre idée.

Le point de vue cartésien est tout à fait nouveau. Pour l'exposer, nous utiliserons deux figures inspirées d'aussi près qu'il était possible de celles des pages 342, 343 et 346 des *Essais*, soient les pages 413, 414 et 418 de AT VI, avec pour l'essentiel les notations de l'auteur [22]. La première est placée ci-dessous, la seconde étant repoussée plus loin (page 279), au moment de l'étude de la partie centrale du calcul cartésien.

19. Notons que ce sujet importe naturellement aussi de manière forte en physique.

20. Plus vraisemblablement certains de leurs précurseurs, mais - selon la tradition - nous utilisons les noms plus illustres de ceux dont les écrits nous sont parvenus.

21. Pour simplifier, nous allons feindre ici de croire, par exemple, que la notion de tangente à un cercle est due à Euclide : c'est naturellement parfaitement inexact, mais commode pour notre propos.

22. La première sera d'ailleurs reprise ensuite sans modifications trois autres fois, aux pages 344, 350 et 360 des *Essais*, soit 416, 422 et 431 de AT VI : voilà qui n'aide pas trop à la compréhension d'un lecteur moderne, surtout si l'on y ajoute que deux points notés C et Q y sont vraiment très proches, le second n'ayant d'intérêt qu'à la toute dernière apparition de la figure.

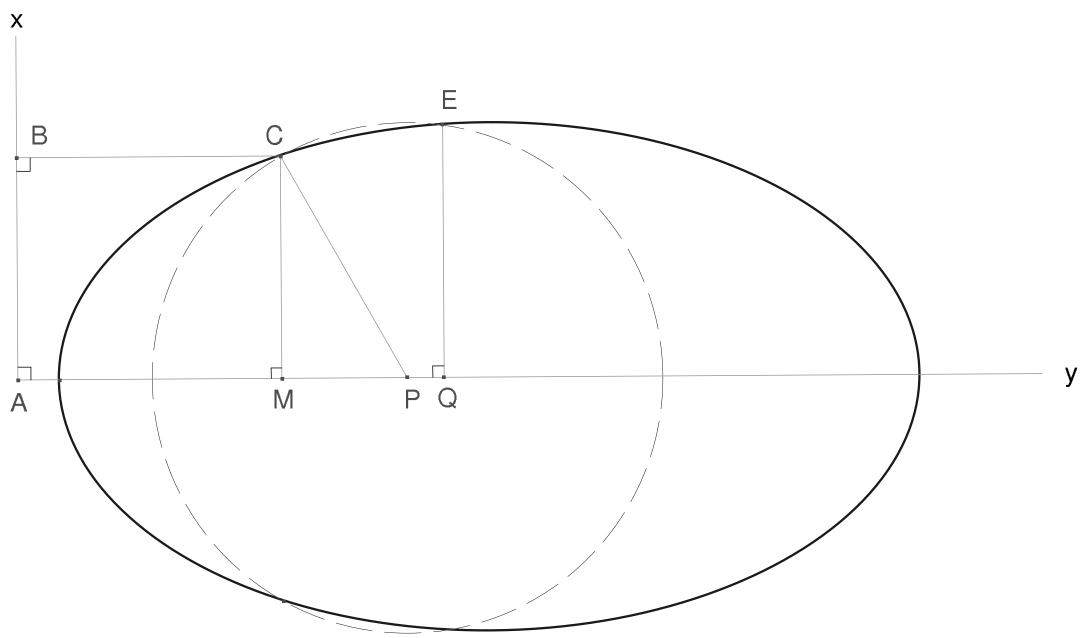


FIGURE 7.1 – *Figure préparatoire aux normales vues par Descartes*

Sur la première de nos deux illustrations, on voit deux axes de coordonnées orthogonaux Ax et Ay placés de manière un peu choquante pour un moderne, un point C d'une courbe $\mathcal{C}$ (ici une ellipse, mais c'est sans importance) projeté en B sur l'axe vertical des x, un point P de l'axe des ordonnées, le cercle de centre P passant par C qui recoupe $\mathcal{C}$ en plusieurs autres points, dont E choisi comme étant plus ou moins « voisin » de C. Les projections de E et de C sur l'axe horizontal des y sont notées Q et M.

Un calcul préliminaire incontournable

Fidèle à sa méthode de numérisation des figures, Descartes pose $s = PC$, $x = AB = MC$, $y = MA = CB$ et $v = AP$ tel que $PM = v - y$ (supposé implicitement positif, mais c'est en fait sans importance). Nous disposons donc de l'égalité fondamentale [23]

$$s^2 = x^2 + (y - v)^2.$$

La première opération à effectuer pour trouver la normale en C à la courbe $\mathcal{C}$ est maintenant de considérer cette équation, et de la combiner avec celle de la courbe [24] $\mathcal{C}$ de manière à trouver une relation nécessaire de la forme $R(y, v, s) = 0$ liant le rayon s aux ordonnées v et y de P et C.

Descartes dit explicitement : « *par le moyen de cette équation* [celle du cercle] *j'ôte de l'autre équation* [...] *l'une des deux quantités indéterminées x ou y, ce qui est aisé en mettant partout* $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ *au lieu d'x* [...] *si c'est x que je veuille ôter.* [25] ». Il écrit qu'il faut aussi mettre le carré de cette « somme » au lieu d'xx, son cube au lieu d'x^3 *etc* [26].

Ce travail de réduction des deux équations à une seule est particulièrement facile à effectuer si la courbe $\mathcal{C}$ possède Ay comme axe de symétrie, comme c'est le cas pour l'ellipse de notre figure. Elle admet alors en effet une équation que l'on peut écrire sous la forme $H(x^2, y) = 0$ où H est un polynôme, et l'on peut poser par exemple l'égalité

$$R(y, v, s) = H(s^2 - (y - v)^2, y) = F(\sqrt{s^2 - (y - v)^2}, y)$$

($R = H$ en termes très concis) où l'on suppose naturellement $y \geqslant 0$ et $v - s \leqslant y \leqslant v + s$, c'est-à-dire $|v - y| \leqslant s$.

23. Si *La Géométrie* avait été un traité de géométrie analytique, on y aurait trouvé des paragraphes tels que : équations d'une droite, équations d'un cercle *etc.* Rien de tel pour le premier item ; le second est ici tout juste représenté par cette égalité, qui ne traite même que d'un cas particulier (cercle centré sur l'un des axes de coordonnées).

24. « *L'autre équation qui m'explique le rapport qu'ont tous les points de la courbe CE à ceux de la droite GA* », pages 342 des *Essais* et 413 de AT VI.

25. On dirait aujourd'hui *éliminer* x entre les deux égalités.

26. À signaler, sur l'édition originale de 1637, au haut de la page 343 des *Essais*, une expression fautive $x + \sqrt{ss - xx}$, naturellement corrigée dans toutes les éditions suivantes en $v + \sqrt{ss - xx}$: voir par exemple la page 49 de celle de 1664, la page 41 de la traduction de Van Schooten en 1649-1659, et naturellement la page 414 de AT VI.
Il faut noter qu'une égalité de la forme $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$ est très rare dans *La Géométrie* qui s'intéresse à des courbes définies par des équations implicites $F(x, y) = 0$, mais pratiquement jamais à des courbes explicites du type $y = f(x)$ si commun de nos jours : Descartes ignorait tout du concept de fonction.

Dans le cas général où son équation $F(x,y)=0$ possède des termes de degré impair en x, voici une manière d'opérer bien connue dès cette époque [27] : il existe deux polynômes H et K tels que $F(x,y) = H(x^2,y) + x\,K(x^2,y)$ obtenus en séparant termes de degré pair en x de ceux de degré impair. De manière plus précise, on a

$$H(x^2,y) = \frac{1}{2}\,[F(x,y) + F(-x,y)], \quad K(x^2,y) = \frac{1}{2x}\,[F(x,y) - F(-x,y)]$$

ce qui donne bien, avec un abus d'écriture évident, $F = H + xK$. Un calcul très élémentaire montre que l'on peut alors, sous les mêmes conditions sur y, prendre $R = H^2 - x^2K^2$, c'est-à-dire

$$R(y,v,s) = H^2(s^2-(y-v)^2,y) - (s^2-(y-v)^2)\,K^2(s^2-(y-v)^2,y).$$

Cette fois-ci la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $K + xH = 0$, alors que $K - xH = 0$ est l'une des équations de sa symétrique par rapport à l'axe Ay.

On peut remarquer que cette construction de R aboutit finalement à l'égalité très simple à retenir

$$R(y,v,s) = F(\sqrt{s^2-(y-v)^2},y)\,.\,F(-\sqrt{s^2-(y-v)^2},y)$$

(à comparer avec $R(y,v,s) = F(\sqrt{s^2-(y-v)^2},y)$ obtenue plus haut dans le cas où x n'intervient que par son carré dans F).

Comment interpréter le calcul préliminaire ?

Supposons toujours $y \geqslant 0$ et $v - s \leqslant y \leqslant v + s$ (condition essentielle comme nous le verrons, mais passée sous silence par Descartes).

Que signifie l'égalité $R(y,v,s) = 0$?

---

27. On parlait alors d'*ôter les asymétries* ; *cf* par exemple la lettre à Carcavi du 11 juin 1649, AT V DLXII p. 366 : annuler une expression de la forme $H + x\,K$ implique visiblement $H^2 - x^2K^2 = 0$, la réciproque étant naturellement inexacte, puisque $H^2 - x^2K^2 = 0$ est une équation de la réunion de $\mathcal{C}$ et de sa symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. À la page 344 des *Essais* (415 dans AT VI), Descartes dit « *remettant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication* ».

C'est une condition nécessaire

Les calculs ci-dessus montrent immédiatement que, si y est l'ordonnée d'un point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et d'un cercle de centre P et de rayon s, alors $R(y, v, s) = 0$.

Par suite $R = 0$ est une condition **nécessaire** pour pouvoir affirmer qu'il existe un point d'ordonnée y appartenant à cette intersection.

Est-ce une condition suffisante ?

La réciproque de ce qui précède est-elle vraie ? En d'autres termes, avons nous affaire à une condition nécessaire et suffisante ?

Pour tout réel y tel que $R(y, v, s) = 0$ et $|v - y| \leqslant s$, existe-t-il un point d'ordonnée y appartenant aux deux courbes ?

En fait cette relation implique simplement que l'on dispose alors de l'une des deux égalités

$$F(\sqrt{s^2 - (y-v)^2}, y) = 0, \qquad F(-\sqrt{s^2 - (y-v)^2}, y) = 0$$

entre lesquelles il n'y a aucune raison de pouvoir choisir la première.

- Donnons un premier exemple : $F(x, y) = x^2 - 5\,(y - 1)$, où $F = 0$ est une équation d'une parabole [28] pour laquelle

  $$R(y, v, s) = s^2 - (v - y)^2 - 5\,y + 5.$$

  La relation $R = 0$ est vérifiée pour $y = \dfrac{1}{5}$, $v = \dfrac{27}{10}$ et $s = \dfrac{3}{2}$ puisque

  $$R\Big(y, \frac{27}{10}, \frac{3}{2}\Big) = -\Big(y - \frac{1}{5}\Big)^2.$$

  Or si nous recherchons l'abscisse x d'un point d'intersection des deux courbes d'ordonnée y, nous trouvons $x = \pm\, 2\,\mathbf{i}$.

28. Cette courbe n'est pas traitée par Descartes pour en rechercher les normales, mais il s'est en revanche occupé des ellipses, pour lesquelles les calculs sont un tout petit peu plus compliqués, mais très analogues.

D'ailleurs un simple dessin montre que le cercle de rayon s centré au point $(0, v)$ est entièrement à l'intérieur de la parabole considérée : il y est clair que les deux courbes ne se coupent pas.

Cet exemple[29] montre que notre rappel de la condition $|y - v| \leqslant s$, totalement absente du texte de Descartes et visiblement non vérifiée ici, est absolument nécessaire pour pouvoir affirmer que $R = 0$ est une condition suffisante.

La plus grande vigilance est donc nécessaire devant la technique cartésienne, qui paraît pourtant si élémentaire et presque évidente, au moins *a posteriori*.

- Une variante de l'exemple précédent donne un résultat mixte, à savoir que, pour un couple donné $(v, s) = (5, 2)$, on trouve deux valeurs possibles de y dont seule l'une est utilisable. Il s'agit toujours d'une parabole, définie par le polynôme $F(x, y) = s^2 - 4\,(y - 4)$, pour laquelle

$$R(y, v, s) = -y^2 + 6\,y - 5 = -(y - 1)\,(y - 5).$$

Pour $y = 1$, on obtient $x^2 = -12$, ce qui est inacceptable, tandis que $y = 5$ donne les deux points d'intersection $(x, y) = (\pm 2, 5)$: ce sont bien entendu les seuls. On notera que $|1 - 5| = 4 > 2$ tandis que $|5 - 5| = 0 \leqslant 2$.

- Donnons un troisième exemple : $F(x, y) = x^3 - xy + x + 1$, où $F = 0$ est une équation d'une Parabole Cartésienne[30] pour laquelle

$$R(y, v, s) = 1 - (s^2 - (y - v)^2)(s^2 - (y - v)^2 - y + 1)^2.$$

29. Dans lequel la valeur de v a été choisie parce qu'ordonnée du pied commun sur Ay des normales aux points (x, y), conjugués et non réels du plan euclidien.

30. Cette fois-ci, cette courbe a été étudiée par Descartes pour en rechercher les normales.

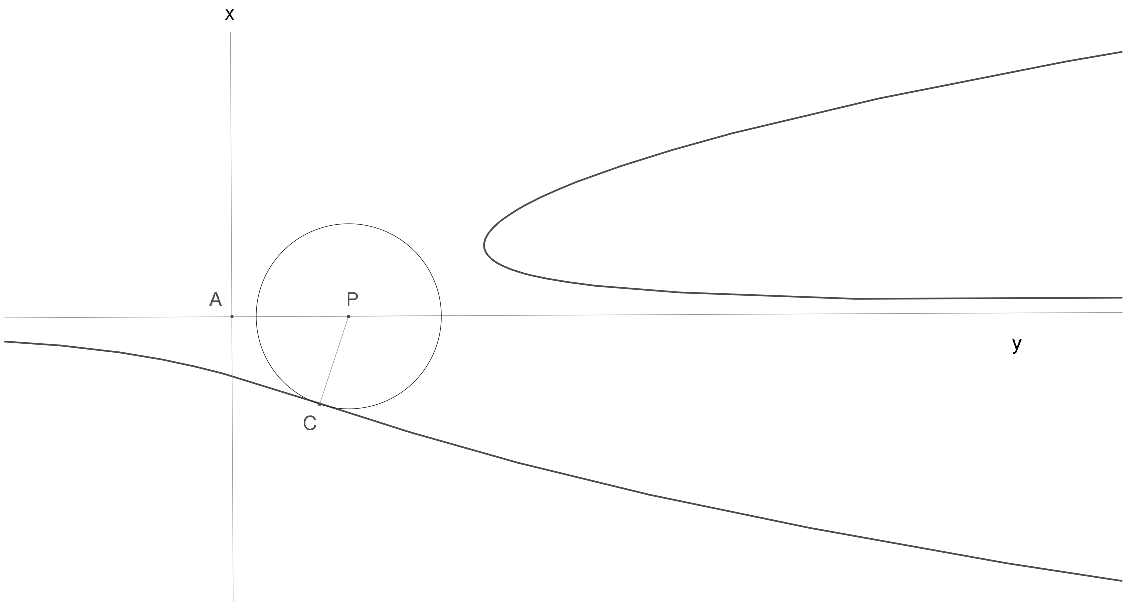


FIGURE 7.2 – *Intersection d'une Parabole Cartésienne et d'un cercle*

La relation $R = 0$ est vérifiée pour $y = 1$, $v = \dfrac{4}{3}$ et $s = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ puisque

$$27\,R\Big(y, \frac{4}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}\Big) = (y-1)^2(27\,y^4 - 108\,y^3 + 72\,y^2 + 72\,y + 29).$$

Dans ce cas $|y - v| \leqslant s$. Pourtant l'équation $F(x, 1) = 0$ n'est satisfaite que pour une seule valeur, $x = -1$ négative.

En d'autres termes, on a pour cet exemple

$$F(\sqrt{s^2 - (v-y)^2}, y) = F(1, 1) = 2,$$

$$F(-\sqrt{s^2 - (v-y)^2}, y) = F(-1, 1) = 0.$$

Cela montre[31] que le défaut de symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Ay peut entraîner le fait que $R = 0$ ne définisse pas un point commun aux deux courbes dont les deux coordonnées sont positives ou nulles, comme cela est tacitement impliqué par le texte cartésien.

31. On doit constater que, ici encore, ces valeurs ont été choisies pour que v soit l'ordonnée du point d'intersection de Ay avec la normale à $\mathcal{C}$ en $(-1, 1)$. Par ailleurs, on peut prouver que $y = 1$ est la seule racine de $R = 0$ pour ces valeurs de v et de s.

Si l'on se limite donc comme Descartes aux couples vérifiant $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, la réponse à notre question [32] est **non**. Lorsque $\mathcal{C}$ n'est pas symétrique par rapport à Ay, la relation $R = 0$ implique l'appartenance du point d'ordonnée y à la *réunion* de $\mathcal{C}$ et de sa symétrique [33] qui n'est pas $\mathcal{C}$!

Cela dit, il est clair que pour Descartes la condition $R = 0$ était bien nécessaire et suffisante, même s'il traite lui-même un exemple de courbe asymétrique (sa *Parabole Cartésienne*).

D'où vient le calcul préliminaire ?

Nous avons déjà signalé, page 264, cinq citations de Descartes parlant d'intersections d'un cercle et de différentes courbes. Quatre de ces citations appartiennent au Livre Troisième. Ce sont elles qu'il faut rapprocher de la première, fondamentale pour notre analyse, que nous rappelons ici partiellement

« *si ce point* P *est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point* C, *y touchera la ligne courbe* CE, *sans la coupper : mais que si ce point* P, *est tant soit peu plus proche, ou plus esloigné du point* A, *qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non seulement au point* C, *mais aussy necessairement en quelque autre* ».

La réponse est donc des plus claires : *toute la mise en œuvre de la résolution graphique des équations dans le dernier Livre repose sur l'intersection d'un certain cercle d'avec une certaine courbe*, et telle est justement l'origine du calcul préliminaire conduisant à la condition nécessaire et suffisante [34] pour qu'**un point appartienne à l'intersection d'une courbe et d'un cercle**. La grande différence entre ce passage du Livre Second et l'apothéose que constitue la fin de la *Géométrie* est que, dans ce cas-ci, la courbe est donnée, tandis que dans le Livre Troisième il faut la construire pour l'adapter à une équation donnée. Autrement, la technique est bien la même : considérer les ordonnées des points constituant une telle intersection.

32. Toutes deux absentes de la littérature sur le sujet.
33. Rappelons que $H^2 - x^2K^2 = 0$ n'est pas une équation de la seule $\mathcal{C}$!
34. À quelques conditions près, comme on l'a vu plus haut.

Une tentative de justification de la méthode

Après la description du calcul préliminaire et une série de trois exemples concrets, avant de passer à la description du calcul central et la complétion des trois exemples précédents déterminant la normale par l'acquisition de l'ordonnée de son pied en l'un quelconque de leurs points, il faut bien que Descartes essaie de démontrer pourquoi la réunion de ses deux calculs conduit bien à une telle construction de normales. Bien entendu, faute de définition de ce concept alors seulement introduit pour une poignée de courbes connues, il ne peut s'agir que d'un discours rendant *vraisemblable* l'emploi généralisé de ce concept alors émergent, dont l'extension est alors définie finalement (et silencieusement) par l'algorithme lui-même.

Ce texte essentiel figure aux pages 345 et *sq.* des *Essais* (417 de AT VI). Il doit donc être regardé avec une très grande attention.

Lire les explications cartésiennes

La figure cartésienne de cet endroit est pratiquement celle de notre page 270. Il commence son texte par les mots déjà cités : on aura déterminé le vrai point[35] P, pied sur Ay de la normale en C à la courbe, dès que le cercle de centre P et de rayon $s = PC$ ≪ *touchera la ligne courbe* CE, *sans la coupper* ≫.

Suit une très longue page plutôt embarrassée où il écrit que les points C et E ont même statut (y compris que leurs projections M et Q) et correspondent à des ordonnées inégales, à savoir CM et EQ dans le cas de figure choisi lors du calcul préliminaire : à noter que tout cela aurait pu être dit bien plus rapidement et clairement. Son idée est assez archimédienne[36] quant à sa forme : si P n'est pas là où il doit l'être mais un peu à droite ou un peu à gauche, alors le cercle coupe[37] la courbe en C en donnant naissance

35. C'est-à-dire calculé son ordonnée v.

36. Dans la méthode dite d'*exhaustion*, pour démontrer une égalité de la forme $x = a$, on montre que chacune des relations $x < a$ et $x > a$ mène à une contradiction : à noter que cela ne prouve pas $x = a$, mais simplement que ce nombre x ne pourrait prendre que la seule valeur a et pas une autre, ce qui est très différent quant à la logique sous-jacente.

37. Au sens ancien, c'est-à-dire de manière franche, en formant avec elle un angle visiblement non nul (voir les parties de ce chapitre consacrées aux tangentes dans l'Antiquité, par exemple page 316).

à un autre point E, commun aux deux ensembles. On est alors devant deux ≪ *racines* ≫ inégales, à savoir les ordonnées AM et AQ.

S'étant assuré que les abscisses CM et EQ sont toutes deux positives[38], il prononce la phrase décisive dont nous avions déjà repéré la conclusion

≪ *plus ces deux points*, C, & E, *sont proches l'un de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines*[39] *; & enfin elles sont entierement esgales, s'ils sont tous deux ioints en un ; c'est a dire si le cercle, qui passe par* C, *y touche la courbe* CE *sans la coupper.* ≫

Au premier coup d'œil, il est impossible pour un moderne de ne pas penser dès l'abord qu'il s'agit ici d'un phénomène classique de limite : la normale est la limite de la médiatrice de CE (qui passe par P) lorsque que E tend vers C en restant sur la courbe. Cette façon de voir est en effet absolument conforme à la vision de la tangente en C comme position limite de la droite CE dans cette hypothèse. **Et pourtant la lecture du texte cartésien ne permet absolument pas cette interprétation** : il y est exactement dit que, lorsque les racines sont égales, nous avons affaire à la normale, et que sinon, *même si c'est de très peu*, ce n'est pas la normale mais simplement une autre droite.

Pour caricaturer légèrement, c'est comme lorsque l'on dit qu'un nombre est nul dès que sa valeur est 0, et qu'il ne l'est pas dans le cas contraire, *même s'il en est très proche* : il s'agit de considérations totalement vides de toute idée topologique de limite d'un nombre non nul vers 0. Toute la confusion vient naturellement de l'adjectif **proche**, qui nous incite très fortement à imaginer un processus cinématique[40] qui n'est nullement présent dans ce paragraphe.

Une interprétation

Comme déjà rappelé, il est exclu que nous trouvions ici une démonstration : puisque la notion de normale n'a jamais encore été définie pour une courbe

38. *Le point* E [se trouve] *du même côté de la courbe que le point* C.
39. Lapalissade ! Deux points situés sur des branches différentes d'une hyperbole peuvent bien voir leur distance diminuer lorsqu'ils se rapprochent, mais il n'est pas vrai qu'ils tendent tous deux chacun vers un même point limite.
40. Qui sera, au contraire, très fortement à la base de la création du calcul différentiel par Newton en 1665.

arbitraire, Descartes ne pouvait au contraire que la *définir* - implicitement - par l'algorithme lui-même. La page que nous venons de lire a simplement pour but de donner une présentation heuristique de son intuition selon laquelle sa technique fournit un nouveau concept mathématique en phase avec ce que l'on connaissait dans les cas élémentaires légués par l'Antiquité [41], et qu'il s'agit simplement d'une description tout à fait statique d'une situation.

En fait, et pour autant que l'on puisse se risquer à une telle reconstruction, il nous paraît vraisemblable que le subconscient cartésien a plus ou moins tenu le discours suivant

- je ne sais pas ce qu'est une normale pour une courbe quelconque ;
- je le sais pour un cercle (c'est le rayon passant par le point) ;
- si je pouvais trouver un cercle quasiment confondu avec la courbe aux environs du point C, il serait assez logique de penser que la normale à l'un peut alors être dite normale à l'autre, et ce sans créer de déchirure dans le consensus existant dans le monde savant ;
- je ne peux pas faire que *tous les points* de ce cercle recherché appartiennent à la courbe : toutefois, s'il y en avait déjà *au moins deux au lieu d'un* [42], la situation serait bien plus favorable.

Que Descartes ait eu une intuition plus ou moins cinématique pour le conduire lors du dernier moment de cette démarche, n'est évidemment pas impossible : mais répétons que le texte, tel qu'il est, ne suffit absolument pas à étayer une telle démarche, et nous continuons à penser qu'ici, comme très souvent ailleurs, *il reste fondamentalement un algébriste.*

Il est maintenant temps de reprendre la figure de la page 270 dans une vision nouvelle où E est confondu avec C et Q avec M : nous y avons ajouté la tangente en C définie, à son tour, comme la perpendiculaire en ce point à la normale PC

41. Nous verrons d'ailleurs plus loin qu'un Fermat, par exemple, n'agira pas autrement, même si son algorithme est très différent, en apparence comme sur le fond.

42. Moins d'un demi-siècle plus tard, Newton parviendra même à la notion de *cercle osculateur*, pour lequel le contact est au moins triple ; Descartes n'a pas cherché à aller au delà de deux.

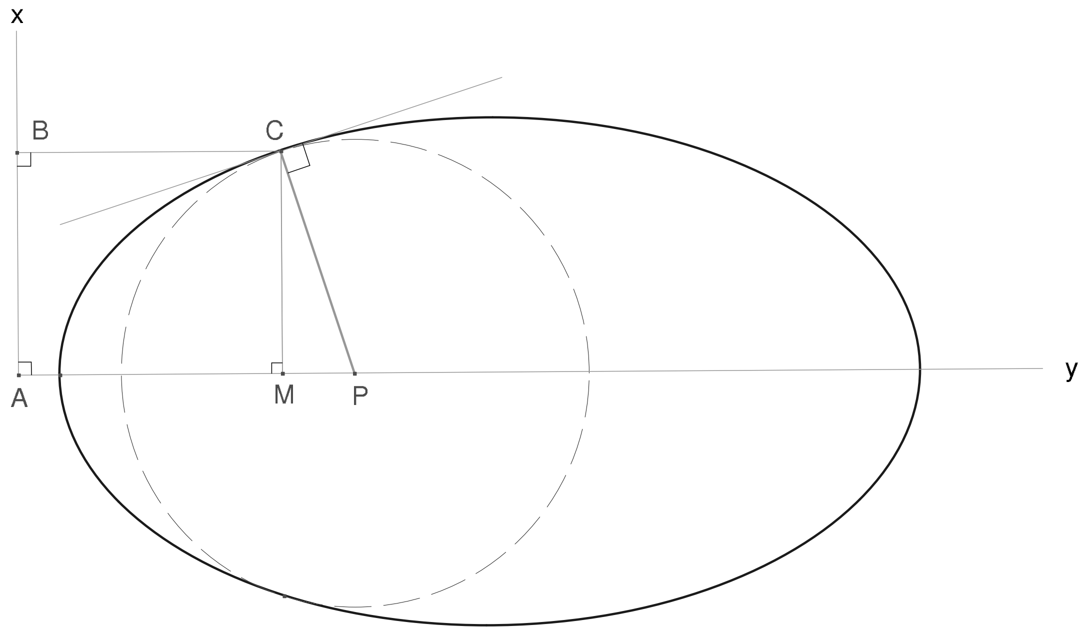


FIGURE 7.3 – *Normale et tangente obtenues pour $E = C$ et $Q = M$*

Le calcul central

Reste maintenant à traduire en nombres - objectif incessant de Descartes - le concept de « *deux points en un* ». Pour un moderne, aucun doute : c'est bien un problème de **racine double**[43] dans une équation. mais cela était-il évident avant lui ? Car ce n'est que depuis qu'il a écrit *La Géométrie* que ce lien est universellement connu.

Difficile de dire s'il est parti de cette notion, qui s'était évidemment imposée à lui lors de la conception d'un traité sur les équations algébriques, ou du problème géométrique des normales (en provenance directe de ses recherches en optique). Personne ne peut aujourd'hui le savoir, et il est assez probable qu'en fait les deux volets se sont présentés à son esprit plus ou moins à la même période (vers 1630 ?) ; en tout cas, les deux sont parfaitement imbriqués dans son travail et ce à une date sans doute comprise entre 1630 et 1635.

43. Dans ce qui suit, double signifie au moins double.

Des racines doubles des équations

Ce qui est clair, c'est que Descartes n'a pas inventé le concept de *racine multiple*, même si c'était dans l'air du temps, sans avoir encore jamais été l'objet d'une étude approfondie. Si Viète ne semble pas s'y être vraiment intéressé, il y avait pourtant déjà un siècle qu'en étaient apparus quelques exemples concrets, avec quelques règles générales pour les équations du troisième degré.

De manière précise, l'*Ars Magna* ou *Le Grand Art* (1545) de Jerôme Cardan est généralement cité comme le premier lieu où apparaissent des équations à racines multiples. Le tout premier chapitre de son livre s'appelle « *Sur les solutions doubles*[44] *dans certains types de cas* ». Il y étudie notamment des équations du type[45]

$$x^3 + 2q = 3px$$

avec[46] $p^3 = q^2$, dont les trois racines sont $\sqrt{p}$, $\sqrt{p}$ et $-2\sqrt{p}$. La condition énoncée est suffisante[47] pour que ce type d'équation ait une racine double : Cardan savait donc cela.

Effectivement, dans la traduction de T. Richard Witmer[48], dès la page 12, nous voyons apparaître en effet l'équation $x^3 + 16 = 12\,x$, dont « les » racines positives sont 2 et 2 (ici $p = 4$, $q = 8$ et la troisième racine est -4). Aujourd'hui, nous écrivons cela sous la forme très parlante

$$x^3 - 12\,x + 16 = (x-2)\,(x-2)\,(x+4) = (x-2)^2(x+4)$$

mais Cardan ne propose jamais de telles factorisations, ni ici ni dans les très nombreux autres cas d'équations numériques qu'il résout, et qui comportent souvent des racines doubles comme celle-là. C'est justement Descartes qui

44. Ce langage n'est pas absolument identique au notre : ainsi, deux racines opposées sont aussi considérées, par Cardan, comme une seule racine double : par exemple 2 et -2, et aussi $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ pour $x^4 + 12 = 7x^2$.

45. Bien entendu cette formulation est moderne.

46. « *regarder si multiplier les deux tiers du coefficient du terme à la puissance 1* [ici $2p$] *par la racine carrée du tiers du même* [ici $\sqrt{p}$] *donne le terme constant de l'équation* » [ici $2q$], c'est-à-dire $2p\sqrt{p} = 2q$, soit enfin $p^3 = q^2$.

47. Et même d'ailleurs aussi nécessaire.

48. MIT Press (Cambridge) 1968, Dover (New-York) 1993.

franchira ce pas de manière systématique [49] : on trouve en effet, dans *La Géométrie* [50], la proposition selon laquelle une égalité $f(a) = 0$ équivaut à la possibilité d'une décomposition $f(x) = (x - a)\,g(x)$, d'ailleurs aussitôt étendue à plusieurs racines à la fois. Il avait bien compris le mécanisme de l'apparition de racines multiples et son lien avec une factorisation du polynôme à annuler.

La mise en œuvre cartésienne du calcul central

Comme on l'a vu, Descartes sait tout de suite comment traduire le fait que deux points d'intersection de sa courbe et du cercle sont confondus en le seul point C : l'équation en y qui s'écrit $R(y, v, s) = 0$, avec v et s inconnus au départ, doit admettre l'ordonnée $y = e$ de C comme racine double.

Techniquement, cela équivaut à l'existence d'un polynôme $Q(y)$ (le *quotient* dans notre langage), aux coefficients dépendant de v et de s, ou plutôt de v et de $p = v^2 - s^2$ afin de simplifier un peu le calcul, vérifiant pour tout nombre réel y l'égalité

$$R(y, v, s) = (y - e)^2 Q(y) = (y^2 - 2\,ey + e^2)\,Q(y).$$

Tout le problème est maintenant de savoir pour quelles valeurs des deux paramètres v et s (ou v et p) cette égalité est bien vérifiée.

Pour résoudre un problème de ce genre qui n'avait pas encore été envisagé en mathématiques, Descartes va introduire une méthode extrêmement simple qui aura un grand avenir, connue sous le nom de *méthode des coefficients indéterminés*. Si R est de degré n en y, le quotient Q doit être de degré $n - 2$. Il sera connu dès que ses $n - 1$ coefficients le seront. Voici la solution cartésienne : poser $Q(y) = Ay^{n-2} + By^{n-3} + \cdots + Hy^2 + Ky + L$ et identifier, terme à terme, les coefficients en y^k de l'égalité souhaitée

$$R(y, v, s) = (y^2 - 2ey + e^2)\,(Ay^{n-2} + By^{n-3} + \cdots + Hy^2 + Ky + L).$$

Pour déterminer ces $n - 1$ inconnues $(A, B, \ldots, H, K, L)$, Descartes est persuadé - à juste titre ici d'ailleurs - qu'il suffit d'égaler un à un les $n - 1$

49. Même s'il faut noter que l'on ne trouve jamais chez lui de terme tel que $(x - 2)^2$, qu'il aurait sans doute écrit sous sa forme développée, faute de capacité de maniement de parenthèses aussi efficace que le nôtre.

50. Page 372 des *Essais*, 445 dans AT VI.

coefficients en y^n, y^{n-1}, …, y^3 et y^2 de part et d'autre du signe d'égalité. L'auteur dit textuellement : « *avoir separement equation entre chacun des termes de l'une, & chacun des termes de l'autre* [51] ».

Effectivement, comme le montrent quelques lignes de calcul, ce *premier système*, de $n-1$ équations linéaires à $n-1$ inconnues, est toujours résoluble, et d'une manière unique, si l'on recherche d'abord A, puis B en servant de la valeur trouvée pour A, de C d'après celles de B et de A et ainsi de suite [52]. Naturellement v et p apparaissent, sous forme littérale, dans ces nombres, ainsi que e si sa valeur exacte n'est pas connue.

Il reste encore deux coefficients à égaler : ceux de degré 1 et 0 en y. Sont ici mis en jeu les seuls coefficients K et L, désormais déterminés par la résolution du premier système. En reportant leur valeur dans ces deux dernières égalités, on obtient un *second système*, cette fois-ci de deux équations à deux inconnues v et p. **Si cela est possible**, en éliminant p entr'elles [53], on obtient v, ordonnée du centre du cercle tangent en C à la courbe (éventuellement en fonction de e, ordonnée du point C si elle n'a pas reçu de valeur numérique précise au départ) ce qui résout le problème.

Comme nous le verrons, dans un grand nombre de cas simples [54], on trouve effectivement pour chaque point C un v, et un seul, par cette procédure. Dans le cas général, on aboutit seulement à une équation polynomiale $\varphi(v) = 0$ où φ dépend de e. Les paragraphes qui suivent vont démonter certains aspects de ce mécanisme, plus lourd qu'il n'y paraît au premier abord.

Une obscurité du texte cartésien

Ce qui précède est censé fournir une égalité de la forme $v = \psi(e)$ où e est l'ordonnée de C. Il est possible que cela ne soit effectivement réalisable que pour certaines valeurs de e. Dans certains cas toutefois, le calcul aboutit pour toute valeur de e : il est alors naturel de poser, comme conclusion de la recherche, $v = \psi(y)$, comme dans les trois exemples traités par Descartes.

51. Page 347 des *Essais*, 419 de AT VI. Quelques lignes plus loin, il parlera joliment de *demesler par ordre ces equations*.
52. On parle de *système triangulaire* (ou *échelonné*) *inférieur*.
53. Par exemple par combinaison linéaire.
54. Tous ceux proposés par Descartes rentrent dans ce cas.

Mais la confusion qui régnait alors sur la nature de certains objets mathématiques comme les variables et les paramètres font que Descartes n'a pas su parler de manière aussi nette que nous avons pu le faire aujourd'hui, plus de 370 ans plus tard. Il a donc été contraint à un véritable *tour de passe-passe* entre y et e. Le moins que l'on puisse dire est qu'il n'a pas été très clair ! Essayons de reprendre ses paroles[55]

« *La premiere equation trouvée cy dessus* $[R(y, v, s) = 0]$ *doit avoir la mesme forme que celle qui se produit en faisant* e *egal a* y, *& multipliant* $y - e$ *par soy mesme, d'où il vient* $yy - 2\,ey + ee$ ».

« *on a* $v \propto e - \frac{r}{q} e + \frac{1}{2} r$, *ou bien à cause de ce que nous avons supposé* e *esgal a* y, *on a* $v \propto y - \frac{r}{q} y + \frac{1}{2} r$ ».

Cette légèreté dans les calculs (tantôt y est égal à e, tantôt pas, puis de nouveau $e = y$) n'a pas dû être simple à « demesler » par ses lecteurs. . .

L'exemple de la Cissoïde

Montrons comment fonctionne la méthode cartésienne sur un exemple extrêmement simple, celui de la Cissoïde de Dioclès remontant, comme son nom l'indique, à l'Antiquité[56].

Voici la forme de la Cissoïde[57], telle que représentée sous le nom de *Cissois Veterum* dans le livre posthume *Opticks* de Newton[58]. L'origine est en T, et A est le point d'ordonnée $y = a$.

55. Pages 347 et suivantes des *Essais*, et 419 dans AT VI.
56. Descartes cite cette courbe à la page 317 des *Essais* (390 de AT VI) ; dans la lettre citée à Mersenne du 11 juin 1640, il indiquera d'ailleurs que sa méthode « *est bonne* » pour cette courbe : il a donc certainement fait le calcul ci-dessous.
57. Souvent appelée *cissoïde droite* à cause de sa précieuse symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
58. Figure 47, Table IV, page 152 bis.

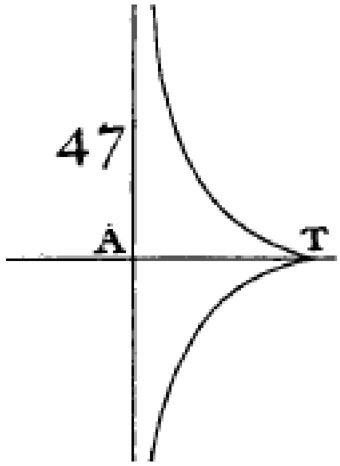


FIGURE 7.4 – *La Cissoïde de Dioclès d'après Newton*

Elle est par exemple définie par le polynôme $F(x,y) = y^3 + (y-a)\,x^2$, qui conduit aussitôt à

$$R(y,v,s) = y^3 + (y-a)(-y^2 + 2vy - p) = (2v+a)\,y^2 - (2av+p)\,y + ap$$

avec notre abréviation coutumière $p = v^2 - s^2$.

C'est ce trinôme qu'il faut identifier à une expression de la forme $(y-e)^2 A$, où A est l'unique coefficient indéterminé à déterminer. C'est d'ailleurs immédiat : le système s'écrit

$$2v + a = A, \qquad -2av - p = -2Ae, \qquad ap = Ae^2$$

d'où par les deux premières $A = 2v+a$ et $p = 2\,(Ae-av) = 2\,\big((2e-a)\,v+2ea\big)$, ce qui, reporté dans la dernière, donne finalement [59]

$$v = \frac{ae\,(2a-e)}{2\,(e-a)^2} = \frac{ay\,(2a-y)}{2\,(y-a)^2}\,.$$

Resterait à montrer comment construire géométriquement le pied P de la normale dont v est l'abscisse : c'est facile d'après les tout premiers paragraphes du *La Géométrie*, d'autant plus qu'un seul coup d'œil indique la forme simplifiée $v = \dfrac{a}{2}\left[\left(\dfrac{a}{a-y}\right)^2 - 1\right]$.

59. On peut aussi, plus élégamment, se servir du fait que la forme d'une racine double d'un trinôme du second degré est bien connue ; c'est d'ailleurs ainsi que Descartes procédera dans l'étude de ses Ovales.

L'exemple d'une Parabole Cartésienne

Bien entendu tout n'est pas toujours aussi simple que pour la Cissoïde ; il peut arriver entre autres cas que le polynôme R soit de degré six en y, d'où cinq coefficients indéterminés. Voici un exemple.

Ici la courbe est encore une Parabole de Descartes [60], définie par le polynôme $F(x, y) = y^3 - xy + 1$. On trouve, en posant toujours $p = v^2 - s^2$

$$R(y, v, s) = H^2 - x^2K^2 = (y^3+1)^2 - (2vy - y^2 - p)\, y^2 = y^6 + y^4 + 2\,(1-v)y^3 + py^2 + 1.$$

Nous cherchons à le factoriser en $(y - e)^2(Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E)$. Le premier système à résoudre s'écrit

$$1 = A, \quad 0 = B - 2e\,A, \quad 1 = C - 2e\,B + e^2A,$$

$$2\,(1 - v) = D - 2e\,C + e^2B, \quad p = E - 2e\,D + e^2C.$$

En voici les solutions

$$A = 1, \quad B = 2\,e, \quad C = 3e^2 + 1,$$

$$D = 2\,(2\,e^3 + e + 1 - v), \quad E = 5\,e^4 + 3\,e^2 + 4\,(1 - v)\,e + p.$$

En terminant l'identification des termes de degré 1 et 0 en y, on obtient le second système

$$3e^4 + 2\,e^2 + 3\,(1 - v)\,e + p = 0,$$

$$-5e^6 - 3e^4 + 4\,(v - 1)\,e^3 - p\,e^2 + 1 = 0.$$

Pour éliminer p, il suffit de multiplier la première égalité par e^2 et l'ajouter à la suivante. On trouve

$$v = \frac{2\,e^6 + e^4 + e^3 - 1}{e^3} = \frac{2\,y^6 + y^4 + y^3 - 1}{y^3}\,\cdot$$

Bien que cela ne soit pas nécessaire *a priori* [61] donnons en prime la valeur de $v^2 - s^2$, à savoir $p = \dfrac{3\,e^6 + e^4 - 3}{e^2}\,\cdot$

60. Image par une certaine rotation de la courbe de la page 275.

61. Sauf naturellement pour vérifier par exemple l'inégalité $p \leqslant v^2$. Un petit calcul montre que c'est bien le cas quelle que soit la valeur de e.

On pourra noter que le polynôme $F(x,y) = x^3 - xy + 1$, qui définit pourtant la même courbe après symétrie par rapport à la première bissectrice des axes de coordonnées, conduirait à des calculs autrement complexes ; il n'est pas possible de calculer v de façon linéaire, sauf pour certaines valeurs[62] de y, car aucune des deux équations finales n'est linéaire, ni en v, ni en p.

Les calculs ci-dessus donnent parfaitement l'esprit de la méthode, au moins pour les cas où l'ensemble reste de lourdeur raisonnable[63]. Dans ce qui suit, on pourra pourtant voir que la situation n'est pas toujours aussi rose que l'on pourrait l'espérer.

Se méfier toujours de l'algorithme cartésien...

Voici encore un exemple, également inédit, que Descartes aurait pu choisir pour nous montrer comment faire tourner sa méthode. Nous le présentons ici en raison de sa conclusion très surprenante (bien que, cette fois-ci, la courbe $\mathcal{C}$ soit symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

Définissons la courbe algébrique $\mathcal{C}$, qui est une sorte de parabole, par l'équation

$$0 = F(x,y) = (x^2+1)^2 - y.$$

Ici $R = H$, avec $H(z,y) = (z+1)^2 - y$, ce qui donne

$$R(y,v,s) = H(s^2 - (y-v)^2, y) = (y^2 - 2v\,y + q)^2 - y$$

avec $q = v^2 - s^2 - 1$, d'où

$$R(y,v,s) = y^4 - 4v\,y^3 + 2\,(2v^2+q)\,y^2 - (4qv+1)\,y + q^2.$$

Comme Descartes, identifions cette expression avec le produit de polynômes

$$(y-e)^2(gy^2 + hy + k).$$

62. Par exemple $y = 0$ simplifie tout ; cela donne $p = -1$, puis $v = \dfrac{1}{3}$ et enfin la factorisation $27\,R = y^2(27\,y^4 - 90\,y^2 - 2\,y + 90)$ qui ne s'annule d'ailleurs que pour $y = 0$.

63. Une autre limitation de l'algorithme est qu'il ne convient qu'à des $F(x,y)$ parfaitement connus, pas à des polynômes ayant trop de paramètres, par exemple de degré variable.

Il vient $1 = g$, $-4\,v = -2\,eg + h$ et $2\,(2v^2 + q) = e^2 g - 2\,eh + k$, d'où

$$g = 1, \qquad h = 2\,e - 4\,v, \qquad k = 3\,e^2 - 8\,ve + 4v^2 + 2\,q.$$

Restent à identifier les termes de degré 1 et 0, c'est-à-dire écrire les égalités $-4\,qv - 1 = -2\,ek + e^2 h$ et $q^2 = e^2 k$. On en tire

$$q = \frac{4\,e^3 - 12\,e^2 v + 8\,v^2 e - 1}{4(v-e)}, \quad \text{puis} \quad \varphi(v) = 16\,ev^2 - 32\,e^2 v + 16\,e^3 - 1 = 0$$

d'où la conclusion [64] $v = e \pm \dfrac{1}{4\sqrt{e}}\cdot$

On en déduit $q = e^2 \mp \dfrac{\sqrt{e}}{2}$ d'où $s^2 = \pm\sqrt{e} + \dfrac{1}{16e} - 1$ pour une abscisse de carré égal à $d^2 = s^2 - (v-e)^2 = -1 \pm \sqrt{e}$. Il en résulte donc que seul le signe $+$ dans l'expression de v conduit à des valeurs positives pour s^2 et d^2.

(On peut noter, au passage, que la paramétrisation $x^2 = z - 1$, $y = z^2$, qui implique $z \geqslant 1$ et donc $z = \sqrt{y}$, aurait mené bien plus rapidement à la « bonne » valeur de v, et seulement à celle-là. La factorisation

$$z^4 - 2vz^2 + z + q = (z-f)^2(gz^2 + hz + k)$$

conduit en effet aux égalités $g = 1$, $h = 2f$ et $k = 3f^2 - 2\,v$ qui, reportées dans l'égalité des coefficients de z, donnent aussitôt $v = f^2 + \dfrac{1}{4f} = z^2 + \dfrac{1}{4z}\cdot$ Cela prouve que la même courbe, selon la technique utilisée - équation cartésienne ou paramétrage habile - peut conduire à des déterminations différentes de v : sa technique présente donc des subtilités *a priori* insoupçonnées.)

Cet exemple montre que *toute valeur de* v *donnée par la technique cartésienne n'est pas forcément bonne à prendre*. La raison de cette difficulté est bien apparente dans ce cas précis : la valeur $v = e - \dfrac{1}{4\sqrt{e}}$ correspond effectivement au pied de la normale en un point C^* d'ordonnée e d'une branche parasite [65]

---

64. Descartes aurait écrit ici $v = y + \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$ et $v = y - \dfrac{1}{4\sqrt{y}}\cdot$

65. Si parasite, qu'elle en est vide puisque son équation est $x^2 + 1 = -\sqrt{y}$, soit encore $x = \pm\,\mathbf{i}\,(\sqrt{y} + 1)$.

$\mathcal{C}^*$, mais d'abscisse d imaginaire pure[66] donnée par l'égalité $d = \sqrt{-1-\sqrt{e}}$.

La clef de la difficulté rencontrée ici est la suivante : contrairement à l'affirmation « de bon sens » de Descartes déjà signalée[67], il faut aller plus loin que le calcul de v, pour vérifier l'inégalité $s^2 \geqslant 0$, ce qui impose bien entendu de ne pas s'arrêter en route : la détermination de la normale exige théoriquement le calcul des deux variables[68] v et s, ou v et p, et non de la seule valeur de v.

L'extension de la méthode aux courbes paramétrables

On appelle *courbes unicursales* les lieux $\mathcal{C}$ des points de coordonnées (x, y) définies par des égalités $x = f(z)$, $y = g(z)$ où f et g sont des fonctions rationnelles et z, le *paramètre*, décrit un certain ensemble de nombres réels. Ce sont des cas particuliers d'une famille de courbes que, faute de mieux, nous appellerons ici *courbes paramétrables*, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées Ay et telles que les coordonnées satisfassent à des relations du type

$$y = \frac{Y(z)}{\Delta(z)}, \qquad x^2 + y^2 = \frac{Z(z)}{\Delta(z)}$$

où Y, Z et Δ sont des fonctions polynomiales.

Nous ne disposons plus ici d'équation de la courbe $\mathcal{C}$ de la forme implicite $F(x, y) = 0$. Le calcul préliminaire va donc être modifié pour tenir compte de cette nouvelle donne. Des relations $p = v^2 - s^2$ (abréviation bien commode de la puissance du point A, qui ne figure pas dans le texte cartésien) et $s^2 = x^2 + (y - v)^2$ on peut tirer

$$2v\,Y(z) = 2v\,y\Delta(z) = (x^2 + y^2 + p)\,\Delta(z) = Z(z) + p\,\Delta(z)$$

66. Lorsqu'un point tel que C^* est non réel, la normale à la courbe qu'il décrit est évidemment également non réelle. Toutefois, en considérant son symétrique par rapport à Ay, on voit que leurs deux normales sont des droites imaginaires conjuguées : il est donc logique qu'elles se coupent sur l'axe en un point réel ; ainsi v est un nombre réel, ce qui explique le paradoxe apparent rencontré dans cet exemple.

67. *Mais parce que la quantité* v *détermine assez le point* P, *qui est le point que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre.*

68. Nécessairement soumises à l'inégalité $p \leqslant v^2$, équivalente à $s^2 \geqslant 0$.

soit encore

$$0 = \Pi(z, v, s) = 2v\,Y(z) - Z(z) - p\,\Delta(z).$$

C'est ce polynôme qui joue ici le rôle de $R(y, v, s)$.

Le calcul central va donc maintenant consister à déterminer la divisibilité de $\Pi(z, v, s)$ par un carré parfait du type $(z - f)^2$ où f est la valeur du paramètre z au point de $\mathcal{C}$ où l'on cherche la normale. La méthode des coefficients indéterminés consiste ici à déterminer des inconnues $(A, B, \ldots, K, L)$ vérifiant une identité de la forme $\Pi = (z - f)^2\Phi$, c'est-à-dire explicitement

$$Pz^n + Qz^{n-1} + \cdots + Uz^2 + Vz + W = (z - f)^2(Az^{n-2} + Bz^{n-3} + \cdots + Hz^2 + Kz + L).$$

Identifier les coefficients des deux membres correspondant aux puissances de z comprises entre n et 2 conduit à $n - 1$ égalités de la forme

$$A = P, \quad B - 2f\,A = Q, \quad C - 2f\,B + f^2A = R, \ldots, \quad L - 2f\,K + f^2H = U.$$

La résolution de ce système linéaire triangulaire est facile et conduit, tous calculs faits, aux égalités très simples

$$A = P, \quad B = Q + 2f\,P, \quad C = R + 2f\,Q + 3f^2P, \quad D = S + 2f\,R + 3f^2Q + 4f^3P \ldots$$

L'identification, qui reste à faire, des termes de degrés 1 et 0 en y aboutit, après report des valeurs ci-dessus, aux relations

$$V = f^2K - 2f\,L = -2f\,U - 3f^2T - \cdots - (n-1)\,f^{n-2}Q - n\,f^{n-1}P,$$

$$W = f^2L = f^2U + 2f^3T + 3f^4S + \cdots + (n-2)\,f^{n-1}Q + (n-1)\,f^nP$$

où n'interviennent plus que f et les coefficients, connus, de Π.

Pour un moderne, la première égalité exprime simplement que $\Pi'(f) = 0$, alors que la seconde se lit $\Pi(f) - f\,\Pi'(f) = 0$ donc, compte-tenu de la précédente, $\Pi(f) = 0$. Cela signifie que ce système équivaut en définitive[69] à $\big(\Pi(f) = 0,\ \Pi'(f) = 0\big)$, ce qui est bien classique depuis Newton. Nous n'aurions donc plus besoin de ce long détour pour écrire ces deux égalités.

69. Calculer par exemple $W + fV$. Tout cela repose sur la division euclidienne et la formule de Taylor pour les polynômes : $\Pi(z) = (z - f)^2\Phi(z) + (z - f)\,\Pi'(z) + \Pi(f)$.

Revenant à la forme de $\Pi = 2vY - Z - p\,\Delta$, il est clair que chacun de ses coefficients $(P, Q, R, \ldots, U, V, W)$ en z est une forme affine [70] $\alpha\, v + \beta\, p + \gamma$ en v et en p : il en résulte que le dernier système est un *système linéaire* en v et p. Par suite, il n'existe qu'une seule valeur possible pour v, qui peut par exemple s'obtenir par combinaison linéaire des deux équations.

Il n'existe naturellement pas, dans *La Géométrie*, d'allusion à ce qui vient d'être développé ici. Toutefois, ce travail a été utile, car il explique notamment pourquoi, dans la théorie des *Ovales*, on trouve bien un v unique puisque ces dernières sont des courbes paramétrables comme nous l'a appris Descartes lui-même. Tout y est même plus simple, car on peut choisir $\Delta = 1$ (il en va d'ailleurs de même pour les coniques d'axe Ay, d'équation $x^2 = py^2 + qy$, en posant par exemple $z = y$).

Enfin un retour sur les équations des Paraboles Cartésiennes montre qu'elles sont aussi paramétrables, comme également les Conchoïdes de Nicomède étudiées ci-dessous. Finalement les quatre cas officiellement considérés par Descartes (les Ellipses, ses Paraboles, les Conchoïdes et ses Ovales) rentrent tous dans cette catégorie, et déterminent donc de manière purement algébrique v en fonction de e, c'est-à-dire de y.

Hors du cas de ces courbes particulières, le nombre v peut très bien n'être calculable que par l'intermédiaire d'une équation polynomiale [71] $\varphi(v) = 0$, ce qui rend bien entendu les choses plus délicates : consciemment ou non, Descartes s'est soigneusement abstenu de sortir de ce cadre très sûr.

Les normales à une Conchoïde de Nicomède

À la page 351 des *Essais* (423 de AT VI) Descartes donne une construction géométrique sèche - *i.e.* sans justifications - de la normale en un point de l'une des branches des courbes issues de l'Antiquité, *la première conchoïde des anciens* (ou *conchoïde supérieure*), qui a provoqué bien des recherches.

70. Il en va donc de même pour chacun des nombres $(A, B, C, \ldots, K, L)$.
71. Voir par exemple la page 287.

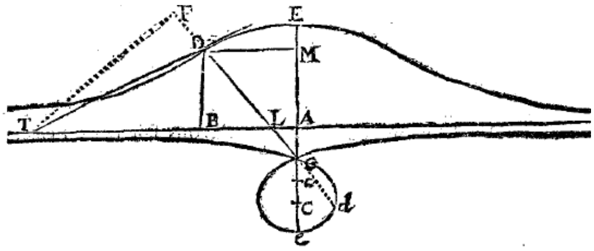


Figure 7.5 – *La Conchoïde de Nicodème d'après Newton*

Les points A (le *pôle*), B et D sont fixes sur un axe de symétrie (l'*essieu*), avec $AB = b$ et $BD = a$. Sur la perpendiculaire en B à l'axe (la *règle*), un point E est variable ; on porte à partir de E sur la droite AE au delà de la règle une longueur $EC = a$; ce point engendre la Conchoïde[72].

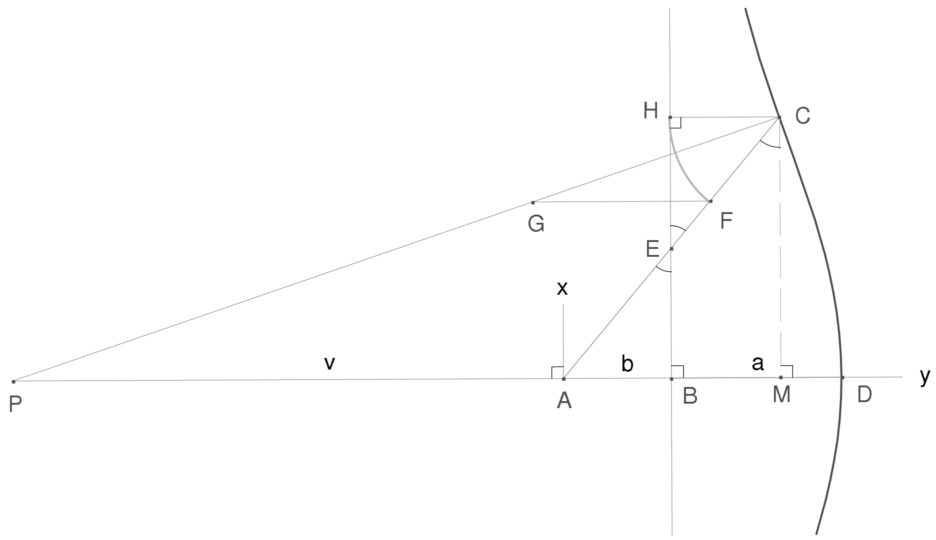


Figure 7.6 – *La normale à la Conchoïde de Nicodème vue par Descartes*

72. En toute rigueur, il faut également envisager le cas où E serait de l'autre côté de la règle, mais conformément à ses habitudes Descartes se mélange un peu les pieds entre des longueurs positives et des quantités qui peuvent être négatives. La véritable Conchoïde compte donc une « *deuxième* » branche, invisible sur cette figure mais non sur celle de Newton, empruntée à la page 51 de la traduction de Buffon de la *Méthode des fluxions et suites infinies*, dont A est un point double, ici non isolé.

Pour des raisons de typographie et de gain de place dans la page, Descartes - ou son dessinateur (Van Schooten) - a choisi de tourner d'un angle droit sa figure usuelle. Cela fait, l'auteur parle, fautivement, du point de la ligne BH par lequel la normale CG doit passer (sur l'illustration, BH est en effet la droite verticale de référence). Il s'agit naturellement, si notre interprétation est la bonne, de l'axe AD (l'essieu) et non de la règle BH. Pour notre part, nous avons remis la courbe dans sa forme usuelle chez Descartes (Ax verticale et Ay horizontale) et réintroduit les points classiques P (pied de la normale) et M (projection de C sur l'axe).

Le calcul préliminaire

Une équation de cette courbe traduit simplement l'égalité $EF = a = BD$. Rappelons que nous choisirons comme d'habitude A comme origine et ABD comme axe des ordonnées. Il suffit d'écrire

$$a^2 = CE^2 = \frac{CH^2}{AM^2}\,AC^2 = \frac{MB^2}{AM^2}\,AC^2 = \left(\frac{y-b}{y}\right)^2 (x^2+y^2)$$

c'est-à-dire[73] par exemple $F(x,y) = (x^2+y^2)\,(y-b)^2 - a^2y^2$, puis

$$R(y,v,s) = (2vy-p)\,(y-b)^2 - a^2y^2 = 2v\,y^3 - (4bv+p+a^2)\,y^2 + 2b\,(p+bv)\,y - pb^2$$

avec comme toujours $p = v^2 - s^2$.

Le calcul central

Comme dans les cas explicités par Descartes, nous allons chercher à réaliser une égalité de la forme

$$R(y,v,s) = (y-e)^2(y-f)$$

73. Cela équivaut encore à l'égalité $\rho^2 = \left(\frac{ay}{y-b}\right)^2$ qui nous sera utile par la suite (page 302). Il en résulte que la Conchoïde est ce que nous avons appelé une courbe paramétrable, en posant $z = y$ par exemple. Une variante (équation polaire) en est $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = a + \dfrac{b}{\sin\theta}$ ($0 < \theta < \pi$ pour la branche qui intéresse Descartes).

où e est la valeur effective de y (nous nous sommes déjà longuement expliqués sur le tour de passe-passe liant ces deux lettres). On est conduit au système des trois équations

$$4bv + p + a^2 = 2v\,(f + 2e), \quad b\,(p + bv) = ve\,(e + 2f), \quad pb^2 = 2ve^2 f.$$

La résolution en est simple par exemple en établissant les égalités successives

$$f = \frac{pb^2}{2ve^2}, \quad p = \frac{(e+b)\,ev}{b}, \quad v = \frac{a^2be}{(b-e)^3} = \frac{a^2by}{(b-y)^3}$$

dont seule la dernière nous intéresse.

La construction géométrique de Descartes

Relisons notre figure : comme nous y invite Descartes, nous avons construit F tel que $CF = CH = y - b$ et $FG = EA$ où H est la projection orthogonale de C sur la règle et FG est parallèle à l'axe des ordonnées [74]. Si P est le pied sur Ay de la normale en C, nous allons montrer que (C, G, P) sont alignés en prouvant que les triangles $[CAP]$ et $[CFG]$ sont homothétiques dans une homothétie de centre C.

Il est facile de voir que le triangle rectangle $[AEB]$ est homothétique du triangle $[CEH]$, lui-même homothétique au triangle $[ACM]$. La justification de l'affirmation cartésienne est alors tout à fait simple, et purement algébrique, sans apport de l'analyse robervalienne ou newtonienne ; il suffit en effet d'écrire

$$\frac{AP}{AC} = \frac{|v|}{AC} = \frac{a^2by}{(b-y)^3 AC} = \frac{CE^2.AB.AM}{CH^3 AC}$$

$$= \frac{CE.AB}{CH^2}\,\frac{CE.AM}{CH.AC} = \frac{AE}{CH} = \frac{FG}{FC}$$

et la réciproque du théorème de Thalès montre [75] que les triangles $[CAP]$ et $[CFG]$ sont effectivement homothétiques, ce qu'il fallait démontrer.

74. Il faudrait y ajouter des éléments de direction : F doit être entre C et E, et par ailleurs les quatre vecteurs $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont nécessairement positivement liés.

75. Même remarque que ci-dessus, mais à l'époque on regardait les figures. . .

Mais notre preuve possède encore une vertu qui est sans prix. En effet, une question très naturelle qui se pose concernant l'affirmation cartésienne est : **pourquoi Descartes a-t-il introduit les points** F **et** G ? Elle permet d'y répondre de manière très naturelle.

Il suffit de remarquer que toutes les égalités précédentes *sauf une* ne font intervenir que les points classiques dans toute étude de Conchoïde ; F et G n'interviennent qu'à la toute dernière extrémité. La réponse à l'origine de la « *divination* » est donc la suivante : après quelques calculs géométriques tournant autour de la figure de base [76] et celui du nombre v, Descartes trouve l'égalité $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AE}{CH}\cdot$ Pour obtenir un triangle homothétique du triangle cherché $[CAP]$, il suffit donc de prendre un point F sur CA par lequel la parallèle à l'axe coupe CP (encore inconnu) en G tel que $FG = AE$: il en résulte alors que FC vaut nécessairement CH et la construction est à la fois rendue rationnelle et validée par cette démarche.

Non seulement nous savons donc que ce qu'a écrit Descartes est juste, mais nous avons mis en évidence *pourquoi* il lui fallait introduire ces deux points dont la brusque apparition dans le texte posait, il faut bien le dire, un problème de *Deus ex machina*. On ne peut pas dire que l'auteur nous ait rien caché : simplement tout était là à qui savait gratter sous les apparences ; mais il faut bien avouer qu'une reconstitution comme celle qui est ici proposée n'avait *a priori* rien d'évident.

Avant de quitter ce développement, indiquons une autre preuve, sans doute un peu moins naturelle, de l'égalité fondamentale $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AE}{CH}$ à partir de la valeur de v. Les triangles homothétiques $\begin{bmatrix} HCE \\ BAE \end{bmatrix}$ donnent les égalités $EA = EC\,\dfrac{BA}{HC} = \dfrac{ab}{y-b}\cdot$ Par suite

$$\frac{AP}{AC} = \frac{|v|}{CA} = \frac{|v|}{CE+EA} = \frac{a^2by}{(y-b)^3}\,\frac{1}{a+ab/(y-b)} = \frac{ab}{(y-b)^2} = \frac{AE}{CH}\,.$$

On a ainsi obtenu une variante de la justification *a posteriori* de l'introduction des deux points F et G vérifiant les égalités $FG = AE$ et $FC = CH$, puis de la construction de *La Géométrie*.

76. Augmentée, il est vraie, du point M, dont on ne sait pourquoi Descartes (son dessinateur Van Schooten ?) l'a oublié.

La solution hollandaise de Van Schooten

Telle fut, croyons-nous, la démarche toute rectiligne de Descartes. Ses commentateurs de ce passage ne retrouveront pas cette simplicité forte, même s'il est très surprenant que ce petit exercice de géométrie plane des plus scolaires leur ait échappé.

Lisons pourtant par exemple la traduction latine de Van Schooten de 1649 (ou 1659) ; nous trouvons en page 49 une figure [77] différente de celle de Descartes et de la nôtre ; comme ici, M et P y sont, mais il a changé quelques symboles [78] et surtout introduit un parallélogramme $GLHI$ qui joue un rôle clé dans sa preuve. Les segments en pointillés sont ceux qu'il a ajoutés.

De plus, dans les notes N et O qu'il consacre à ce passage (*Exemplum constructionis hujus Problematis in Conchoide* dans les pages 249 à 250, puis 250 à 270), il utilise B comme pôle (d'où la modification de son nom en A) et trouve naturellement

$$(AP =)\, BP = |v| = b + \frac{c^2 b\,(y+b)}{y^3} = b + \frac{bc^2}{y^2} + \frac{b^2c^2}{y^3}$$

mais par un calcul extravagant de deux pages, bien plus lourd que le nôtre.

Cela dit, il a réussi ainsi à placer une somme en numérateur et non en dénominateur, ce qui conduit à décomposer v en trois parties : sa construction s'appuie complètement là-dessus, ce qui diffère essentiellement de notre tentative de restitution exposée plus haut.

C'est cette formulation qu'il va utiliser pour vérifier que la construction cartésienne est correcte. Fondamentalement, il est donc d'accord avec notre travail, mais au prix de certaines distorsions (déplacement de l'origine), d'efforts assez importants et surtout de l'introduction de points auxiliaires qui obscurcissent la présentation et dont l'origine est, encore aujourd'hui, intéressante à décortiquer.

Enfin il faut bien remarquer que, cette fois-ci, des raisons de l'introduction artificielle des points D et F (F et G chez Descartes) et surtout d'un parallélogramme ne peuvent se déduire facilement du déroulement de la preuve

77. Avec l'essieu vertical et la règle horizontale.
78. (A, B, D, E, F, G, H, a) sont devenus (G, A, E, L, D, F, B, c).

ci-dessous. Sur ce point, Van Schooten s'est montré aussi discret que son maître sur les moyens employés : seule la fin lui importait !

Voici toutefois une piste éventuelle concernant l'invention du point H. Au départ, il y a l'idée d'inventer un point I tel que GI et IP soient respectivement égaux à $\frac{bc^2}{y^2}$ et $\frac{b^2c^2}{y^3}\cdot$ Par ailleurs Van Schooten aurait, supposant « *la chose déjà faite* », aussi introduit, par exemple pour imiter Descartes avec son segment DF, le point H intersection de CP avec la parallèle à la règle issue de L.

Deux courtes lignes de calcul montrent alors que

$$\frac{GP}{LH} = \frac{CG}{CL} = \frac{y+b}{y} = \frac{GP}{GI}$$

d'où $LH = GI$ et le parallélogramme.

Cela dit, cette construction n'explique pas pourquoi l'on doit donner à CD et à DF les valeurs CB et LG, qui ne sont justifiables *a posteriori* que si l'on obtient une relation équivalente à

$$\frac{GP}{GC} = \frac{GL}{CB}$$

$\Big($traduction dans ses notations de l'égalité $\frac{AP}{AC} = \frac{AE}{CH}\Big)$.

C'est possible directement, comme nous l'avons vu plus haut, donc sans intervention explicite du parallélogramme : mais si Van Schooten y était arrivé, il n'aurait évidemment pas eu besoin de son *Deus ex machina* un peu étonnant. Il faut d'ailleurs remarquer qu'à vrai dire sa seule utilité dans cette affaire est à donner une construction géométrique du point I qui explicite, de manière complètement visuelle, pourrait-on dire, la décomposition du nombre v en une somme de trois termes, et rien de plus : c'est simplement une facilité.

Il est maintenant nécessaire, pour des raisons d'honnêteté intellectuelle basique, de regarder de près sa figure et le détail de ses calculs.

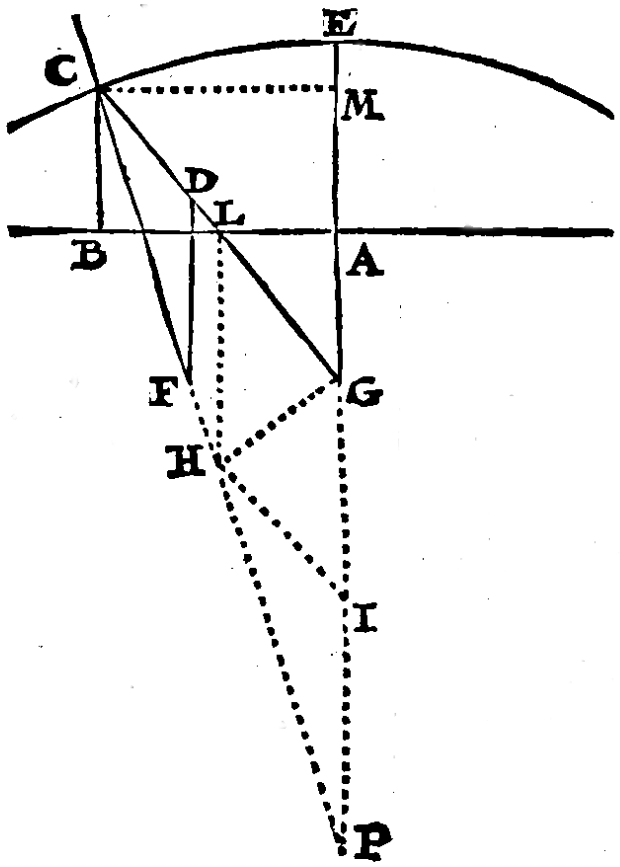


Figure 7.7 – *La figure de la Conchoïde vue par Van Schooten*

L'idée est d'introduire, grâce au parallélogramme $GLHI$, un point I tel que $GI = \dfrac{bc^2}{y^2}$ et $IP = \dfrac{b^2c^2}{y^3}$ ce qui donnera bien $AP = |v|$. Voici le détail de ses calculs [79], respectés à la lettre [80], dont la clef est l'égalité $\dfrac{GP}{GC} = \dfrac{GL}{CB}$

a) Les triangles homothétiques $\begin{bmatrix} CBL \\ GAL \end{bmatrix}$ donnent

$$DF = LG = LC\,\frac{GA}{CB} = c\,\frac{b}{y} = \frac{bc}{y}\cdot$$

79. Rappelons les égalités $AE = LC = c$, $BC = DC = y$ (ancien $y - b$) et $DF = LG$.

80. Même l'ordre et les noms des couples de triangles homothétiques que nous citons sont expressément tirés de son texte.

b) Les triangles homothétiques $\begin{bmatrix} CDF \\ CLH \end{bmatrix}$ donnent

$$GI = LH = DF\,\frac{LC}{DC} = \frac{bc}{y}\,\frac{c}{y} = \frac{bc^2}{y^2}\,\cdot$$

c) Les triangles homothétiques $\begin{bmatrix} CDF \\ HIP \end{bmatrix}$ donnent

$$IP = DF\,\frac{IH}{DC} = DF\,\frac{GL}{y} = \frac{DF^2}{y} = \frac{b^2c^2}{y^3}\,\cdot$$

Il conclut : « *Quod erat faciendum* ».

Il rend hommage dans la suite de ce texte à une intervention de Huygens le jeune (*ab acutissimo nostro Hugenio primùm observatum*, p. 253) sur ces calculs, qui établit la similitude des triangles $\begin{bmatrix} GAL \\ LGH \end{bmatrix}$ en écrivant

$$\frac{AG}{LG} = \frac{b}{bc/y} = \frac{bc/y}{bc^2/y^2} = \frac{LG}{LH} = \frac{GL}{HL}$$

ce qui montre que l'angle $\widehat{LGH}$ est droit comme $\widehat{GAL}$. D'où la construction plus simple que celle de Descartes [81]

« *Si* CG *coupe* AB *en* L *et si* LH *est parallèle à* AG *tel que* GH *soit perpendiculaire à* CG, *alors la droite cherchée est* HC. »

En conclusion, la preuve de Van Schooten est tout à fait satisfaisante du point de vue de la rigueur, mais ce n'est qu'une simple *vérification*. C'est aussi le cas de la nôtre, mais cette dernière ne demande pas de contorsions comme le changement de pôle et l'introduction, fort ingénieuse mais très peu naturelle, d'un parallélogramme auxiliaire.

Rappelons aussi et surtout que l'une de ces deux démonstrations engendre une raison tout à fait plausible de l'introduction des éléments décisifs de la figure, l'autre non.

81. Et largement utilisée depuis, puisque résultant du fait que des courbes d'équations polaires $\rho = f(\theta)$ et $\rho = f(\theta) + c$ ont même sous-normale $\dfrac{d\rho}{d\theta}\cdot$

Dans la suite de sa très longue Note O, il rappelle le calcul *De maximis et Minimis* de Fermat (p. 253), l'applique au problème de la Conchoïde et retrouve la valeur précédente de v. Après plusieurs pages de discussion sur cette Méthode [82], il donne par exemple une construction directe de la tangente [83] et recherche une factorisation par $(y-e)^3$ qui fournisse les deux points d'inflexion de la courbe [84] dont Descartes n'avait pas paru se soucier [85].

Puis, dans les pages 264-270, il reprend le contenu [86] des parties de la lettre déjà citée de Descartes à Mersenne du 23 août 1638 (AT II CXXXVIII, p. 309) consacrées aux tangentes à la Roulette et autres Trochoïdes, obtenues cette fois-ci, comme on le sait, par un procédé cinématique et plus ou moins infinitésimal avant l'heure [87].

Signalons enfin que, dans son cours posthume de géométrie cartésienne [88] le Révérend Père Claude Rabuel (1669-1728) du Grand Collège de la Trinité de Lyon [89] calcule l'équation de la Conchoïde en page 101 ; il y revient en pages 314 et 333, dans lesquelles il obtient le même v que Van Schooten puis recopie sa solution (sans mentionner la remarque de Huygens) [90]. Sans doute cette preuve a-t-elle été religieusement reprise par nombre d'écoliers respectueux des paroles du Maître !

82. Toujours avec références élogieuses à Christiaan Huygens puis à Jean Hudde (1628-1704) et Henri Van Heuraet (1633-1660), qui l'ont peut-être - sans doute - aidé à mettre au point sa démonstration.

83. Si N est la projection orthogonale sur CLG de l'intersection de LH avec CM, alors NM est parallèle à la tangente en C car perpendiculaire à CH.

84. Pages 258-259.

85. Ils n'apparaissent d'ailleurs pas sur sa figure, même si cette dernière a été dessinée par Van Schooten lui-même. Cela dit ce dernier, dans la page 258 de son commentaire, les mettra en évidence dans sa propre illustration. Quant à la figure de Descartes, qui semble incomplète, on doit quand même noter que le dessinateur a pris pour a et b des valeurs approximativement dans le rapport 14/17, et que ses abscisses extrémales sont de l'ordre de 25, ce qui est pratiquement la valeur de celle des points d'inflexion ; à strictement parler, il est donc normal que l'on n'y observe pas de rupture de concavité.

86. Figures comprises.

87. Il y a découvert la notion de *centre instantané de rotation* dans un mouvement plan sur plan particulier.

88. *Commentaires sur la géométrie de M. Descartes*, chez Marcellin Duplain à Lyon, publiées en 1730.

89. Aujourd'hui lycée Ampère.

90. Voir notamment ses figures 43, p. 104 bis, et 155, p. 320 bis.

Zeuthen et l'« admirable divination »

Paul Tannery, en page 441 de AT VI, a donné un grand poids à l'hypothèse d'une intervention du calcul différentiel avant la lettre dans la construction de Descartes à la Conchoïde en citant élogieusement la *remarquable divination* de l'historien des sciences Danois Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920) qui, en 1900, aux pages 49-58 du volume 11 des *Nyt Tidsskrift for Matematik* de Copenhague [91], a développé une justification [92] *a posteriori* de l'introduction des points F et G définis par les deux conditions, *a priori* des plus artificielles, $CF = CH$ et $FG = AE$. Le texte de Tannery étant pour le moins extrêmement elliptique, nous en donnons ici des clefs très plausibles.

L'idée fondamentale est encore d'établir la relation

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AE}{CH}$$

entre les points de la figure cartésienne (P ajouté naturellement). Il ne procède pas du tout par le calcul préliminaire de v comme nous l'avons fait plus haut [93]. Son point de départ est une remarque de géométrie différentielle, assez facile à prouver [94], qui assure que, pour une courbe définie en coordonnées polaires par $\overrightarrow{AC} = \rho\,\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est unitaire, un vecteur normal à la

91. Alors dirigé par Christian Juel et V. Trier, ce qui explique la présence incongrue de ces deux noms dans la note d'AT VI.

92. Gino Loria (1862-1954), dans un article de janvier 1937 *Descartes géomètre* de la *Revue de Métaphysique et de Morale, écrivait p. 205 que « La remarquable construction qu'il expose ensuite pour la normale à la conchoïde de Nicomède n'a pa été tirée des longs calculs auxquels mène sa méthode »*. Il ajoute en note : « *Il est bien plus probable que cette construction a été obtenue par les considérations cinématiques imaginées par Zeuthen* [A.-T., VI, 441], *dont l'analogie est évidente avec celles qui amenèrent Descartes à la construction des normales aux roulettes* [A.-T., II, 368] ». À la page 211, il écrit comme Milhaud - sans le citer - que la lettre du 23 août 1638 étudiée plus bas [page 310] contient « *un procédé extrêmement remarquable pour construire la normale à toute sorte de roulettes, procédé de nature cinématique qui n'a aucun rapport à la méthode des normales exposée dans* La Géométrie ». S'il a raison sur le dernier point, il est permis de douter fortement du précédent.

93. Ainsi bien entendu que Van Schooten en 1649, même si les origines diffèrent.

94. Avec des notations classiques du *repère mobile*, le fait que $d\,(\rho\overrightarrow{u}) = (d\rho)\,\overrightarrow{u} + (\rho\, d\theta)\overrightarrow{w}$ est tangent à la courbe en C implique que $(d\rho)\,\overrightarrow{w} - (\rho\, d\theta)\,\overrightarrow{u}$ y est normal. Il suffit de calculer $dy = d(\rho \sin\theta)$ et de remplacer ensuite $(\cos\theta)\,\overrightarrow{w}$ par $\overrightarrow{\jmath} - (\sin\theta)\,\overrightarrow{u}$ pour conclure. Un autre vecteur normal est aussi $(d\rho)\,\overrightarrow{\imath} - (dx)\,\overrightarrow{u}$.

courbe en C est proportionnel à

$$(dy)\,\overrightarrow{u} - (d\rho)\,\overrightarrow{\jmath}.$$

Faisant l'hypothèse implicite que Descartes ait connu cette relation, disposant des directions des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\jmath}$, il ne lui reste plus qu'à déterminer des longueurs proportionnelles à $|dy| = |d(CH)|$ et $|d\rho| = |d(AC)|$ pour trouver un triangle semblable à CAP et enfin le point P, c'est-à-dire la normale.

Pour cela, Zeuthen part de l'équation de la Conchoïde mise sous la forme remarquable $\rho = \dfrac{ay}{y-b}\cdot$ Cela peut encore s'écrire

$$AC \cdot CH = \rho\,(y-b) = ay = EC \cdot AM = EC \cdot (AB + CH)$$

soit encore $(AC - EC)\cdot CH = EC \cdot AB$. Comme $EC = a$ et $AB = b$ sont des constantes, différentier cette égalité conduit aux relations

$$0 = CH \cdot d(AC) + (AC - EC)\cdot d(CH) = CH \cdot d(AC) + AE \cdot d(CH)$$

puis $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AE}{CH}\cdot$ Réagissant à cette égalité comme nous l'avons fait plus haut, Zeuthen eut très certainement l'idée qu'alors Descartes fut conduit à introduire un point F et un point G tels que $FC = CH$, $FG = AE$ et que les triangles $\begin{bmatrix} CFG \\ CAP \end{bmatrix}$ soient semblables.

Que penser de l'idée de Zeuthen validée par Tannery ?

On sait que Roberval, parmi d'autres, avait l'habitude de trouver des tangentes à des courbes par des moyens cinématiques, en décomposant un mouvement en la somme de deux autres plus simples, dont les effets s'ajoutaient.

Cela marchait notamment très bien pour les coniques, mais la technique est discutable même si l'on ne s'en est aperçu que plus tard [95]. Il est clair que

95. Jean Marie Constant Duhamel par exemple contestera certains points de cette méthode dans une note publiée dans les *Mémoires des savants étrangers* de l'Académie des Sciences (1834, tome V, p. 257 ; voir aussi p. 308).

Zeuthen est parti d'idées analogues, et sa démarche supposée mérite donc d'être explicitée plus en détail.

Pour que sa preuve rende compte avec suffisamment de vraisemblance de la démarche cartésienne, comme Paul Tannery et, plus tard, Gino Loria puis Pierre Costabel semblaient le croire, il faut remplir trois conditions qui apparaissent aujourd'hui comme faciles ou même très simples à dominer, grâce à Newton et Leibniz, mais à l'époque cartésienne bien difficiles à maîtriser, et surtout à concevoir

- Savoir que la différentielle d'une constante est nulle ;
- Savoir différentier un produit ;
- Connaître les coordonnées d'un vecteur normal dans le repère cartésien normé $\left(C\,;\ \frac{1}{\|\overrightarrow{CA}\|}\,\overrightarrow{CA},\ \frac{1}{\|\overrightarrow{CH}\|}\,\overrightarrow{CH}\right)$.

Si l'on donne à une différentielle dx son sens grossier d'accroissement, alors le premier point est évident et le second pas très difficile à admettre [96]. On pourrait opérer ainsi de manière spécifiquement intuitive, au sens d'une vérité qui finit par « sauter aux yeux » : cela ne saurait étonner chez un Descartes, qui a toujours pensé que les outils fondamentaux étaient la démonstration et son appui sur des données de départ « visiblement » assurées.

Reste le troisième ; en aucun cas bien sûr il n'aurait pu maîtriser la preuve moderne donnée ci-dessus en note, mais la figure que voici peut fournir une amorce de justification intuitive [97]

96. Quoique Leibniz, tout au début de sa construction du calcul différentiel, ait un instant achoppé sur cette difficulté.

97. Nous avons notamment suivi ici des raisonnements et approximations normaux pour l'époque immédiatement post-cartésienne, en nous appuyant par exemple sur l'ouvrage *La méthode des fluxions et des suites infinies* de Newton, écrit en 1671 et publié en 1736 ; voir notamment le Problème IV, paragraphe XLIX en page 60, et aussi le paragraphe XI de la page 140, dans la traduction par Buffon de 1740. On y trouvera un triangle infiniment étroit tel que C^*AJ^*, à la fois isocèle en A et rectangle en J^*.

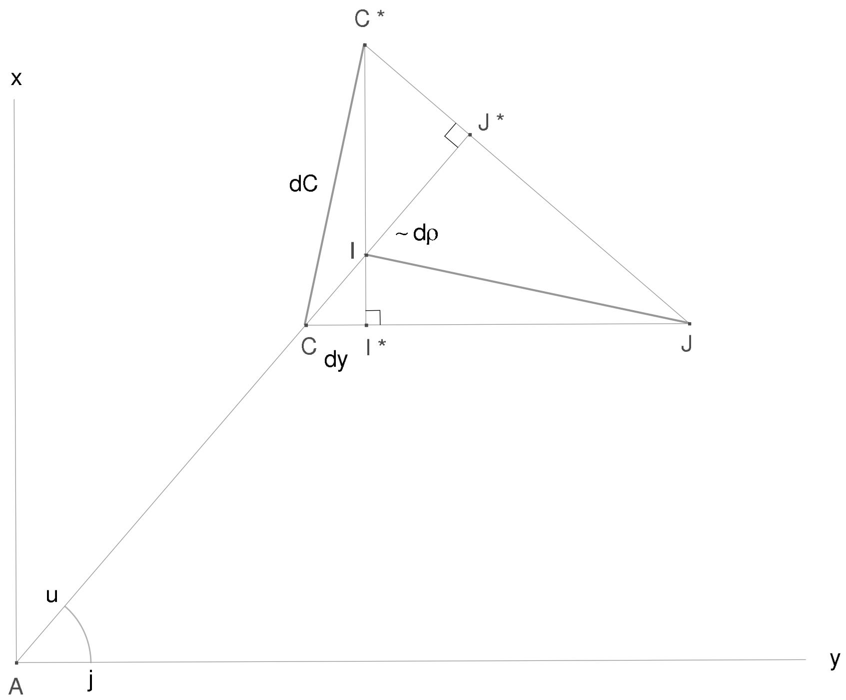


FIGURE 7.8 – *Une* « preuve physicienne » *de la caractérisation des normales*

Ici $\overrightarrow{CC^*}$ est le vecteur dC, accroissement du vecteur $\overrightarrow{AC}$, le nombre CI^* est celui de son ordonnée dy et, conformément à un usage constant dans toutes les démonstrations analogues [98], CJ^* est équivalent à l'accroissement $d\rho$ de la longueur de AC.

Le point I de la figure est clairement l'orthocentre du triangle CJC^* ; on dispose en outre [99] d'égalités de la forme

$$CI^* = k\ CI, \qquad CJ^* = k\ CJ.$$

Si l'on remarque la direction de $\overrightarrow{CC^*}$ est de plus en plus voisine de celle de la tangente en C lorsque $\|dC\|$ tend vers 0, il en résulte que celle de la normale

98. Appelées parfois, non sans un petit sourire, *démonstrations à la physicienne* par les mathématiciens ; elles sont parfois très utiles pour débroussailler une situation complexe. Leur usage n'est d'ailleurs pas mort de nos jours et participe encore de la manipulation *avec les mains* de concepts abstraits un peu difficiles pour des débutants ou des expérimentateurs pressés.

99. Calculer par exemple la puissance du point C par rapport au cercle de diamètre IJ.

est très proche de celle de

$$k\,\overrightarrow{JI} = k\left(\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CJ}\right) = k\left((CI)\,\overrightarrow{u} - (CJ)\,\overrightarrow{\jmath}\right) = CI^*\,\overrightarrow{u} - CJ^*\,\overrightarrow{\jmath}$$

ce qui diffère très peu de $(dy)\,\overrightarrow{u} - (d\rho)\,\overrightarrow{\jmath}$ et rend plausible la formule utilisée par Zeuthen en 1900.

Il n'est donc pas absolument impossible qu'un mathématicien du début du dix-septième siècle soit tombé par hasard sur cette proposition de géométrie différentielle, mais cela reste quand même très peu probable : la *divination* mise en valeur dans Adam Tannery nous paraît vraiment peu justifiable.

Que penser de la normale à la Conchoïde ?

Le texte énigmatique de Descartes pose deux questions : comment justifier sa construction de la normale, et découvrir comment il y est parvenu. Pour y répondre, nous avons développé ici trois voies.

1) Une interprétation actuelle, inédite, présentée page 294.

2) La solution de Van Schooten (1649) présentée page 296.

3) La solution de Zeuthen (1900) présentée page 301.

Les deux premières répondent à la première question par le calcul de v et la considération de triangles homothétiques, la troisième est basée sur des infiniment petits. Les trois sont satisfaisantes, mais la première est plus courte (moins d'une page), respecte la figure de Descartes [100] et semble plus naturelle que les deux autres.

La réponse à la seconde question n'est même pas pas évoquée dans les deux dernières tentatives. Il n'est toutefois pas exclu que ces dernières puissent, chacune, être plus ou moins détournées de façon à permettre une preuve de l'égalité décisive $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AE}{CH}$ qui permet de comprendre, selon nous, d'où est sortie l'intuition cartésienne, mais c'est loin d'être clair.

Peut-être ce travail conduira-t-il à la découverte d'autres pistes : on ne peut naturellement que le souhaiter.

100. Bien entendu à l'exception du *lapsus calami* sur la droite devant recevoir le point P.

Les arguments pour une intuition différentielle

Nous avons déjà étudié l'intervention lourde de Tannery justifiant une intuition de Zeuthen dont nous venons de dire qu'elle appelle aux plus grandes réserves. En dehors de cela, le plus important de tous les éléments tendant à faire de Descartes un précurseur de Newton, sur ce point ou d'autres, est clairement la lettre déjà citée du 11 juin 1640 à Mersenne où il déclare *j'avais divers moyens pour les tangentes, que je ne leur avais point voulu dire* (page 268), et les déclarations de très nombreux commentateurs, parmi lesquels nous ne retiendrons ici que Milhaud, dont le nom fait toujours autorité, même s'il ne fait pas allusion à la Conchoïde à la différence de Zeuthen.

L'opinion d'un expert : Gaston Milhaud (1858-1918)

Dans son célèbre volume posthume *Descartes savant* [101], le philosophe Gaston Milhaud, très frotté de mathématiques [102], se pose une question fondamentale qui est au fond celle qui sous-tend toute notre enquête

« *Faut-il pourtant aller jusqu'à dire que la* Géométrie *de Descartes n'est en somme qu'une algèbre ? On a bien fait d'insister sur l'inexactitude de la vieille interprétation selon laquelle la* Géométrie *de Descartes consistait uniquement dans l'application de l'algèbre aux courbes géométriques. Mais l'exagération contraire ne serait pas exacte non plus. On sent à la lecture des deux premiers livres que les courbes intéressent aussi Descartes pour elles-mêmes. – Quand il ne s'agit pas d'une application concrète, à l'optique par exemple, comment comprendre sans cela le soin qu'il apporte à résoudre en toute sa généralité un problème comme celui des tangentes ?* [...] *on sent bien que la question purement théorique des tangentes aux courbes le passionne par elle-même. Et il serait difficile de voir là la préoccupation exclusive d'une construction plus précise des racines des équations dépendant de ces courbes.* » [page 145].

101. Recueil d'articles paru en 1921 chez Félix Alcan.

102. Nîmois, ami et continuateur de Tannery, à sa sortie de l'École normale supérieure (promotion 1878) il fut nommé professeur de mathématiques spéciales au Havre, puis à Montpellier, avant de devenir en 1894 professeur d'université en philosophie des sciences dans cette dernière ville et enfin à la Sorbonne en 1909.

Ce premier texte de Milhaud appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord des remarques que l'on pourrait presque dire de style si elles ne nous éclairaient pas indirectement sur la démarche de l'auteur : le fait de poser aussi nettement une telle question n'est pas anodin, cela veut dire - même si la réponse est finalement négative pour lui - que « *la question mérite d'être posée* ». Ce que nous avons donc fait avec lui...

Par ailleurs la présence, à deux endroits, de facilités d'écriture telles que « *on sent à la lecture* [...] *on sent bien* » choque aujourd'hui. Plutôt que d'émotions, il vaut mieux exprimer des critiques basées sur les textes précis : c'est heureusement ce qu'il fera quelques pages plus loin.

La dernière phrase de notre citation est doublement critiquable : « *une construction plus précise* » est une expression assez malheureuse, Descartes se moquant bien de la précision. Ses techniques sont essentiellement théoriques, et non pratiques, comme le prouve une phrase assez ironique de l'avant-dernière page de *La Géométrie* : « *cette construction ne soit pas commode pour la pratique* », et l'appel condescendant à la mise au point de « *mille sortes* » d'autres « *règles, à l'imitation de celle-ci* ».

L'erreur de Milhaud est bien ici en évidence : Descartes ne cherchait pas à établir des recettes pour marchands et/ou ingénieurs militaires, mais à constituer **un corpus théorique destiné à régler une fois pour toutes l'un des problèmes fondamentaux des mathématiques** [103], à ses yeux le dernier qui restait à maîtriser : sa « *préoccupation* » était autrement haute. Voilà donc expliqué, croyons-nous, « *le soin qu'il apporte* » à cette question qui occupe tant de place dans ce livre.

Passons maintenant à deux paragraphes où Gaston Milhaud entre heureusement dans des explications techniques précises :

« *Ce qu'il y avait alors de plus nouveau* [lors de l'hiver 1619-1620] *et de plus intéressant, c'est l'idée même qu'il se faisait de la tangente. Tandis que chez les Grecs celle-ci restait la droite n'ayant qu'un point commun avec la courbe, elle devenait pour Descartes la limite de la sécante tournant autour*

103. Résoudre les équations algébriques de tout degré.

d'un premier point de rencontre avec la courbe[104] *de telle manière qu'un second vînt se confondre avec celui-là* » [page 80].

Et encore

« *La droite* EB *n'est plus la grande ligne menée de* E *à sa courbe, mais la limite d'une sécante dont deux points de rencontre avec la courbe tendent à se confondre* » [page154].

Dans chacun de ces deux textes, il prend comme point de départ de ces affirmations, non la normale à la Conchoïde - qu'il ne citera jamais -, mais un très important envoi de Descartes à Hardy en juin 1638 (AT II CXXV p. 170). Nous reproduisons ci-dessous la figure l'accompagnant et un extrait fondamental de la lettre.

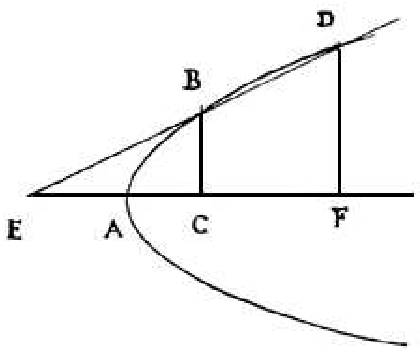


FIGURE 7.9 – *Une corde...*

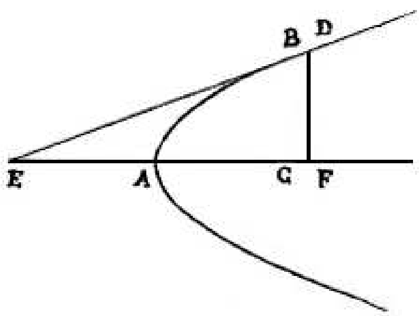


FIGURE 7.10 – ... *et une tangente*

« *Maintenant pour appliquer tout cecy à l'invention de la tangente (ou, ce qui est le même, de la plus grande), il faut seulement considérer que, lorsque*

104. En 1860 déjà, Jean Marie Constant Duhamel (1797-1872), professeur à l'École polytechnique, écrivait à la page 744 d'un compte-rendu à l'Académie des Sciences [volume 50] : « *Le point autour duquel Descartes fait d'abord tourner la sécante, est celui où la tangente rencontre l'axe des abscisses. Mais quelques jours après avoir communiqué cette solution au père Mersenne* [lettre du 3 mai 1638, AT II CXII p. 127] *il lui en envoie une autre* [dans un post-scriptum à cette même lettre, p. 132] *où il considère la tangente comme la limite d'une sécante qui passe constamment par le point de la courbe où doit avoir lieu le contact, et par un second point de la même courbe, qui se rapproche indéfiniment du premier* ». Il récidivera dans un *Mémoire de l'Académie des Sciences* de 1894, tome 32, page 269. On voit que la myopie sur ce point de lecteurs trop savants est donc très ancienne.

EB est la tangente, la ligne DF n'est qu'une avec BC, et toutefois qu'elle doit être cherchée par le même calcul que je viens de mettre, en supposant seulement la proportion d'égalité, au lieu de celle que j'ai nommée de g à h ; **à cause que DF est rendue égale à BC par EB, en tant qu'elle est la tangente** *(au moins lorsqu'elle l'est), en même façon qu'elle est rendue double, ou triple etc., de BC, par la même EB, en tant qu'elle couppe la courbe en tel ou tel point, lorsqu'elle l'y couppe.* »

Comment pourrait-on y déchiffrer que l'on a fait tendre D vers B et F vers C ? Le problème est simple, et nous avons déjà expliqué (page 278) pourquoi il ne fallait pas, pour un moderne, lire trop vite un texte comme celui-là pour croire y retrouver des concepts dont il a été abreuvé dès l'adolescence.

Jamais, chez Descartes, on ne relève de terme ayant une connotation cinématique déclarée (tendre vers, avoir pour limite, s'approcher indéfiniment de *etc.*) à propos de normale ou de tangente. Tout au plus, dans sa justification de sa construction des normales [105], a-t-il employé la formule « *plus ces deux points* [...] *sont proches l'un de l'autre* », mais c'était juste pour en tirer une conséquence inoubliable : « *moins il y a de différence entre ces deux racines ; & enfin elles sont entièrement égales, s'ils sont tous deux joints en un, c'est-à-dire si le cercle* [...] *y touche la courbe* [...] *sans la coupper* ».

Dans cette lettre à Hardy comme dans le passage que nous venons de rappeler, ou dans la lettre AT II CXII p. 127, où Descartes écrivant à Mersenne le 3 mai 1638 emploie les termes « *il n'y a rien qui détermine les deux points* B *et* O *à s'assembler* », le respect absolu dû au texte permet peut-être d'imaginer, mais sûrement pas d'affirmer, qu'il y a là nécessairement une indication d'un mouvement quelconque. On sait qu'on doit y voir seulement une constatation du type : *à certains moments, nous voyons deux objets distincts, et il n'y en a plus qu'un s'ils sont confondus* [106], mais sans imaginer ou préciser comment passer du premier cas à l'autre.

L'intuition de Milhaud, rompu par son précédent métier à la manipulation du calcul différentiel et intégral, nous paraît donc devoir être rejetée. À sa décharge partielle, on peut seulement ajouter que la figure que nous avons reproduite à cet effet pourrait laisser entendre que l'un des points s'est déplacé

105. Page 346 des *Essais*, 418 dans AT VI.
106. Rappelons l'exemple irréfutable de deux points variables sur deux branches différentes d'une même hyperbole.

vers l'autre ; mais même cette interprétation est sujette à réserves puisque, si on la regarde de près, il semblerait que *les deux points* aient bougé pour se rejoindre, et la tangente vue comme limite d'une corde serait, si l'on suivait notre expert, devenue un concept encore plus complexe [107].

Les lettres de 1638 et 1639

Pour en finir - provisoirement - avec une éventuelle présence d'infiniment petits chez Descartes, nous renvoyons à ses lettres fondamentales écrites au milieu de cette féconde année 1638, dont celle à Hardy évoquée plus haut, ainsi bien entendu - et peut-être même surtout - à celle de 20 février 1639, déjà citée, adressée à De Beaune [108]. Elles prouvent incontestablement un intérêt pour ce que nous appelons aujourd'hui l'analyse moderne, disons en gros le calcul différentiel [109]. Il y prouve aussi des compétences solides en ce domaine. Tout cela demande des lectures très précises de ces textes.

Notre chapitre sur sa *Correspondance* revient très longuement sur toutes ces questions, apparemment évidemment connexes à son travail sur les normales, mais - comme nous l'y montrons - limitées à certains aspects assez élémentaires et peu susceptibles d'être exhibées comme des succès frontaux de l'application de sa méthode. Indiquons simplement tout de suite un résultat concernant les tangentes : si E est le pied de la tangente en C sur l'axe Bx d'une courbe définie par $y^m = p\,x$ avec m entier, il est lié à la projection D de C sur cet axe par l'égalité [110] $BE = (m-1)\,BD$; les autres résultats des pages 248-249 de AT II au sujet de ces courbes concernent le calcul intégral.

---

107. Vers les années 1950-1960, le subtil géomètre Georges Bouligand enseignait encore à la Sorbonne ses recherches sur le *contingent* et le *paratingent*, nécessaires pour pouvoir rendre compte de ces différentes formes de limites.
108. AT II CLVI, page 514. Voir également une somme de série présente dans les *Excerpta*.
109. Et même intégral : Milhaud signale en effet en page 164 quelques lignes très importantes sur une question portant sur les paraboles généralisées que nous définirions aujourd'hui, avec Tannery, par la formule $y^m = px$; il confond malheureusement les années 1632 et 1638, et le 27 juillet avec le 13.
110. Pour $m = 2$ (parabole usuelle) c'était connu depuis l'Antiquité. Pour le cas général, ce théorème a selon toute vraisemblance été démontré en adaptant la méthode de Fermat aux préoccupations cartésiennes.

Pourquoi préférer les normales aux tangentes ?

La technique cartésienne de recherche d'un cercle tangent (et donc de la normale) en un point C d'ordonnée y d'une courbe algébrique est évidemment parfaitement adaptable à celle d'une droite tangente. Il suffit par exemple de noter t l'ordonnée du pied T de la tangente sur l'axe des ordonnées, et d'éliminer x entre $F(x,y)=0$ et $y-t=k\,x$ où k est la pente de la droite TC en posant

$$S(y,t,k)=F\Big(\frac{y-t}{k},y\Big)$$

ou n'importe quel polynôme proportionnel à celui-là.

Une fois ce calcul préliminaire effectué, il ne reste plus qu'à rechercher une divisibilité de $S(y,t,k)$ par un facteur quadratique « parfait » $(y-e)^2$; l'essentiel est d'obtenir t, le nombre k étant accessoire : il faut tout de même qu'il ne soit pas nul [111].

Le tout est même presque trivial pour le cas où $F(x,y)=x-f(y)$; on est ici très proche de la façon de faire actuelle, pour laquelle la réponse est $t=y-\dfrac{f(y)}{f'(y)}$ alors que le pied de la normale est donné par $v=y+f(y)\,f'(y)$ puisque $(y-t)\,(y-v)=-x^2=-f^2(y)$.

Donnons un exemple : celui d'une Parabole Cartésienne dont nous connaissons la complexité [112] d'équation $F(x,y)=x^3-xy+x+1$ au point d'ordonnée $y=1$, dont nous savons qu'il n'en existe qu'un, d'abscisse $x=-1$. Ici $S(y,t,k)=(y-t)^3-k^2(y-t)\,(y-1)+k^3$ que nous cherchons à factoriser par $(y-1)^2$; nécessairement $0=S(1,t,k)=(1-t)^3+k^3$, soit $k=t-1$ et $S(y,t,t-1)=y^3-(t^2+t+1)\,y^2+(t^3+2t^2-t+1)\,y-t^3-t^2+2t-1$, ce qui se factorise normalement en $S=(y-1)\,(y^2-(t^2+t)\,y+t^3+t^2-2t+1)$. Il suffit que 1 soit également racine du second facteur, c'est-à-dire

$$0=t^3-3t+2=(t+2)\,(t-1)^2.$$

111. L'adaptation de tout cela aux courbes paramétrables est évidente.
112. Voir page 275.

La valeur $t = 1$ étant à écarter puisque k ne peut pas être nul[113], il reste $t = -2$ (d'où $k = -3$) et $S = (y-1)^3$,tout à fait en accord avec les valeurs déterminées plus haut comme $v = \frac{4}{3} \cdot$ Les calculs sont donc nettement plus simples[114]. Pourtant Descartes ne semble même pas y avoir pensé à ce procédé[115]. Pour nous, modernes, la question de l'origine de cet aveuglement est forte ; eût-il été plus clairvoyant, son influence sur le problème des tangentes aurait dépassé celle de Fermat et marqué l'histoire.

En réalité cette question n'est qu'un corollaire de la suivante : pourquoi, pour résoudre une équation $\varphi(y) = 0$, Descartes ne coupe-t-il pas tout simplement le graphe de la courbe d'équation $x = \varphi(y)$ par la droite d'équation $x = 0$, au lieu de choisir les intersections d'une courbe générale par un cercle, procédé théoriquement efficace[116] mais évidemment d'une lourdeur exceptionnelle ? Ce problème est longuement discuté à la fin de l'étude du Livre Troisième de *La Géométrie*, au moment de juger du procédé cartésien dans sa globalité, à laquelle nous renvoyons bien naturellement.

Tangentes et normales dans l'Antiquité

La fin de ce chapitre est exclusivement consacrée, *pour comparaisons avec le travail cartésien*, aux points cruciaux des définitions et constructions des tangentes chez quatre mathématiciens qui y apportèrent chacun une contribution essentielle : les maîtres grecs Euclide, Archimède et Apollonius, ainsi surtout que le grand Pierre Fermat qui élabora, dans le premier tiers du dix-septième siècle et indépendamment de Descartes, une méthode presque aussi alambiquée que la sienne (mais très différente).

Si les conceptions et les résultats de Fermat furent donc sans influence aucune sur ceux de son rival, le corpus antique eut au contraire une grande importance pour l'un comme pour l'autre, et notamment sur le contenu de la fin du Livre Second de *La Géométrie*.

113. On pourra remarquer que l'égalité incontestable $S(1,1,0) = 0$ ne conduit pas à une tangente effective : là aussi, cette méthode proche de celle de Descartes demande de prendre des précautions élémentaires.
114. Sur cet exemple, échanger x et y trivialiserait d'ailleurs encore davantage le problème.
115. Sauf peut-être dans l'une des lettres à Mersenne de juillet 1638.
116. En tout cas jusqu'au sixième degré inclus : voir donc le chapitre 11.

Les pages suivantes prouveront, pensons-nous, qu'en fait Fermat, qui *a priori* nous semblerait plus moderne que son contemporain par son invention de l'*adégalisation* (selon certains préfiguration du calcul différentiel) est plutôt dans la ligne droite ligne d'une adaptation des cheminements anciens, alors que nous avons vu combien Descartes avait su rompre des nœuds gordiens dans un processus tout à fait original car sans aucun précédent.

Nous savons par *La Géométrie* que Descartes connaissait Euclide et Apollonius [117], ainsi que la spirale d'Archimède [118].

D'après les ouvrages aujourd'hui en notre possession, ces trois auteurs ont écrit sur les tangentes, respectivement au cercle, aux coniques et à la spirale éponyme ; le second a longuement étudié les normales aux coniques dans son livre V de ses *Coniques*, dans l'esprit d'une recherche *De Maximis et Minimis*. Toutefois ce dernier ouvrage n'a pu être connu de Descartes, sauf par une brévissimme ligne de Pappus dans son Livre VII (p. 507 du second volume de la traduction de Paul Ver Eecke) et peut-être par d'éventuelles allusions de Golius, qui en avait rapporté du Moyen Orient en 1629 un manuscrit arabe de Tâbit ben Qurra corrigé par Nasir-al-Din-al-Tussy [119]. Il ne sera imprimé en latin qu'en 1661, à Florence (Joseph Cocchini) par Abraham Ecchellensis, à partir du texte écrit vers 990 par Abul Fath d'Ispahan, retrouvé par Giacomo Alfonso Borelli dans la bibliothèque des Médicis. Il est probable que, si Descartes, Fermat et Roberval avaient eu une réelle connaissance de ce Livre V, leur polémique de 1638 sur les tangentes aurait été mieux argumentée, et sans doute moins douloureuse.

Il est clair que l'œuvre d'Archimède, un peu plus ancien qu'Apollonus, est à détacher de celle des deux autres, et nous l'avons donc mis en troisième place dans cette recension, puisque la filiation évidente d'Euclide vers Apollonius demande de ne pas les séparer [120].

117. P. 304 des *Essais*, AT VI 377.
118. P. 317 des *Essais*, AT VI 390 ; s'il ne donne pas ici le nom de son découvreur, il le cite par contre explicitement en de nombreux passages de sa correspondance et, par exemple, dans la *Seconde Méditation* : AT IX-a, pp. 19 et 186.
119. Voir les *Essais d'histoire des mathématiques* de Jean Itard, p. 113.
120. Voir par exemple les pages xcv et xcvi de l'introduction aux *Coniques* d'Apollonius par Heath.

Tangentes et normales chez Euclide

Rappelons que Christoph Clavius avait donné une édition d'Euclide en 1574, très personnelle, rééditée cinq fois jusqu'en 1612 (voir Heath I p. 105). C'est probablement par ce texte, et également par ses *In disciplinis mathematicis prolegomena* que Descartes a été mis en contact avec son lointain prédécesseur en géométrie ; il y fait d'ailleurs allusion claire dans une lettre à Mersenne du 13 novembre 1629 (AT I XIV, 70) où il évoque ces commentaires.

Nous abrégerons en H, K, P et V quatre éditions classiques de Heath, Kayas, Peyrard et Vitrac, les plus faciles à consulter aujourd'hui, la seconde ayant la particularité de présenter textes grec et français face à face.

1) Il s'agit ici exclusivement des tangentes aux cercles. Dans ce cas précis, nous disposons d'une définition explicite de cette notion, la seconde du troisième Élément (H II 1 ; K I 43 ; P 57 ; V I 387)

   Une droite qui, touchant un cercle et prolongée, ne le coupe pas, est dite tangente au cercle.

   La suivante concerne le contact entre deux cercles

   Des cercles qui se touchent l'un l'autre sans se couper, sont dits tangents l'un à l'autre.

   Il n'y a pas accord général entre les traducteurs, Vitrac utilisant « rencontrer » ($\acute{\epsilon}\phi\acute{\alpha}\pi\tau\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$) alors que les trois autres lui préfèrent « toucher », ce qui introduit plus qu'une nuance linguistique sur laquelle il est difficile de trancher.

   La situation est encore rendue plus complexe par le fait que la Définition 5 du quatrième Élément emploie un autre mot ($\breve{\alpha}\pi\tau\eta\tau\alpha\iota$) pour signifier « être tangent à un cercle » (H II 70 ; K I 78 ; P 95 ; V I 70), alors que la précédente est cohérente avec celles du troisième Élément [121].

121. Voir le texte grec dans Kayas et, avec des remarques linguistiques détaillées, dans H II 2 et 79.

On doit également noter une certaine ambiguïté sur le mot « couper » qui, dans la définition 3, peut signifier qu'au point commun considéré il y a rencontre franche, ou au contraire qu'il n'existe aucun autre point commun.

2) Quoi qu'il en soit, le concept précédent est sans doute légèrement flou pour un lecteur moderne, mais son sens général est clair : une tangente à un cercle est une droite ayant avec lui un point d'intersection unique. Heath le résume quant à lui en une formule assez heureuse : *elle le rencontre, mais ne le coupe pas*[122].

   On peut considérer que, pour lui, « couper » équivaut à « recouper », ou au contraire à ce que la pénétration de la droite dans l'intérieur de la courbe s'interrompt dès qu'elle a commencé. On retrouve ici une ambiguïté linguistique qu'Euclide, dans le texte de ses démonstrations sinon dans sa définition, a été obligé de lever en faisant explicitement allusion à la situation « extérieure » de tous les points de la tangente sauf un.

   Une propriété importante à considérer, pour éclairer ce point de vue, est la Proposition II du Troisième Élément (H II 8 ; H I 44 ; P 59 ; V I 394) qui montre qu'un segment d'extrémités distinctes sur le cercle lui est intérieur.

   La tangente au cercle est mise en œuvre à partir de la Proposition XVI du Troisième Élément (H II 38 ; K I 54 ; P 73 ; V I 423) : la perpendiculaire issue de A au diamètre d'un cercle qui le contient est « *tangente au cercle* » comme le dit explicitement le corollaire, car « *elle située entièrement à l'extérieur du cercle et, dans l'espace entre elle et le cercle il n'est pas possible de mener une autre droite* ». Une interpolation due à Théon ajoutera d'ailleurs, vers le quatrième siècle, que la tangente « *touche le cercle un un point seulement car toute droite le rencontrant en deux points tombe à l'intérieur* ».

   Fermat notera avec soin, dans une lettre d'août 1658 à Cureau de la Chambre (p. 555 du volume II de ses *Œuvres*)

   « *Aucune droite ne peut tomber entre la courbe et la touchante, par un principe d'Euclide* ».

122. *History of greek mathematics*, I p. 381.

On remarquera que, dans cette preuve, Euclide se croit obligé d'alourdir sa définition, en ajoutant que la tangente reste pour l'essentiel extérieure à la courbe, ce qui n'était pas explicité auparavant. À proprement parler, il n'avait pourtant pas besoin de ce raffinement tant qu'il se limitait au cercle : une droite ne peut en effet pas entrer dans son intérieur sans en ressortir, à la différence par exemple de ce qui peut se passer pour une parabole. Nous retrouverons cette remarque dans les paragraphes consacrés aux *Coniques* d'Apollonius.

Cette Proposition est enrichie d'une formulation ambiguë qui a fait couler beaucoup d'encre, jusqu'à Clavius et Wallis notamment : le fait de savoir si l'*angle corniculaire* formé par un arc de cercle et la tangente en l'une de ses extrémités existait effectivement, s'il était nul, si sa mesure était plus petite que celle de tout autre angle *etc.* Il n'y a aucune raison de penser que Descartes n'a pas entendu parler de ce long débat qui nous paraît un peu inutile. Cela dit, l'essentiel est clair : la définition donnée d'une tangente a bien un sens, et il en existe une en chaque point du cercle. Il ne faudrait pas aller très loin pour déduire du texte euclidien l'unicité d'une telle tangente (elle lui a d'ailleurs été parfois ajoutée, notamment par Simson en 1756).

3) Les Propositions suivantes déclinent un certain nombre des propriétés des tangentes, notamment la construction du couple des tangentes issues d'un point extérieur au cercle (III 17 : H II 43 ; K I 55 ; P 75 ; V I 427) et l'unicité évoquée ci-dessus (III 18 et 19), puisqu'il y est prouvé que le centre du cercle se projette orthogonalement sur une tangente en son point de contact.

En conclusion, Euclide a traité de façon essentiellement correcte les problèmes de l'existence, de l'unicité et de la construction des tangentes à un cercle, de façon entièrement conforme à sa définition qui, bien qu'un peu ambiguë dans les termes, est cohérente avec le texte des Propositions étudiées ci-dessus. Ajoutons simplement que l'on a vu apparaître au passage une autre propriété de la tangente, qui ne laisse aucun espace entre elle et le cercle. Nous retrouverons ce point de vue chez Apollonius et, dans une moindre mesure, chez Archimède.

4) Il reste à signaler un passage curieux qui a pu inspirer Descartes lors de sa querelle avec Fermat : la Proposition VIII (H II 17 ; K I 48 ; P 64 ; V I 404) introduit les comparaisons entre les distances d'un point extérieur Δ et les points de la circonférence. Y sont alors distinguées les parties du cercle « concave » et « convexe » relativement à Δ.

   Seul le fait que les tangentes n'aient pas encore été introduites empêche Euclide de montrer que le maximum d'une distance ΔK lorsque K décrit l'arc visible du point Δ est atteint lorsque la tangente en K passe par Δ. Il en avait les moyens, puisqu'il prouve explicitement que la distance ΔK croît au fur et à mesure que K, restant sur la partie convexe, s'éloigne de la projection de Δ sur le cercle : un lecteur perçant comme Descartes ne pouvait pas ne pas y lire la solution d'un problème *de maximis et minimis*.

   Cela résultera d'ailleurs de la Proposition XXXVI, avant-dernière de l'Élément, qui dit que la puissance d'un point par rapport à un cercle auquel il est extérieur est le carré de la distance aux points de contact des tangentes qui en sont issues ; le mot « convexe » y est d'ailleurs encore employé (H II 73 ; K I 67 ; P 92 ; V I 460).

   Heath remarque qu'Euclide prend soin de démontrer directement ce résultat, alors qu'il aurait pu l'obtenir à partir de la Proposition antérieure portant sur un quadrilatère inscrit en considérant la tangente comme limite d'une corde : Descartes se gardera bien également d'introduire des notions que nous qualifierons aujourd'hui de topologiques dans un problème qui lui paraissait, à juste titre, purement géométrico-algébrique. On doit d'ailleurs noter que c'est essentiellement cette Proposition qui sert à Descartes pour résoudre certaines équations du second degré (p. 302 des *Essais*, 376 de AT VI).

Tangentes et normales chez Apollonius

L'exemplaire de l'œuvre à laquelle il est fait ici référence est en premier lieu la traduction, par Paul Ver Eecke, des sept livres des coniques d'Apollonius de Perge. Le lecteur doit être averti d'une difficulté de lecture de ce travail : l'éditeur du texte s'est laissé, comme tant d'autres, un peu piéger par la confusion entre *latus rectum* et *paramètre*[123], et il n'est pas le seul[124]. Bien entendu, c'est sans influence sur la qualité de la traduction : son paramètre n'est pas le nôtre mais son double, voilà tout[125].

Enfin l'adaptation déjà signalée de Heath, datée de 1896 et point de départ de sa prestigieuse série de livres sur les mathématiques grecques, est évidemment incontournable même si, cette fois-ci, la fidélité au manuscrit est totale quant au fond mais inexistante quant au mot à mot.

Ces éditions sont repérées ci-dessous par les lettres, H, F, T et V[126], abréviations pour Heath, Fried, Taliaferro et Ver Eecke.

Pour un cartésien, la lecture de ce livre est un point de passage obligé, afin d'y voir avec précision ce qui distingue la découverte des coordonnées cartésiennes (ou fermatiennes) de l'usage implicite qui en est fait par des géomètres anciens dont le plus important est justement Apollonius : on y voit en particulier que cette utilisation, très ciblée et restreinte, n'aurait par exemple jamais permis à son auteur d'imaginer comment définir d'autres courbes par des équations.

1) Contrairement à Euclide, son disciple direct ne pose pas de définition explicite de la tangente à une conique, persuadé qu'il est certainement que celle donnée pour le cas particulier du cercle s'étend d'elle-même sans difficultés (d'ailleurs rien ne prouve que, dans les *Coniques* perdues d'Euclide, ce dernier n'avait pas lui-même adapté sa définition).

   Or il faut d'emblée souligner une difficulté posée par cette extension silencieuse : si l'on prend par exemple une parabole, n'importe quelle parallèle

123. Voir la note 1 de la page 24.

124. Voir par exemple la page xxv de la préface de l'adaptation des *Coniques* par Heath.

125. Cette difficulté se retrouve d'ailleurs dans d'autres traductions, comme celle de R. Catesby Taliaferro des trois premiers livres, reprise en 1997 par les éditions *Green Lion* (p. 21), de haute qualité et très agréable à lire pour un œil moderne notamment à cause de figures redessinées, mais qui s'éloignent inutilement du texte en y utilisant exclusivement des lettre latines alors que les originales sont en grec. Signalons une traduction de 2002 du quatrième livre, au même standard de fidélité et de clarté : celle de Michael N. Fried, compagnon naturel du travail de Taliaferro.

126. Pour mémoire, Gerald Toomer a donné une édition bilingue (arabe et anglais) des livres cinq à sept, qui ne sera pas utilisée ici.

à l'axe coupe la courbe en un seul point, toutes les autre droites qui partagent avec la parabole ce point commun rencontrant au contraire la courbe en un second point distinct. Nous verrons qu'Apollonius connaissait cette singularité : pour lui il est naturellement clair qu'une telle droite coupe franchement la parabole, en séparant deux demi-droites dont l'une est extérieure et l'autre intérieure à la conique [127].

Cela n'est compatible avec la définition euclidienne que si l'on prend cette dernière sous sa forme élargie, implicitement utilisée dans la démonstration de la Proposition XVI du Troisième Livre d'Euclide, où est explicitement fait allusion à l'impossibilité pour cette droite de contenir des points intérieurs à la courbe.

D'ailleurs Fermat, rompu à la lecture des *Coniques*, écrira que tous les points d'une tangente à une ellipse, sauf le point de contact, sont *en dehors* de la courbe (*extra ellipsin* ; *Œuvres*, I 145, III 129), et écrira une inégalité dans ce sens. Il ne s'agit donc pas seulement d'être ou non sur la courbe, mais d'être *extérieur* à celle-ci, ce qui est plus contraignant.

2) Rappelons que, contrairement à la tradition pour laquelle une conique était une section d'un cône de révolution par un plan orthogonal à une génératrice, pour Apollonius c'est plus généralement une section par un plan quelconque d'un cône admettant une base circulaire. Si l'intérieur et l'extérieur d'un cercle, et donc d'un cône, admettent des définitions intrinsèques évidentes, il n'en est pas de même pour une conique (Apollonius utilise ces notions par exemple dans la Proposition X de son Premier Livre, absente chez Heath, T 18, V 20, où il est affirmé que les points situés sur une sécante ΘH d'une conique lui sont intérieurs s'ils sont entre Θ et H, et extérieurs sinon). Naturellement il s'agit ici des traces sur le plan de la figure de l'intérieur et l'extérieur du cône générateur, mais un moderne serait obligé de vérifier que changer de cône laisserait ces deux parties exactement en l'état.

3) Pour définir la tangente en un point d'une conique, Apollonius agit comme Euclide : il trace d'abord la droite, puis prouve qu'elle mérite ce qualificatif en vérifiant certaine condition posée. Mais ce tracé exige de longs préalables, que nous devons au moins passer rapidement en revue

127. Voir la Proposition XXVI du Premier Livre, absente chez Heath : T 45 ; V 48 ; il en serait naturellement de même pour toute parallèle à une asymptote d'hyperbole.

[**i**] définition générale d'un diamètre,
[**ii**] existence d'un diamètre particulier,
[**iii**] utilisation de ce diamètre pour obtenir des équations des coniques,
[**iv**] définition de la tangente en une extrémité de ce diamètre.
[**v**] définition de la tangente en les autres points.

Chacun de ces items, tous abordés dans le Livre I, mérite une présentation au moins sommaire.

4) Qu'est-ce qu'un diamètre ? Cela constitue la Définition IV de ce Livre (H 5 ; T 3 ; V 4). En termes modernisés, cela signifie qu'une droite D est un diamètre d'une conique s'il existe une symétrie d'axe D laissant la courbe invariante. En d'autres termes, s'il existe une direction δ telle que les milieux des cordes de direction δ appartiennent à D. Les droites de direction δ sont alors dites *menées d'une manière ordonnée* sur le diamètre : Descartes reprendra cette expression sous la forme *appliquée par ordre* (*La Géométrie*, p. 343 des *Essais*, AT VI 414).

   Cette définition suppose implicitement qu'une droite ne peut couper une conique qu'en deux points au plus. Elle ne précise nullement l'existence d'une infinité de diamètres.

5) L'existence de l'un de ces diamètres résulte de la Proposition VII (H 5 ; T 12 ; V 14), où il est exhibé, avec preuve reposant sur un lemme constituant la Proposition VI (H 4 ; T 10 ; V 12). C'est celui qui correspond au cas où la direction δ est commune au plan contenant la conique et à celui de la base circulaire du cône.

   Ce n'est que dans le cas d'un cône droit (c'est-à-dire ici de révolution) que la direction de D est orthogonale à δ : le diamètre trouvé est alors l'un des *axes* de la conique au sens moderne.

6) Les trois Propositions XI (H 8 ; T 19 ; V 21), XII (H 9 ; T 21 ; V 24) et XIII (H 11 ; T 24 ; V 28) utilisent ce que nous appelons aujourd'hui un repère affine dont le premier axe est le diamètre D et le second la parallèle à δ issue de l'un des points communs au diamètre et à la conique. La première est consacrée à la parabole, qui y est définie comme étant une section

conique dont le plan est parallèle à l'une des génératrices du cône. La seconde et la troisième concernent respectivement l'hyperbole et l'ellipse. C'est ici qu'Apollonius se montre précurseur de la géométrie analytique de Descartes et Fermat.

C'est d'ailleurs, pour l'essentiel, la dernière intervention importante du cône générateur dans l'étude des coniques : pratiquement tous les autres résultats reposeront sur les équations déterminées dans ces trois propositions et leurs conséquences, et seront illustrés exclusivement par des figures planes. Ces équations sont les suivantes, où U est l'une des extrémités du diamètre (l'autre, qui n'existe pas pour la parabole, étant noté V), où le point générique est M, de projection K sur D parallèlement à δ et où λ et μ sont des constantes, dûment définies par rapport aux éléments du cône et du plan sécant

$$KM^2 = \lambda\, KU \qquad \text{(cas de la parabole)}$$

$$KM^2 = \mu\, KU \cdot KV \qquad \text{(cas de l'hyperbole et de l'ellipse)}$$

Il est à remarquer que ces équations ($\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha\tau\alpha$) sont données sans réciproques, c'est-à-dire qu'est absent le fait qu'un point M vérifiant l'une de ces relations appartient obligatoirement à la conique.

La clef résulte de ce que l'on pourrait appeler l'équation du cercle dans Euclide (Troisième Élément 31 et Sixième Élément 8 : H II 61, 209 ; K I 62, 112 ; P 85, 147 ; V I 449, II 176). Il faut remarquer que si l'égalité $KM^2 = KU.KV$ y est bien présentée comme une condition nécessaire d'appartenance de M au cercle de diamètre UV, le versant suffisant n'est pas davantage explicité. Mais on le trouvera chez Pappus, dans sa *Collection mathématique*, dans la Proposition 168 (lemme II) du Septième Livre (p. 721 du second volume de la traduction de Paul Ver Eecke).

Cela dit, cette réciproque pour le cercle est par exemple un corollaire évident de la Proposition 13 du Sixième Élément d'Euclide (H II 216 ; K I 115 ; P 151 ; V II 184), et permet à son tour de prouver aussitôt les réciproques des équations des coniques. Rappelons que cette Proposition 13 est exactement celle qui permet à Descartes de construire une racine carrée au tout début de *La Géométrie* (p. 298 des *Essais*, AT VI 370).

En réalité, les équations de l'hyperbole et de l'ellipse sont présentées sous une forme qui les rapproche de celle de la parabole, que nous écrivons classiquement aujourd'hui $y^2 = 2p\,x$, à savoir $y^2 = 2p\,x(x+t)$ pour l'une et $y^2 = 2p\,x(t-x)$ pour l'autre[128]. Ces formes sont naturellement largement modernisées pour la compréhension ; le nombre t qui y figure n'est autre que le « côté tranversant », c'est-à-dire la longueur UV. C'est exactement ainsi que Descartes les utilise en 1637, au Livre Second de *La Géométrie* (pp. 328-332 des *Essais*, AT VI 401-404, et surtout p. 343 des *Essais*, AT VI 415), avec référence explicite aux trois premiers Problèmes (Propositions LII à LVI, H 43-52 ; T 96-109 ; V 97-109) et aux Propositions XI à XIII du premier livre d'Apollonius.

Ces équations prouvent que les coniques sont des solutions des *problèmes à trois ou quatre lignes* ; avec les notations modernes, il suffit d'interpréter les égalités $y^2 = 2p\,x$ et $y^2 = 2p\,x(t \pm x)$ comme liant le carré de la distance y à l'un des axes au produit des distances x et $t \pm x$ respectivement à l'autre axe et à l'un de ses parallèles. On sait quel rôle important joue ce problème dans la fin du Livre Premier et le début du Second, même si cette remarque pourtant si simple n'y figure pas explicitement.

7) Il est utile de lister les outils utilisés dans ces preuves par Apollonius. Il avait sans doute ici eu des prédécesseurs, Aristée et Euclide qui, si l'on interprète bien son aîné Archimède (vol. I, p. 164 et 175 de l'édition Mugler, Propositions 3 et 8 de *Sur les conoïdes et les sphéroïdes* ou vol. II, p. 167, Proposition 3 de la *Quadrature de la parabole*) semblaient avoir connu ces équations. Par ailleurs Ménechme connaissait l'équation d'une parabole, puisqu'il s'en sert explicitement pour « calculer » (par une construction géométrique) une racine cubique.

   Quoi qu'il en soit, ces matériaux sont exactement ceux dont Descartes se servira dans tout son travail, à savoir les propriétés des triangles semblables - pratiquement toujours homothétiques - et donc le théorème de

128. Ce qui, au passage, permet de comprendre les noms mêmes de ces coniques, respectivement « avec excès » et « avec défaut ».

Thalès, ainsi naturellement que celui de Pythagore [129] (à cette liste devrait être ajoutée la formule des sinus dans certains textes).

Si l'on admet qu'Apollonius ne fait ici que rapporter les résultats d'un autre mathématicien, il est alors curieux de constater qu'il met un temps certain à aboutir à ces équations alors qu'elles pourraient être obtenues, avec presque les mêmes mots, sans aucun préliminaire [130]. Notamment le fait que D est un diamètre n'est pas utilisé dans le corps de la preuve, mais cela résulte aussitôt de l'équation si l'on admet son caractère suffisant de l'appartenance à la conique.

Qu'une telle redondance subsiste chez un découvreur, ayant du mal à se dégager entièrement de la gangue de sa recherche, est normal ; qu'elle n'ait pas été remarquée par un copiste de la qualité d'Apollonius est surprenant. La perte des livres d'Aristée et Euclide sur les coniques ne permet pas de trancher complètement ce point.

8) La tangente au sommet que nous avons noté U est alors définie comme la parallèle issue de U à la direction δ (le second « axe de coordonnées »). La Proposition XVII (H 22 ; T 46 ; V 40) justifie cette dénomination. Si cette droite admettait des points intérieurs, il existerait une corde UM qui devrait recouper la courbe au symétrique de M par rapport à U, ce qui n'est pas, d'où la conclusion

   cette droite ne tombera pas à l'intérieur de la ligne ; elle tombera donc à l'extérieur, et sera, par conséquent, tangente à la section.

   Cela découle très simplement de la Proposition VII. Cette preuve n'est donc pas à strictement parler basée sur l'équation, mais sur le fait que D est un diamètre, ce qui en est un corollaire immédiat comme nous l'avons déjà signalé.

   Cette phrase est significative : pour Apollonius, une tangente en U est donc, parmi les droites passant par un point donné U, la seule à ne pas

129. Qui n'apparaît ici qu'indirectement sous la forme de la propriété d'un triangle rectangle, signalée dans le paragraphe précédent, disant que l'une de ses hauteurs est moyenne proportionnelle entre des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

130. On pourra voir par exemple dans l'introduction de Heath à son adaptation des *Coniques*, aux pages xxiv et suivantes, des calculs allant dans le sens de cette remarque.

« tomber à l'intérieur », c'est-à-dire à contenir des points strictement intérieurs, ce qui serait le cas s'il existait un autre point d'intersection M de cette droite avec la conique. Il y a donc largement accord avec la définition euclidienne, quelle que soit son interprétation (à savoir que « qu'elle ne la coupe pas » soit pris dans le sens d'unicité du point commun, ou dans le sens de pénétration franche à l'intérieur).

Il ajoutera plus loin (Proposition XXXII, H 22 ; T 54 ; V 58) que

[cette tangente] *tombe à l'extérieur de la section ; je dis qu'une autre droite ne tombera pas dans l'espace situé entre* [elle] *et la section*

ce qui est une citation presque exacte de la Proposition III 16 d'Euclide déjà signalée

dans l'espace entre elle et le cercle il n'est pas possible de mener une autre droite.

La filiation d'Apollonius à Euclide est donc ici parfaitement mise en lumière.

9) Il reste enfin à définir la tangente aux points de la conique non situés sur le diamètre particulier D. Pour la parabole, c'est fait à la Proposition XXXIII (H 25 ; T 57 ; V 60) et, pour les autres, à la Proposition XXXIV (H 26 ; T 58 ; V 62). Les deux preuves sont par l'absurde, et reposent sur la considération des équations. Citons les phrases finales

Dès lors [cette droite] *ne tombe pas à l'intérieur de la section ; donc elle lui est tangente.*

En conséquence, [cette droite] *ne coupe pas la section ; donc elle lui sera tangente.*

Dans cette dernière phrase, « ne coupe pas » signifie, d'après le contexte, que la tangente annoncée n'admet pas de point intérieur à la conique. En dépit des apparences, les deux démarches sont donc strictement analogues.

Voici les définitions des tangentes données par Apollonius. Nous reprenons les notations UMK données plus haut.

- Pour la parabole, la tangente en M coupe le diamètre D en le symétrique T de K par rapport à U.

- Pour les autres coniques, T est le conjugué harmonique de K par rapport au couple (U, V), tel que $\dfrac{TV}{TU} = \dfrac{KV}{KU}\cdot$

Notons au passage que l'usage d'une division harmonique n'est pas rare dans Apollonius : on en retrouve encore par exemple dans la Proposition XXXVI (H 26 ; T 63 ; V 65). Il en est de même dans les Propositions XXXVII à XL du Livre III (H 106-108 ; T 235-243 ; V 249-255), la première d'entre elles établissant que la droite joignant deux points de contact est la polaire du point d'intersection de ces tangentes. Autre exemple parmi d'autres, le cas particulier du cercle, placé dans le cadre d'un problème d'astronomie, figure explicitement dans la Proposition LI du Sixième Livre de *La collection mathématique* de Pappus (deuxième volume, page 451 de la traduction de Paul Ver Eecke).

Nous savons d'ailleurs par le Septième Livre du même Pappus que l'ouvrage perdu *Les Porismes* d'Euclide contenait plusieurs Propositions, par exemple 154 (Lemme XXVIII, p. 704) et 161 (Lemme XXXV, p. 713) suffisantes pour fonder la polarité par rapport à un cercle. Enfin un cas particulier très important de division harmonique (pieds des bissectrices d'un angle sur le côté opposé), très simple et très fréquent, apparaissait déjà dans la Proposition 3 du Sixième Élément d'Euclide (H II 195 ; K I 106 ; P 142 ; V II 161).

La théorie des pôles et polaires des coniques figure donc chez Apollonius, et vient peut-être de ses prédécesseurs. On peut dès lors se demander pourquoi il n'a pas démontré, dès le tout début du Traité, que tout point d'une conique est extrémité d'un diamètre : cela résulte très facilement de l'application de cette théorie harmonique au cercle de base du cône. Au lieu de cela, il faudra attendre la Proposition LI du premier Livre (p. 94), donnant enfin tout son sens à la Définition IV qui a servi de point de départ à tout ce long périple, à la lecture particulièrement pénible (mais à la technique très élémentaire).

10) Les propriétés des tangentes sont innombrables dans *Les Coniques*. Signalons simplement, parce qu'elle est très liée aux questions d'optique auxquelles Descartes s'est particulièrement intéressé, celle selon laquelle la tangente coupe à angles égaux les droites joignant un point [131] aux deux foyers d'une conique autre que la parabole (Livre III, Proposition XLVIII, H 116, T 249, V 267). Ces foyers ont été introduits dans la Proposition XLV (H 114 ; T 253 ; V 262), et la définition bifocale qui leur est associée résulte des Propositions LI et LII de ce livre (H 118 ; T 257-259 ; V 270-271) : on sait quel usage Descartes en a fait dans *La Dioptrique*, (pp. 89 et 140 ; AT VI 166 et 214).

    Il faut peut-être noter qu'une définition très simple de la tangente en un point H de l'intersection d'un cône de base circulaire C de sommet A et d'un plan P est la suivante : c'est l'intersection de P et du plan passant par A et la tangente à C à son intersection avec l'arête AH (plan tangent au cône) ; mais cette définition ne pouvait être donnée par Apollonius, car elle repose sur le concept de tangente intersection de deux plans tangents, trop en avance pour l'époque.

    Signalons enfin une construction plane très simple de la tangente en H à une conique passant par cinq points $HIJKL$, deux à deux distincts, reposant sur le théorème de Pascal de l'hexagramme mystique. C'est la droite HQ où l'on construit les intersections R de HL et IK, P de HI et JL, Q de PR et JK. Une fois connus les cinq points, elle repose sur l'emploi de la règle seule (mais si H n'est pas donné, il faut alors un compas) ; ici encore, l'antiquité grecque ne pouvait pas avoir accès à ce type de concept trop avancé.

Tangentes et normales chez Archimède

Que Descartes connaisse très bien Archimède résulte, par exemple, d'une phrase des *Réponses aux Objections* (AT IX-a, p. 186)

« *Il y a plusieurs choses qui ont été démontrées par Archimède touchant la sphère et les autres figures composées de lignes courbes, par la comparaison de ces mêmes figures avec celles composées de lignes droites* »

131. Autre qu'un sommet.

dont il est difficile de ne pas penser qu'elle s'appliquait notamment à la recherche de tangentes.

L'œuvre d'Archimède à laquelle il est fait ici principalement référence est la traduction, par Charles Mugler, des Œuvres d'Archimède à partir de 1971 aux éditions Les Belles Lettres (collection des universités de France) : outre ses qualités intrinsèques, elle est intéressante par sa présentation des textes grec et français face à face. Bien sûr celle de Thomas Little Heath (reprise chez Dover) garde encore son importance, même si certaines parties de son travail de 1912 sur *La Méthode* (alors tout récemment découverte) n'ont pas toujours la même autorité à laquelle cet auteur nous a habitués. Enfin la déjà ancienne traduction par Paul Ver Eecke (retirée par Blanchard), apporte une possibilité de confronter les textes. Nous les repérerons toutes trois par leurs initiales M, H et V.

1) La spirale d'Archimède, définie cinématiquement, est la seule courbe plane, en dehors des coniques, pour laquelle nous ayons une justification antique d'une construction de la tangente en un point générique.

   Elle est définie par la conjonction de deux mouvements uniformes : l'un, circulaire, d'une demi-droite Az tournant autour de son extrémité A, l'autre, rectiligne, d'un point Δ décrivant la demi-droite Az

   « *lorsqu'une droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale*[132] ».

   Après quelques propriétés des aires engendrées par le mouvement de Δ, nous devons remarquer la Proposition XIII (M II 33 ; H 167 ; V 262) dans laquelle le mot *tangente* est brutalement introduit, comme si son existence allait de soi

   « *Si une droite est tangente à une spirale, elle sera tangente en un seul point* »

   suivie d'une série de propositions analogues, dont la Proposition XX (M II 46 ; H 174 ; V 275), qui détermine comment construire l'intersection

132. *Des Spirales* : M II 11 ; H 154 ; V 242.

- le pied - Z de la tangente en Δ avec la perpendiculaire en A à $A\Delta$. Les Propositions XVIII et XIX qui la précédent n'en sont que des cas particuliers.

Il est inutile de rapporter ici la citation complète de cette Proposition, assez peu explicite pour un moderne. Donnons simplement une traduction en symboles actuels : si Δ est le point de coordonnées polaires (ρ, θ) dans un système de pôle A bien choisi, nous disposons de la relation $\rho = a\,\theta$ où a est une constante. La longueur AZ est alors égale à $T = \dfrac{\rho^2}{a}$ ce qui, après l'invention du calcul différentiel, est un résultat trivial.

2) Il n'est pas davantage question de donner en détail la démonstration d'Archimède. Qu'il suffise de dire que, conformément à une tradition bien classique, le géomètre étudie successivement les cas hypothétiques où AZ serait strictement supérieur, puis strictement inférieur à la longueur annoncée T. Ayant conclu dans les deux hypothèses à une contradiction, il en déduit par l'absurde l'égalité $AZ = T$.

   Chacune des deux preuves repose sur l'utilisation d'une *neusis* (construction décrite plus bas) assez complexe, reposant sur un principe de continuité caché. Elles sont très intéressantes à étudier, mais le travail de déconstruction est lourd. On en trouvera une étude assez claire chez Sir Thomas Little Heath (dans *A history of greek mathematics*, vol. II, page 70) et chez Paul Tannery en 1883 (voir ses *Mémoires scientifiques*, vol. I, page 300, qui se limite à l'étude de la Proposition XVIII mais c'est sans importance).

   Comme preuve de la difficulté de cette démonstration, il suffit de remarquer que Tannery, pourtant très expert en mathématiques grecques, a cru pouvoir « simplifier » Archimède (p. 302 : *proposer une démonstration notamment plus simple*), alors qu'il s'agit en fait d'une propriété complémentaire : là où Archimède montrait que AZ devait être égal à T, il a prouvé assez simplement que cette égalité, supposée vraie, impliquait que la droite $Z\Delta$ était tangente à la spirale en Δ. Ces deux démarches, opposées, ne sont équivalentes que si l'on sait qu'une éventuelle tangente est unique, ce qui n'est nullement affirmé par Archimède (même si cela devait lui paraître évident).

3) Le type de contradiction utilisé par Archimède pour rejeter les deux cas absurdes qu'il considère est, en notations modernes, essentiellement celui-ci : à la suite d'une construction compliquée, en résulterait l'existence d'un point Δ' voisin de Δ sur la courbe tel que la droite $A\Delta'$ coupe la tangente en Δ en un point intérieur à la spirale, ce qui n'est pas possible.

La seule chose qui importe donc dans cette démonstration est que l'ensemble repose exclusivement sur les présupposés suivants

- il existe une tangente en Δ,

- une telle tangente vérifie une propriété de convexité, en ce sens que toute la spirale est située dans l'un des deux demi-plans que définit cette tangente, et que tous les points de la tangente autres que le point de contact sont donc extérieurs à la courbe.

En fait cela n'est que *localement* exact (il faut limiter la spirale à un arc autour de Δ) mais c'est sans importance réelle.

Nous retrouvons ici une notion bien vue par Euclide, qui sera aussi reprise par Apollonius, signalée plus haut à propos des Propositions VIII et XXXVI du Troisième Élément, introduisant la concavité locale d'un cercle par rapport à ses tangentes, et bien entendu le fait que tous les points de la tangente autres que le point de contact sont extérieurs au cercle (ce qu'Apollonius étend aux coniques). Fermat n'utilisera pas autre chose.

Évidemment la complexité de cette célèbre démonstration, strictement adaptée aux propriétés spécifiques de la spirale d'Archimède, ne pouvait servir de modèle pour d'autres courbes connues à l'époque (par exemple la quadratrice) ; il faudra justement attendre Descartes et Fermat pour dépasser ce stade.

Tangentes et normales chez Fermat

Nous savons que, pendant le même temps où Descartes forgeait de son côté sa méthode de recherches des normales aux courbes algébriques, Fermat entrait en possession d'une autre, équivalente, qui donnait les tangentes. Bien que cette dernière ait été celle qui s'est révélée être la plus féconde, menant aux bords du calcul différentiel, nous allons montrer qu'elle est en fait relativement proche des idées d'Euclide, Apollonius et Archimède, alors que celle de son rival était beaucoup plus révolutionnaire.

Le point de départ de l'étude de Fermat ne concernait pas les tangentes, mais était plus abstrait : celle des extremums des fonctions. Deux textes importants et très voisins, *Ad eamdem methodum* (pp. 140-147 du volume I et sa traduction française 126-130 du volume II de ses *Œuvres*) et *Methodus de maxima et minima* (respectivement pp. 147-153 et 131-136) nous fournissent un fort indice sur ce qui a constitué pour lui le plus grand défi et sa première victoire significative [133].

Il s'agit en fait d'un énoncé d'Apollonius, celui du premier problème du Second Livre de son œuvre perdue *De la section déterminée*. Nous le connaissons notamment par l'intermédiaire de la Proposition 61 (XXI) de Pappus, page 584 du second volume de la traduction Ver Eecke de *La collection mathématique*. Voici le problème en question, dans les notations modernes du premier texte de Fermat : étant donnés quatre points deux à deux distincts O, M, I et D, situés dans cet ordre sur une même droite, déterminer pour quel point N entre M et I le rapport

$$\frac{ON \cdot ND}{MN \cdot NI}$$

est minimum. Nous savons qu'Apollonius affirmait, avec raison, que N est donné par l'égalité

$$\frac{NM}{NI} = \sqrt{\frac{OM \cdot MD}{OI \cdot ID}}\,.$$

Nous ne connaissons pas la démarche d'Apollonius conduisant à une détermination si étrange. Contrairement à une affirmation de Heath (*History of the greek mathematics*, p. 409 de son second volume), Pappus ne fournit pas non plus de solution, se contentant de donner, par un calcul laborieux, la valeur du minimum en fonction des quatre points de départ [134].

133. Notons au passage que Mahoney, en page 151 de *The mathematical career of Pierre de Fermat*, ne cite que la seconde occurrence, alors que la première, plus ancienne, est aussi la moins maladroite des deux.

134. Fermat, par contre, avait bien signalé cette absence.

Fermat sera le premier à rendre plausible l'énoncé, par application de sa méthode, assez lourde et qui ne rend pas compte de la forme très particulière de l'égalité déterminant N. Il est aujourd'hui possible de restituer avec une assez bonne chance de succès la démonstration d'Apollonius : il suffit essentiellement de remarquer que la racine double d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ vérifie l'égalité $x^2 = \frac{c}{a} \cdot$ Toutefois cela suppose que l'existence de ce minimum, ainsi que le fait qu'il corresponde à une racine double, aient pu être établis, et à les traduire dans le style du temps. Il est vraisemblable qu'Apollonius ne se soit pas posé la question, ou au moins ait admis cela comme un fait évident ; toute preuve adaptée à son époque - il en existe plusieurs - s'appuierait immanquablement sur des appels à des principes de continuité pratiquement implicites que nous retrouverons plus bas.

C'est ensuite, probablement très peu de temps près, que Fermat, s'étant rendu compte qu'il était capable de déterminer en quels points une tangente à une courbe était parallèle à l'axe des abscisses, étendra sa technique à la recherche de la tangente en un point donné. Signalons tout de suite que l'algorithme de Fermat n'est malheureusement ni nécessaire ni suffisant pour ces déterminations : il ne fonctionne correctement que dans le cas « général » (nous dirions aujourd'hui générique), sans que son auteur en ait eu vraiment conscience. C'est d'ailleurs là l'une des clés de la profonde divergence qu'il aura avec Descartes lors de la fameuse querelle des tangentes, où ce dernier n'eut point tous les torts. Cela dit, à condition de bien l'encadrer, l'invention fermatienne fut, et est encore sous sa forme moderne, d'une extrême utilité pratique, jusqu'aux énoncés de problèmes de baccalauréat de notre temps !

Cette méthode de Fermat est souvent appelée *De Maximis et Minimis*, titre donné par lui-même dans ses *Œuvres* (II, p. 154) dans l'explication à Descartes de Juin 1638, puis dans une lettre à Mersenne deux mois plus tard (10 Août 1638, *op. cit.*, II, p. 167 et enfin repris en 1684 par Leibniz dans sa *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus*. Dans une lettre du 23 Août 1636 à Roberval et Étienne Pascal (*op. cit.*, p. 56) il parlera même de « l'invention *maximæ et minimæ in omnibus omnino problematibus* ».

Son outil essentiel est l'*adæquatio* (évanouissement), traduction fermatienne des $\pi\alpha\rho\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\varsigma$ de Diophante (*cf.* par exemple sa Proposition 11 du Livre V.), « adéquation » que nous déclencherons par l'usage du verbe

« adégaler » comme Fermat lui-même, et pour laquelle nous avons choisi un symbole spécial, α, voisin du (et opposé au) signe « *æqualis* » de l'égalité cartésienne.

Cette adéquation est la signature de la méthode et date de 1629 au plus tard ; on la trouve à l'œuvre dans quatre types d'opérations : recherche d'*extrema*, constructions de *tangentes* à des courbes *explicites*, c'est-à-dire définies par une équation « cartésienne », ou fermatienne, du type $y = f(x)$, puis à des courbes *implicites* d'équation $F(x, y) = 0$, et enfin recherche de *centres de gravité*. Certes, d'autres travaux très postérieurs, comme les traités de 1660 sur la quadrature et la rectification, ont plus ou moins été considérés par leur auteur comme relevant de la même méthode ; ils reposent davantage, semble-t-il, sur des acrobaties calculatoires que sur le chef d'œuvre de sa jeunesse : sa méthode d'optimisation n'y est guère lisible.

Dans ces quatre cas, l'adégalité $f(e) \;\alpha\; g(e)$ met en relation deux expressions algébriques simples, souvent de type polynomial ou s'y réduisant, les fractions rationnelles étant ramenées au type polynomial par réduction au même dénominateur et multiplication par ce dénominateur, les radicaux par élévation au carré *etc.* en une variable presque toujours notée e, sur lesquelles on opère comme pour une égalité ordinaire, d'abord en regroupant le tout dans un seul membre, puis en simplifiant par e qui dans chaque cas est effectivement en facteur commun (Fermat dit explicitement : *divisant par* e), et enfin en substituant le nombre zéro à la lettre e, ce qui conduit à une égalité permettant théoriquement de résoudre le problème posé.

Comment trouver un extremum…

Recherche d'extremum et construction de tangente appartiennent tous à un même type, celui d'une adéquation

$$\varphi\,(a + e) \;\;\alpha\;\; \varphi\,(a).$$

Dans la détermination d'un maximum ou d'un minimum, cas particulier fondamental qui a (un peu abusivement) donné son nom à la méthode générale fermatienne, la fonction φ est *connue*, et *l'inconnue* est l'abscisse a pour laquelle la valeur $\varphi\,(a)$ est extrémale.

La règle (l'algorithme) de Fermat, que l'on pourrait caractériser en mots par la séquence « **rassembler, factoriser, simplifier, annuler** », l'est en symboles mathématiques modernes par la formule

$$\left[\frac{\varphi\,(a+e)-\varphi\,(a)}{e}\right]_{e=0}=0.$$

... ou une tangente

Dans une lettre de Fermat à Brûlard de Saint-Martin du 31 mars 1643, publiée en pages 120-125 du *Supplément* à ses Œuvres, on trouve ces mots

« *Il importe de comparer le point unique avec ceux qui peuvent être imaginés de chaque costé* ».

Il est fait allusion ici au concept de concavité, qui rappellent à l'auteur une remarque stupéfiante qui lui avait été faite sept ans plus tôt. En effet, dans une lettre de Roberval à Fermat du 22 novembre 1636, publiée en page 45 du même *Supplément*, on trouve ces mots

« *Soit la Conchoïde ABC, vous trouverez qu'il y a un certain point en icelle comme B, tel que depuis A jusques en B, elle est* convexe en dehors, *et depuis B par C à l'infini, elle est* convexe en dedans, *ce qui est admirable. Et encor plus que par le point B, il ne se peut mener de ligne droite qui la touche, mais une comme OBY, qui fera les angles au sommet OBA, YBC, chacun moindre qu'aucun angle rectiligne donné* ».

Le 4 novembre 1636, Fermat jugeait encore, selon toute vraisemblance, que toute la courbe était concave (Vol. II des *Œuvres de Fermat*, p. 87). Mais dans son mémoire *Ad eamdem methodum*, daté entre 1638 et 1640, il écrira, comme si cela était tout naturel

Cependant il arrive souvent que la courbure change, comme dans la conchoïde de Nicomède[135].

Dans les deux cas suivants où Fermat utilise l'adéquation, l'abscisse du point de la courbe dont il désire calculer la tangente est *fixée*, et c'est la fonction φ

135. *Op. cit.*, Vol. I p. 166, Vol. III p. 146.

qui est en partie *inconnue* puisque dans son expression figure un paramètre t, à savoir la « sous-tangente », dont l'égalité finale permet de trouver la valeur, puis d'en déduire une construction de la tangente cherchée. C'est ainsi que, si $F(u,v)=0$, la tangente au point (u,v) à la courbe définie par $F(x,y)=0$ passe par le point $(u-t,0)$ où t a été obtenu par l'adégalité

$$F\Big(u+e, \Big[1+\frac{e}{t}\Big]\,v\Big) \;\;\alpha\;\; F(u,v) \qquad [=0].$$

Ici $a=0$ et $\varphi(x) = F\Big(u+x, \Big[1+\frac{x}{t}\Big]\,v\Big)$; si F est un polynôme, le calcul donne toujours le nombre inconnu t par une équation simple puisque du premier degré. On peut d'ailleurs noter que Sluse trouvera, vers 1652, un algorithme explicite donnant t qu'il publiera en 1673, tout à fait analogue à notre moderne $\dfrac{\partial}{\partial x}x^p y^q = p\,x^{p-1}y^q$.

Le second cas pourrait se déduire du troisième en posant $F(x,y)=f(x)-y$. La seule différence - mais essentielle - entre les deux sortes de recherche de tangente consiste en ce que, pour les courbes explicites, l'optimisation semble résulter du parcours d'un point restant sur la courbe, tandis que dans le cas implicite le mobile décrit la tangente et non la courbe elle-même.

Dans ces trois cas, il s'agit d'*optimiser* (maximiser ou minimiser), une certaine fonction φ. Une grande partie du travail des commentateurs consiste à déterminer cette fonction, qui n'est en effet pas évidente dans le cas de la recherche d'une tangente à une courbe en un point donné ; il peut d'ailleurs y avoir plusieurs fonctions différentes, conduisant cependant toutes au même résultat. Dans le cas, auquel nous nous limiterons, de la recherche d'une tangente en un point d'abscisse a à une courbe d'équation $y=f(x)$, on peut prendre

$$\varphi(x) = f(x) - mx$$

où m est un paramètre inconnu, que l'on détermine justement en écrivant que l'extremum est atteint en a. Dans le cas particulier où la tangente a pour pente $m=0$, on peut alors prendre $\varphi = f$, ce que Fermat par exemple avait fait dans son étude du problème d'Apollonius.

Cela dit, dans les textes de Fermat, la fonction à optimiser n'est jamais citée explicitement. L'auteur passe toujours par le détour suivant : la tangente en M et la courbe étant respectivement coupé en des points T et N par une parallèle Py à l'axe des ordonnées situé à une distance e de celle qui passe par M, alors on peut adégaler les longueurs PT et PN. Il est facile de voir que ce processus revient bien à optimiser en M une certaine fonction comme il a été dit plus haut ; mais ainsi présenté sous une forme exclusivement géométrique il garde un parfum encore quelque peu apollonien.

Du principe de continuité

Pour comprendre le rôle très important qu'un certain *principe de continuité* joue dans la démarche fermatienne, il est bon de regarder comment, dans la tradition antique, de tels procédés étaient déjà silencieusement à l'œuvre. Un excellent exemple est celui de l'insertion d'un segment de longueur donnée entre deux courbes.

Voici une version modernisée d'un cas typique d'une telle *neusis* ($\nu\epsilon\hat{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$), justement fondamental pour certaines Propositions, dont VII et VIII, des *Spirales* d'Archimède (H 158 ; M II 19 ; V 243). Étant donnés trois points O, B et C, d'un cercle donné Γ, on suppose que la perpendiculaire à OB issue de C coupe le segment BO en A et Γ en D tels que $AC > AD$. Il s'agit de démontrer qu'existe, sur l'arc BC de Γ un point F distinct de B tel que le segment OF coupe le segment AC en E tel que $EF = AB$.

En voici une solution « moderne » ; lorsque F décrit l'arc BC de B vers C, on trouve que

[**i**] $EF - AB > 0$ si $F = O'$, point diamétralement opposé à O sur Γ (puisque AB est alors la projection orthogonale de EF sur OB),

[**ii**] $EF - AB < 0$ si $F = C$ (puisque E est alors lui aussi en C, d'où $EF = 0$).

L'existence d'un F entre B et C tel que $EF = AB$ est alors claire par continuité. On peut même être un peu plus précis : ce point est entre O' et C puisque, si $O'F_1F_2C$ se suivent dans cet ordre, on dispose des relations

$$E_1F_1 - E_2F_2 = (OF_1 - OE_1) - (OF_2 - OE_2) = (OF_1 - OF_2) + (OE_2 - OE_1) > 0.$$

On peut traduire ce résultat en disant que Γ coupe en au moins deux points B et F la *conchoïde de Nicomède*[136], de pôle O, de règle CD et de sommet B (nous suivons ici le vocabulaire de *La Géométrie* p. 351 des *Essais*, AT VI 423, conforme à la partie XXVI du Quatrième Livre de Pappus, p. 185 du premier volume de la traduction Ver Eecke).

Une variante de cette preuve, plus parlante encore sur une figure, consiste à comparer les tangentes en B de la conchoïde et du cercle, et à en déduire que

[**i**] au voisinage de B, les points du cercle sont situés à l'*extérieur* de la conchoïde,

[**ii**] au voisinage de C, les points du cercle sont situés à l'*intérieur* de la conchoïde.

La conclusion est évidemment la même.

C'est à propos de cette *neusis* que les commentateurs ont souvent employé l'expression *principe de continuité*. Citons en effet par exemple Paul Tannery (premier volume de ses Mémoires Scientifiques, page 314), Paul Ver Eecke dans sa préface de la *Collection* Pappus (pages XL, 209 et 235 du premier volume, page 209 du second) et Ivor Thomas (premier volume de ses *Greek mathematical works*, p. 351).

Nous n'en donnerons qu'un exemple dû à Tannery (p. 314)

« *la longueur du segment FK, d'abord égal à AI, augmente d'abord* [...] *puis elle diminue continûment jusqu'à s'annuler ; il y a donc une position pour laquelle elle redevient égale à AI* ».

D'autres applications de ce principe de continuité chez Euclide et Apollonius, plus cachées, n'en sont pas moins claires. Il s'agit du problème général de l'intersection de deux courbes (de deux *lignes*, comme l'on disait alors). S'il existe des théorèmes pour limiter le nombre de points d'intersection de deux cercles, d'une droite et d'une conique et enfin de deux coniques, respectivement au plus égaux à 2, 2 et 4, on ne peut trouver de tentatives de preuves que ces majorants peuvent être atteints, c'est-à-dire que dans telle

136. Voir page 291.

ou telle situation heureuse certaines lignes se coupent bien en le nombre de points annoncés.

En d'autres termes, l'existence même de ces points d'intersection n'est que très rarement prouvée : c'est donc sur un principe du genre « on ne peut passer de l'intérieur à l'extérieur sans franchir la courbe », connu des étudiants sous le nom de « passage des douanes », qu'il faut se rabattre.

On pourra regarder à cet effet la page 607 du second volume de la traduction Ver Eecke de la *Collection mathématique* où, étudiant la Proposition 72 du Livre VII, reprise dans *La Géométrie* (p. 387 des *Essais*, AT VI 462), Pappus démontre qu'une droite coupe un cercle parce qu'elle passe par un point intérieur (tel que $KM^2 < KU \cdot KV$ avec les notations choisies plus haut) : « *En conséquence le demi-cercle de diamètre BH tombera au-dessus du point* Γ », ce qui permet par conséquent d'introduire un point E commun à ce demi-cercle et à une certaine droite $A\Gamma$.

Il existe pourtant un certain nombre de contre-exemples, par exemple chez Apollonius, Proposition XXIII du Quatrième Livre, malheureusement absente chez Heath (F 24 ; V 297), où il est prouvé rigoureusement qu'une certaine droite - une polaire - rencontre une certaine hyperbole en des points bien définis par ailleurs.

a) Pour une majoration du nombre de points d'intersection d'une conique avec une droite, voir par exemple la Proposition X du Premier Livre d'Apollonius, absente chez Heath (T 18 ; V 20) dont cette majoration est un corollaire immédiat (non explicité).

   Voici une construction facile à la Euclide du second point Θ d'intersection d'une droite D dont on connaît déjà un premier point H d'intersection avec une conique : si l'arête AH du cône coupe en U le plan de base et si D coupe en W l'intersection du plan de base et du plan de la conique - éventuellement à l'infini -, alors la seconde intersection V du cercle de base avec la droite UW est telle que AV coupe D en Θ. Toutefois cette construction repose sur la géométrie dans l'espace (*problème solide*). Il s'agit en fait d'un *problème plan*, comme on peut le voir par exemple à l'aide du théorème de Pascal sur l'hexagramme mystique : si la conique contient cinq points $HIJKL$, deux à deux distincts, et si D passe par H, il suffit de construire successivement les intersections R de HL et IK, Q de D et JK, P de QR et JL, Θ de D et IP qui appartient à la courbe. Ici seule la règle est nécessaire ; si H n'est pas donné, il faut alors un compas.

b) Pour l'intersection de deux coniques, voir la Proposition XXV du Quatrième Livre (H 130 ; F 26 ; V 299).

c) Pour l'intersection d'une droite et d'un cercle, il n'est jamais prouvé par Euclide qu'elle possède au plus deux points ; on pourra par exemple se reporter avec intérêt au commentaire de Heath sur la Proposition II du Troisième Élément (II 8) et à son interprétation par Vitrac (I 396). Cette difficulté du texte euclidien, qui a intéressé Proclus et Héron d'Alexandrie, résulte pourtant très facilement des deux Propositions XVI et XVII du Premier Élément (H I 279 ; K I 11 ; P 14 ; V I 226). On se rapportera également avec profit au commentaire de Heath sur la Proposition XII (I 274) où il exhibe une autre démonstration, plus pénible.

d) Pour l'intersection de deux cercles, voir la Proposition X du Troisième Élément (H II 23 ; K I 50 ; P 67 ; V I 412). Heath signale d'ailleurs au passage qu'Euclide ne prouve pas que se rencontrent deux médiatrices dont il utilise pourtant le point commun, et que Simson a remarqué qu'il récidive dans la Proposition V du Quatrième Élément (H II 88 ; K I 73 ; P 99 ; V I 475), qui veut justifier la construction du centre du cercle circonscrit à un triangle ! Tout cela montre que les problèmes d'existence, dans les cas « évidents », posaient souvent problème aux géomètres grecs, même si comme ici (voir Heath, *op. cit.*, page 90) on peut trouver une solution dans le cadre de l'axiomatique euclidienne.

Donnons un exemple d'intersection considérée comme « évidente » et donc non justifiée, très symbolique puisqu'il ne s'agit pas moins que de la Proposition I du Premier Livre d'Euclide (H I 241 ; K I 3 ; P 3 ; V I 194) : il y est affirmé, sans preuve, que le cercle de centre A passant par B et du cercle de centre B passant par A ont au moins un point commun Γ. Une « démonstration », naturelle et acceptable pour l'époque, pourrait être la suivante : le point B est à l'intérieur du second cercle, alors que le point qui lui est diamétralement opposé sur le premier lui est extérieur : entre eux figure donc au moins un point Γ commun aux deux (sur ce point, voir par exemple les pages 242 et 31 des volumes 1 et 2 de Heath).

Faut-il considérer Euclide comme naïf, ou aveugle à une telle entorse à la méthode axiomatique ? Naturellement pas, mais il nous faut bien reconnaître qu'il était ici limité par le faible niveau de l'analyse de son époque : seule l'*antypharèse*, clef de son Dixième Élément, pourrait être à la rigueur considéré comme une introduction à la structure fine de l'ensemble des nombres réels. Cette antypharèse aurait pu servir à justifier la partie manquante de la Proposition I, puisque les anciens connaissaient par exemple le développement en fraction continue de $\sqrt{3}$, mais ne permettrait d'aller guère bien au delà.

Cette difficulté n'a évidemment pas échappé aux traducteurs : Bernard Vitrac (*op. cit*, 192) signale que « *rien n'est postulé à propos de l'intersection de deux cercles ou d'une droite (indéfinie) et d'un cercle* » ; il signale la nécessité d'« axiomes de continuité » pour prouver ces existences. Heath avait fait de même (*op. cit.* 234-240), en titrant son long commentaire *Principle of continuity* (il récidivera en page 242) [137].

De tels axiomes de continuité comportent nécessairement l'axiome d'Archimède, qui affirme que les produits d'un nombre, si petit soit-il, par les entiers successifs finissent par dépasser n'importe quel nombre donné à l'avance. Il l'avait énoncé comme Cinquième Postulat de son traité *De la sphère et du cylindre* (H 4 ; M I 11 ; V I 6), mais aussi dans l'introduction précédant *Des spirales* (H 155 ; M II 13 ; V I 243) ainsi que dans celle *De la quadrature de la Parabole* (H 234 ; M II 165 ; V II 378), où il cite de ses prédécesseurs qui l'ont déjà utilisé (sans aucun doute Eudoxe). On la trouvait déjà dans la *Physique* d'Aristote : « *En ajoutant toujours au fini, on dépassera tout fini* » (Vol. II, Chapitre 10, page 139 [266b2], Collection des Universités de France, Éditions des Belles Lettres, Paris 1961).

Cet axiome est à rapprocher de la Définition 4 du Cinquième Élement d'Euclide (H III 14 ; K I 83 ; P 113 ; V II 38 ; voir aussi les pages 135-141 de ce dernier livre) ainsi qu'à la très importante Proposition I du Dixième Élément (H III 14 ; K II 69 ; P 258 ; V III 87), évoquée plus haut. Il est parfois dissimulé dans un édifice plus complet comme celui des *coupures de Dedekind*, liant les points d'une droite aux nombres du corps des réels. On peut aussi citer

137. Naturellement Hilbert avait bien ressenti la nécessité de ces recours à la continuité, auxquels il avait consacré un axiome de son cinquième groupe en 1899, puis deux dès 1903 (première et seconde éditions des *Fondements de la Géométrie*, trad. Rossier, page 40).

par exemple une forme primitive connue sous le nom de Pasch, à savoir « *si une droite entre dans un triangle, elle en sort* » (Hilbert, *op. cit*, p. 15), liée aux axiomes d'ordre. C'est sous cette dernière forme que Heath l'explicite.

Bien entendu Fermat, dans la mesure où il applique une définition de tangente où interviennent les notions de points intérieurs et extérieurs, est inévitablement conduit à - silencieusement - se reposer par exemple sur le fait qu'une droite qui est « entrée » dans l'intérieur d'une courbe doit finir par en « sortir ». Mais il utilise surtout un argument de continuité cachée dans la définition même de son adégalisation.

Par exemple, pour prouver que $\varphi\,(a+e)\ \alpha\ \varphi\,(a)$ lorsque φ passe par un maximum en a, il définit d'abord, évidemment pour $e \neq 0$, un nombre $\theta(e) = \dfrac{\varphi(a+e)-\varphi(a)}{e}$, et constate que ce nombre est positif quand e est négatif et inversement. Or cela implique nécessairement pour lui que $\theta(0)$, dont l'existence n'est pas mise en doute, ne peut que prendre la valeur 0, la seule à permettre un passage naturel de nombres tous négatifs vers des nombres tous positifs. Mais écrire $\theta(0) = 0$, c'est exactement écrire la relation $\varphi\,(a+e)\ \alpha\ \varphi\,(a)$.

Les paragraphes précédents ont bien montré, sans ambiguïté, qu'un tel *principe de continuité*, jamais écrit, était néanmoins tacitement admis par les Grecs de l'époque classique. Pourquoi n'a-t-il jamais été alors explicité de manière formelle ?

Cela résulte tout simplement du fait qu'à cette époque *ils n'avaient tout simplement pas les mots pour le dire*. Nous pouvons aussi nous rappeler le sage propos aristotélicien de Blaise Pascal conseillant, à propos *De l'esprit géométrique, de l'art de persuader*, de « *n'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes qu'on n'ait point de termes plus clairs pour les expliquer* » (*Œuvres complètes*, éd. Jean Mesnard, vol. III, p. 419 ; éd. Michel Le Guern, vol. II, p. 175 ; éd. Jacques Chevalier, p. 596).

Il est donc maintenant clair que l'initiative de Fermat pour trouver les tangentes, si révolutionnaire qu'elle ait été, reste donc finalement très proche des pratiques géométriques antiques, et notamment de celles d'Archimède (nous avons vu qu'avec Descartes la situation est profondément différente).

Pourquoi, dans ces conditions, Archimède par exemple n'a-t-il pas découvert la méthode de Fermat ? Il est toujours difficile de répondre à ce genre de question (et sans doute même stupide de la poser) : ce qui est certain, c'est qu'il n'était pas en possession de l'arme absolue de son cadet selon laquelle toute courbe possédait une équation, par exemple de la forme $y = f(x)$, même si l'on pouvait se passer de l'exhiber explicitement : là repose la véritable innovation créatrice du dix-septième siècle, qui ouvrait des horizons inimaginables, même pour un très grand algébriste comme Viète.

Comme nous l'avons suggéré plus haut, il paraîtrait hautement important, culturellement, qu'une partie de ce chapitre puise être assimilé par les enseignants de mathématiques du lycée, pour pouvoir être passée - au moins en partie - aux élèves désireux de bâtir une carrière scientifique. Dans un grand envol reliant l'Antiquité classique au dix-septième siècle [138] une présentation pédagogiquement bien basée sur quelques textes de l'histoire des tangentes aux courbes et donc, plus ou moins, aux notions difficiles de dérivation et différenciation, pourrait se montrer très utile et en même temps attachante. Ne jamais oublier que les mathématiques valent, d'abord par leur **puissance**, mais aussi en grande partie par le **plaisir** qu'elles peuvent engendrer…

138. Bien entendu, rien n'empêcherait d'aller taquiner les deux suivants !

Chapitre 8

Les Ovales de Descartes

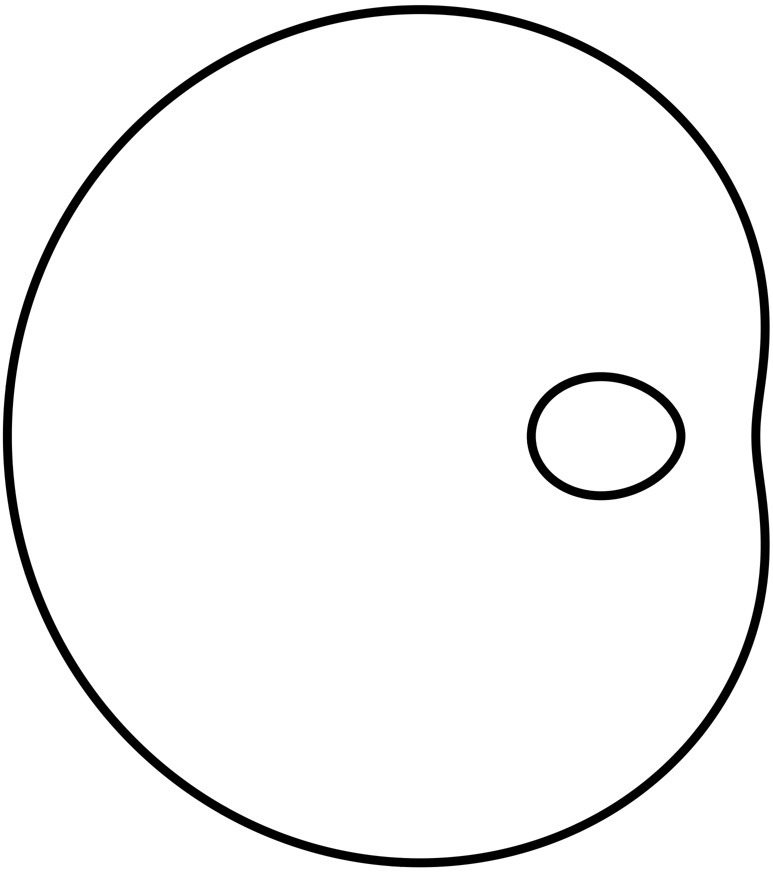


FIGURE 8.1 – *Une Ovale de Descartes cordiforme*

Étant donnés deux points distincts U et V d'un plan P, ainsi que trois réels non nuls (p, q, r), l'ensemble des points M de ce plan P vérifiant l'égalité $p\,MU + q\,MV = r$ est, en général[1], une **Ovale de Descartes**, dont $\{U, V\}$ est l'une des trois paires possibles parmi les trois **foyers** que possède la courbe.

Les pages finales du *Livre Second*, toutes consacrées à ces nouvelles courbes, inventées pour la circonstance, sont sans doute les plus difficiles à lire dans un ouvrage qui n'en manque pourtant guère. La courbe qui ouvre ce chapitre est une Ovale, particulièrement élégante, comme son auteur ne l'a jamais réellement vue : elle a en effet été dessinée grâce au logiciel *Mathematica* suivant l'algorithme que voici[2], adapté aux valeurs $k = 4/3$, $h = 2/3$ et $c = 5$ des trois paramètres introduits page 386

```
f[x_,y_]:=25(x*x+y*y)(x*x+y*y)+400x(x*x+y*y)-200(49x*x+57y*y)
+24000*x+90000 ; ContourPlot[f[x,y],{x,-33,13},{y,-23,23},
PlotPoints->200, Contours->{0}, ContourShading->False,
ContourSmoothing->4, Frame->False, ContourStyle->{Thickness[0.01]}]
```

Dans l'édition originale du *Discours*, les Ovales sont implicitement annoncées dans *La Dioptrique* à la page 110 des *Essais* (AT VI p. 185) et apparaissent, explicitement cette fois-ci, dans le Livre Second de *La Géométrie* aux pages 344, 350, 352 et suivantes (AT VI pp. 416, 421, 424 et *sq.*)[3].

Pourquoi les Ovales sont-elles si importantes ?

Presque 20 pages sur 117 : un sixième du livre est consacré par Descartes à ses Ovales. Sur ces 20 pages, presque 7 - un tiers - nous présentent deux

1. Par exemple il faut que $p^2 \neq q^2$, car sinon on aurait affaire à une ellipse ou une branche d'hyperbole.

2. On trouvera en page 434 une autre façon intéressante de construire informatiquement cette courbe.

3. On peut sans doute imaginer que Descartes y fait, fort brièvement et très indirectement, allusion en invoquant l'étude de la réfraction dans quelques lettres : ainsi par exemple dans AT I aux pages 235 (XXXIX, à Golius, janvier 1632), 240 (XL, au même, février 1632) et 255 (XLV, à Mersenne, juin 1632) ainsi que dans AT II p. 637 (CLXXIX, au même, 25 décembre 1639). Toutefois le problème du stigmatisme, et *a fortiori* le mot Ovale, n'y sont pas directement évoqués.

prototypes de lunettes délimitées par des parties de deux Ovales, destinées à fournir des **stigmatismes parfaits**[4]. Ces dernières pages sont évidemment le summum de la recherche cartésienne : il n'a pas considéré que son exposé de la construction de propriétés optiques de ses Ovales était un *tour de force* mathématique, mais au contraire il nous montre que son but était d'expliquer - ou d'agir sur - le monde, et ce à l'aide des outils neufs qu'il venait de construire.

D'autres coordonnées cartésiennes

Outre l'importance que lui donne le volume relatif qui leur est consacré, la première raison de placer les Ovales au tout premier plan du texte cartésien réside naturellement en ce qu'elles nous montrent avec grande précision que *la géométrie analytique cartésienne n'est pas vraiment celle que l'on croit, telle qu'on l'enseigne aujourd'hui au lycée.*

Si bien entendu associer à tout point M d'un plan deux nombres x et y égaux aux projections du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur deux axes sécants en une origine O était une technique parfaitement maîtrisée par Descartes, son idée profonde était pourtant beaucoup plus large. À tout point M il associe bien toujours un couple de nombres (x, y), le plus souvent grâce au procédé ci-dessus, mais il s'est aussi laissé le libre choix de tout autres moyens de *paramétrer* le plan[5], et l'affirme avec force

Même encore que les points de la ligne courbe ne se rapportassent pas en la façon que j'ai dite à ceux d'une ligne droite[6]*, mais en toute autre qu'on saurait imaginer, on ne laisse pas de pouvoir toujours avoir une telle équation.*

Et aussi[7]

Et je ne vois rien qui empêche qu'on étende ce problème en même façon à toutes les lignes courbes, qui tombent sous quelque calcul Géométrique.

4. Tous les rayons émergents d'un certain point donné convergeront *in fine* vers un autre point lui aussi donné.
5. Page 344, AT VI page 416.
6. Par projection parallèle à l'axe des ordonnées sur celui des abscisses, dans le langage d'aujourd'hui.
7. Page 350, AT VI page 422.

Dans le cas des Ovales, possédant un axe de symétrie évident, le choix de deux points distincts F et G de cet axe permet de mettre en bijection M et le couple[8] (x, y) tel que $x = MF$ et $y = MG$.

Pour tout système de coordonnées prises ainsi en un sens bien élargi, il lui suffit de pouvoir remplacer l'équation polynomiale usuelle $P(x, y) = 0$ d'un lieu donné par une autre équation du même type où (x, y) n'est plus un couple de coordonnées au sens actuel, mais d'autres coordonnées d'un type différent : ainsi, dans le cas des Ovales, (x, y) sont dites aujourd'hui *bipolaires*. Du moment que la relation entre x et y qu'il étudie reste polynomiale[9] - ce qui, comme on le verra est le cas pour les Ovales cartésiennes - , il peut se permettre d'adapter ses méthodes à ce type particulier de paramétrage : il nous le montrera ici de la façon la plus nette en recherchant la normale en un point d'une Ovale, en adaptant la technique développée pour les courbes algébriques à ce cas, mais par exemple sans jamais rechercher d'équation « cartésienne » de la dite courbe[10].

La fin d'une longue quête

Dès l'Antiquité, la réfraction a été décrite par les mathématiciens/physiciens du temps : Euclide par exemple. Le sort d'un faisceau de rayons lumineux après qu'il eut traversé un dioptre, plan ou sphérique par exemple, ne pouvait être déterminé par le calcul, mais les expériences étaient là. Le fait qu'en première approximation il puisse souvent être considéré comme allant se concentrer en un point (mode réel) ou semblant provenir d'un point (mode virtuel) était bien connu : par exemple certaines lunettes, au sens d'outils pour une astronomie à la puissance décuplée ou de supports correctifs de la vue existèrent bien avant 1637. Ce n'est pourtant qu'à cette date que le problème fondamental du *stigmatisme réfractif*, consistant à déterminer rigoureusement la forme d'une interface (air/verre par exemple) reconcentrant en un point un faisceau entrant, sera résolu, par Descartes, et à l'aide de ses Ovales : et c'est évidemment là l'une des raisons de leur importance historique essentielle.

8. Soumis aux condition $|x - y| < FG < x + y$.
9. Tout courbe polynomiale en bipolaires est algébrique, la réciproque étant vraie si elle admet un axe de symétrie.
10. Ce qu'il aurait pu faire sans très grande difficulté : ses capacités de calculateur le lui auraient permis.

Cela dit, des problèmes voisins avaient été réglés avant cette date : le problème du *stigmatisme réflexif* avait été réglé dès l'époque classique par la théorie des *points brûlants* (foyers) des coniques telle qu'elle fut notamment décrite par Apollonius, qui connaissait parfaitement par exemple le fait qu'un faisceau issu du foyer d'une parabole supposée miroir réfléchissant en sortait parallèlement à l'axe, ce qui est un cas limite (ou dégénéré) de stigmatisme. Cela semblait donner aux chercheurs une piste de départ intéressante. Un dernier progrès, étonnant, avait été accompli par le même Descartes vers 1628/1629 qui avait pu être le premier à résoudre le problème de l'*anaclastique réfractive*, variante du stigmatisme en ceci que l'un des points en jeu était envoyé à l'infini (l'un des deux faisceaux convergents était transformé en faisceau parallèle). Kepler avait notamment bien posé le problème, tenté de le résoudre expérimentalement, et avait échoué à en donner une solution mathématique satisfaisante. À la surprise de son découvreur, les coniques encore - bien flairées par Kepler, puis rejetées - donnaient la solution (voir page 422) ! En ce sens, la partie de *La Géométrie* concernée aux Ovales peut être lue comme un chapitre supplémentaire des *Coniques* d'Apollonius ou de l'*Optique* d'Euclide, ce qui n'est pas un mince hommage !

Ce à quoi servent les racines multiples d'une équation

Les Ovales cartésiennes sont, pour leur auteur, l'occasion de justifier l'emploi de sa méthode de tracer des normales (et donc des tangentes) et de l'appliquer à un problème de physique mais aussi - et surtout à nos yeux modernes - de procéder à une résolution d'équation différentielle avant l'heure. Il ne nous dira pas comment il a procédé (donc comment il a été mis sur la piste d'une solution), ni non plus s'il a ainsi obtenu la solution la plus générale ; par contre il nous permet de vérifier, étonnés et admiratifs, que la courbe qu'il introduit en cette fin du Livre Second est bien une solution de ce *problème inverse des tangentes*. À ce titre, ses vingt pages prouvent que Descartes avait fait un pas en avant vers le must de la fin de son siècle, le calcul différentiel et intégral. Toutefois, il ne le fera pas comme Newton et Leibniz, avec des accroissements infinitésimaux, mais procédera de manière purement algébrique [11], l'outil de base étant la notion de racine multiple d'une équation.

11. Nous parlons ici de *La Géométrie* ; par contre, en certains endroits de sa *Correspondance*, certaines lettres montrent que ce que nous appelons aujourd'hui l'analyse ne lui était pas tout à fait étranger.

Si l'on admet que *La Géométrie* est un traité d'algèbre, le présence de ces Ovales est une application en or de son originalité, et la première utilisation décisive de la considération de plusieurs racines confondues en une seule.

Un exemple (mal) réussi de classification

Dans *La Géométrie*, les exemples d'applications des fameux quatre préceptes du *Discours* ne manquent pas, même s'ils ne sont pas mis en avant comme tels. Dans sa présentation de ses *Ovales*, Descartes utilise visiblement sa technique déclarée, notamment [12] : *faire partout des dénombrements si entiers, & des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.* Rares furent les commentateurs qui contestèrent sa classification des Ovales en quatre genres jusqu'à Tannery, qui tentera de l'améliorer, mais on peut montrer aujourd'hui (voir page 359) qu'elle est maladroite sinon très incomplète, contrairement au désir avoué de Descartes. Cela dit, sa mise en œuvre à ce sujet est évidemment très intéressante.

Les premières représentations paramétriques

Enfin l'un des derniers droits au souvenir de la postérité que se sont acquis les Ovales est d'avoir donné le premier exemple explicite de *représentation paramétrique*. Contrairement à d'autres courbes présentées dans *La Géométrie*, celles-ci ne sont pas définies - outre une introduction géométrique à l'ancienne - par une équation $P(x,y)=0$ où (x,y) sont les coordonnées usuelles, mais par une égalité de la forme $R+n\rho=c+nb$ où (R,ρ) sont les coordonnées bipolaires. Cela dit, pour le calcul des normales, Descartes est obligé d'introduire une nouvelle variable z, que nous appellerions aujourd'hui *paramètre* [13], telle que $R=c+z$ et $\rho=b-\dfrac{z}{n}\cdot$ Cette façon de faire a été depuis imitée d'innombrables fois, et élargit de façon considérable la notion de courbe (ou de surface *etc.*) bien au delà de ce que Descartes avait imaginé, par exemple pour la description de phénomènes physiques pour lesquels une équation globale du type $P(x,y)=0$ est très peu fréquent [14]. Une fois de plus, son originalité si puissante lui a fait introduire des outils dont il n'a probablement pas senti toute la fécondité.

12. Page 20 du *Discours*, Seconde partie, AT VI page 19.
13. Voir la page 344 des *Essais*, AT VI page 416.
14. Cela aurait pu intéresser au plus haut point Descartes s'il l'avait deviné.

Les lois de l'Optique classique

L'essai intitulé *La Dioptrique* nous rappelle, avec certaines justifications, les deux lois fondamentales de l'Optique

- la **réflexion** sur un miroir défini par une surface de révolution se fait en renvoyant un rayon lumineux de telle sorte que l'angle de réflexion soit *opposé*[15] à celui d'incidence (notés généralement $\hat{\imath}$ et $\hat{r}$ et comptés à partir de la normale au point d'impact),
- la **réfraction** lors d'un changement brusque de milieu obéit à la loi dite de *Snell-Descartes* selon laquelle $\hat{\imath}$ et $\hat{r}$ sont liés par l'égalité $\sin \hat{\imath} = n \sin \hat{r}$ où n est l'indice du second milieu par rapport au premier. Cet indice est toujours un nombre strictement positif et distinct de 1 (sinon il n'y a pas de réfraction au sens propre)[16].

Cette dernière loi, connue de Ibn Sahl en 984, de Harriot en 1602 et Snell en 1621, ne fut publiée qu'en 1637 par Descartes[17]. Même s'il connaissait le mot *sinus*[18], il préférait user d'un subterfuge pour décrire sa loi sans employer ce terme. La figure ci-dessous[19] lui permet de l'énoncer simplement en affirmant

15. Pour tenir compte du signe des mesures algébriques des angles dans le plan considéré.

16. De plus, si l'angle $\hat{\imath}$ et l'indice n sont tels que $\sin \hat{\imath} > n$, il y a alors *réflexion totale* sur la surface de séparation du rayon incident suivant un angle opposé.

17. Les dates indiquées ci-dessus, à l'exception bien sûr de celle du *Discours*, sont approximatives. Le fait qu'elle ne soit apparue dans un traité qu'à cette occasion - comme ce fut le cas pour la géométrie analytique également découverte indépendamment par Fermat -, suffit sans doute pour réfuter toute accusation de plagiat, fréquente dans la littérature anglo-saxonne ; on peut même avancer que Descartes fut le seul à voir que cette proportionnalité des sinus était de très grande importance, les autres protagonistes n'en ayant peut-être pas remarqué son influence pour la mathématisation de la physique qui connut le développement fécond que l'on sait justement à partir de ce début du dix-septième siècle. En sens inverse, c'est pour cette même raison - l'aveuglement au moins partiel du premier découvreur - que nous préférons parler de *théorème d'Euler* pour signaler la relation entre sommets, arêtes et faces de certains polyèdres, bien que l'on puisse reconnaître son inclusion dans le premier traité mathématique de Descartes, le *De Solidorum Elementis*. En histoire des sciences, ce phénomène n'est pas rare : deux siècles après Descartes, Faraday, l'inventeur de l'induction électromagnétique, fut loin de comprendre l'importance extrême de sa découverte même s'il fut le premier à publier sur ce sujet (l'autre inventeur indépendant, l'américain Joseph Henry, lui laissa ainsi la prééminence).

18. Voir par exemple son plus ancien texte sur l'anaclastique de 1628.

19. Tirée de *La Dioptrique*, discours second, page 21 des *Essais* du *Discours de la Méthode*, AT VI page 101.

l'égalité des rapports $\dfrac{KM}{LN}$ et $\dfrac{AH}{IG}$, donc leur invariance quand K décrit le cercle indiqué[20] (il suffit par exemple de « bloquer » le point A et de faire varier K)

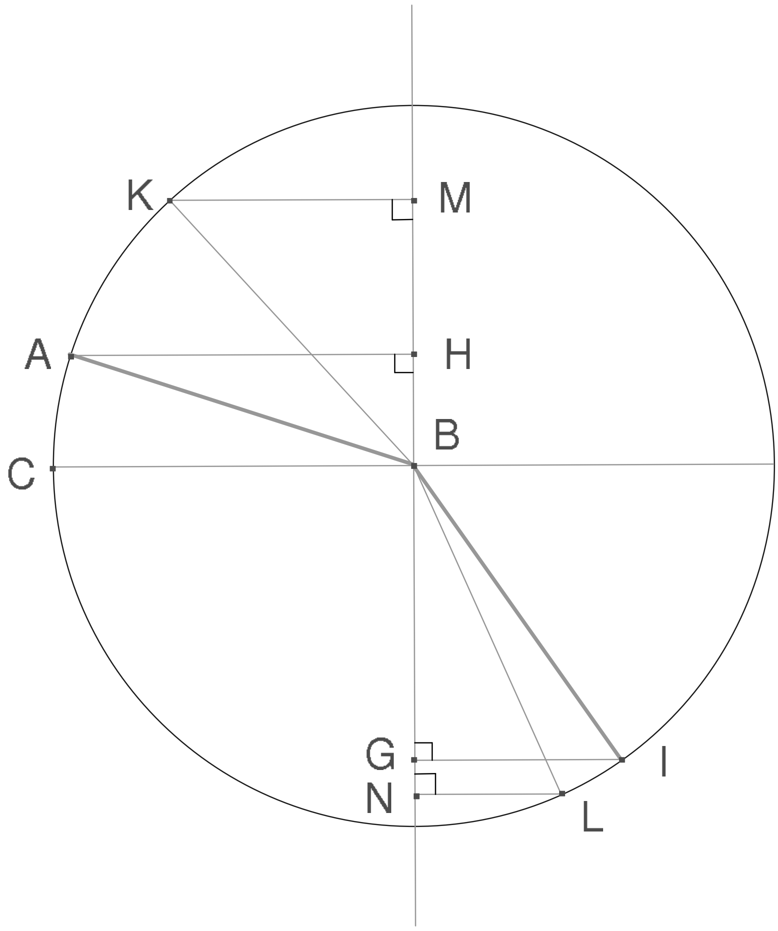


FIGURE 8.2 – *Une représentation géométrique de la loi de la réfraction*

Puisque, par hypothèse simplificatrice, nous avons supposé l'interface de révolution, il suffit, pour étudier une réflexion ou une réfraction, de se placer

20. Le fait que ces quatre points figurent sur un même cercle est sans importance réelle, mais cela devait sans doute paraître aux yeux de Descartes plus commode pour son analogie avec les jeux de balles. À noter également, sur la figure originale, le fâcheux quasi-alignement de K, B et I.

dans l'un des plans contenant l'axe de révolution considéré : les problèmes d'Optique sont alors ramenés à des considérations de géométrie plane qui peuvent vite se révéler complexes (« *Une manière de Géométrie un peu difficile* », explicite même Descartes, toujours *in La Dioptrique*, Discours VIII, p. 89, AT VI p. 165), que nous systématisons ci-dessous

- Dans le cas d'une réflexion, rayon incident et rayon réfléchi sont dans le même demi-plan défini par la tangente au miroir, mais dans des demi-plans différents par rapport à la normale au point de rupture.

- Dans le cas d'une réfraction, les deux rayons sont au contraire dans des demi-plans distincts, aussi bien par rapport à la tangente que la normale.

- Dans le cas du *stigmatisme* recherché par Descartes depuis les *Regulæ*, c'est-à-dire la réfraction où tous les rayons issus d'un certain point A de l'axe de la surface convergent en un point B du même axe après être passé par tous les points M d'une certaine région de l'interface, il faut que A et B soient tous les deux de part et d'autre de la tangente et de la normale.

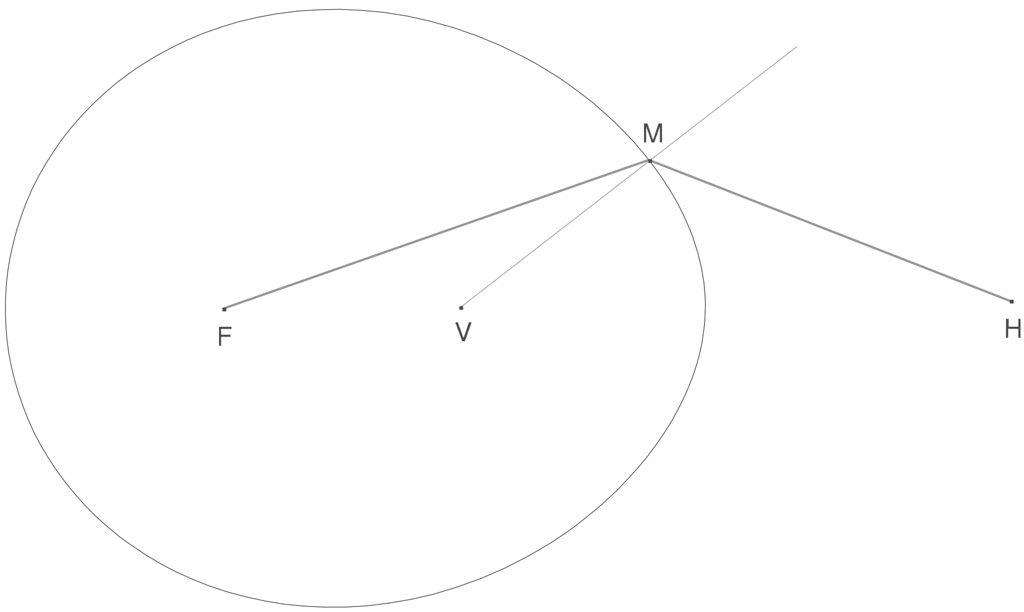


FIGURE 8.3 – *Un stigmatisme réel : les rayons issus de H convergent en F*

Pour simplifier légèrement l'exposé qui va suivre, nous définirons et noterons $(N, T) = (-, -)$ l'*index* de ce trajet lumineux. On dit alors que B est l'image parfaite de A. Les Ovales de Descartes permettent de définir un tel stigmatisme absolu ; nous y reviendrons naturellement ci-dessous. De manière analogue, (N, T) sera nécessairement égal à $(-, +)$ pour une réflexion, pour laquelle il n'y a évidemment pas de stigmatisme possible à l'exception du cas (très limite) $A = B = M$.

En dehors de ce stigmatisme fort, on peut aussi rechercher un *effet loupe* (ou *microscope*). Tous les rayons issus de A, après passage par M, peuvent après réfraction sembler provenir d'un point B de l'axe. On parle alors d'image *virtuelle* ; dans ce cas il faut avoir $(N, T) = (+, +)$ puisque A et B doivent avoir même position à la fois par rapport à la tangente et la normale.

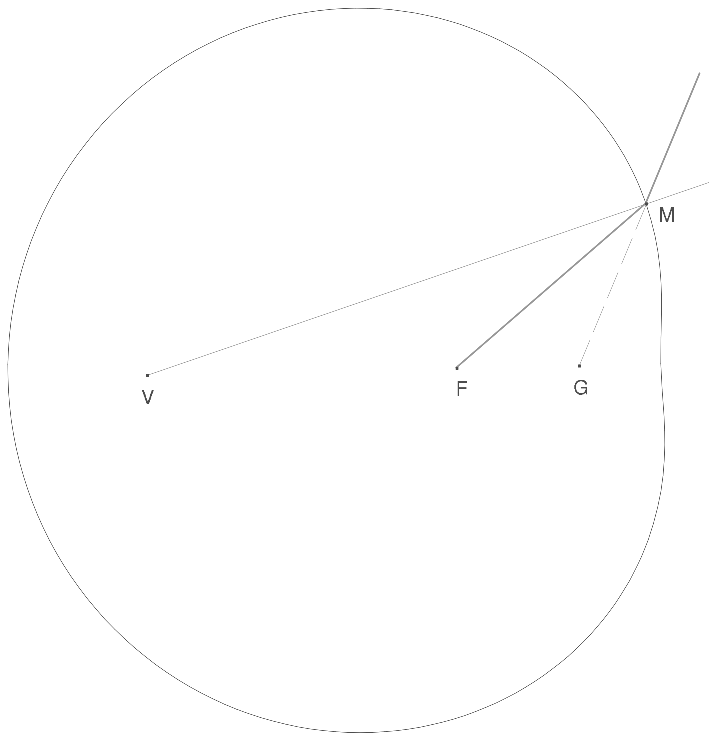


FIGURE 8.4 – *Un effet de loupe : F est perçu comme étant en G*

Notons qu'alors, si l'on suppose l'œil de l'observateur situé en O sur l'axe optique, il n'y a à proprement parler d'effet de loupe grossissante que si B est entre O et A : la source lumineuse semble s'être rapprochée de l'œil. Si l'on échangeait les rôles de A et de B, on pourrait encore parler de loupe mais cet usage, auquel Descartes a certainement aussi pensé, serait plutôt destiné aux hypermétropes comme le montre le texte suivant (*La Dioptrique*, Discours VII, p. 73, AT VI p. 150)

« *En quelques-uns,* [...] *elle a fait les yeux de telle figure, qu'ils ne leur peuvent servir qu'à regarder les choses éloignées, ce qui arrive principalement aux vieillards ; et aussi en quelques autres, à qui, au contraire, elle les a fait tels, qu'ils ne leur servent qu'à regarder les choses proches, ce qui est plus ordinaire aux jeunes gens.* »

Les cinq loupes cartésiennes déduites de la construction de ses Ovales pourront donc servir à un double usage : nous n'y reviendrons pas.

D'après ce qui précède, l'index (N, T) est utile lorsqu'il est égal à $(-, -)$, $(-, +)$ et $(+, +)$. Pour des raisons de symétrie visuelle, il semblerait que l'on puisse aussi s'intéresser à l'égalité $(N, T) = (+, -)$ qui n'est pas encore apparue. Elle correspond au cas où A et B sont du même côté de la normale mais de côtés différents de la tangente. À l'époque cartésienne, une telle situation optique était inenvisageable : la section suivante montrera qu'il n'en est plus tout à fait de même aujourd'hui.

L'étonnante méta-optique du vingt-et-unième siècle

Dans plusieurs passages étranges, dont par exemple le suivant (*La Géométrie*, Livre Second, p. 358, AT VI p. 430)

Les rayons qui viennent du point G se refleschiraient tous vers F, s'ils y rencontraient la superficie concave d'un miroir [...] *qui fust de telle matiere qu'il diminuast la force de ces rayons* [...] *Les angles de la reflexion seraient inesgaux, aussi bien que sont ceux de la refraction, & pourraient être mesurés en mesme sorte.*

Descartes semble pouvoir évoquer un matériau réfléchissant très spécial pour lequel la loi de la réflexion ne serait plus $\hat{\imath} = -\hat{r}$, mais plutôt $\sin\hat{\imath} = -\,n\,\sin\hat{r}$, avec $n > 0$. À notre connaissance, aucune possibilité physique allant dans ce sens n'est aujourd'hui réalisable[21]. Toutefois, depuis quelques années, la suggestion cartésienne qui, jusqu'à présent, n'avait au mieux provoqué que quelques haussements d'épaule, est à considérer avec bien plus de sérieux.

Si des *méta-miroirs*[22] tels que les avait rêvés Descartes n'existent pas, nous savons depuis 1967, grâce au physicien ukrainien Victor Veselago, que le concept de *réfraction à indice négatif* n'est pas contradictoire avec les principes de la physique moderne[23]. Son étude a été poussée plus loin en 2000 par le très anglais Sir John Brian Pendry évoquant avec précision la possibilité d'imaginer des *lentilles parfaites*[24], et surtout concrétisée en laboratoire en octobre 2006 grâce aux travaux de Pendry, de l'américain David R. Smith[25] et de l'écossais Ulf Leonhardt[26].

Suite notamment aux suggestions de Pendry, nous disposons donc maintenant de *méta-matière* de permitivité électrique et de perméabilité magnétique négatives, essentiellement formée à partir de nanostructures faites de faisceaux de fils métalliques non magnétiques et de résonateurs annulaires finement « coupés », permettant à cause de leurs formes des *réfractions d'indice négatif*, c'est-à-dire telles qu'un rayon arrivant en M sur un tel matériau soit réfracté en passant de l'autre côté de la tangente - il y a donc pénétration effective dans un second milieu - mais **en restant du même côté de la normale**. Un index tel que par exemple $(N, T) = (+, -)$ est donc devenu possible, ce qui fournit aux Ovales une application nouvelle (très) éventuelle, et donne en tout cas une interprétation plus plausible aux étranges réflexions amorties imaginées par Descartes.

---

21. Il ne faut peut-être jurer de rien, car une telle possibilité aurait des conséquences militaires importantes, et pourrait donc rester cachée au fond d'un laboratoire.

22. Ce préfixe grec que nous introduisons ici est employé dans le sens de miroirs allant *au-delà* de l'existant ; nous l'avons emprunté aux méta-matériaux évoqués ci-après.

23. C'est-à-dire, *grosso modo*, les équations de Maxwell.

24. *Negative refraction makes a perfect lenses*, Physical Review Letters. On doit aussi signaler que, pour des commodités de calcul, des physiciens avaient déjà introduit à la fin du dix-neuvième siècle des indices de réfraction complexes.

25. Co-récipiendaire avec Pendry et *al.* en 2004 d'un *Descartes Research Prize*, bien nommé, attribué par l'Union Européenne.

26. La presse a présenté ces avancées technologiques étonnantes comme un pas vers la possibilité de rendre invisibles certains objets, dont par exemple des avions.

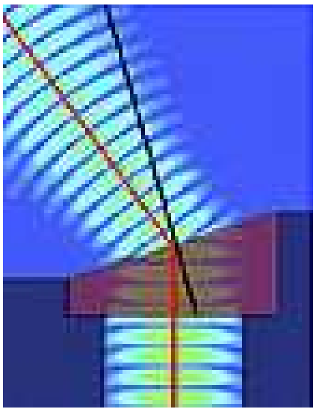


FIGURE 8.5 – *Un schéma de réfraction négative dû à John Pendry*

Plus précisément, nous verrons plus loin que la considération de ces courbes engendre, en plus de l'astigmatisme absolu et de cinq effets de loupes, les seuls à être connus jusque 1967, trois *méta-stigmatismes*, d'index $(N, T) = (+, -)$ et trois *méta-loupes*, d'index $(N, T) = (-, +)$. Pour ces derniers systèmes, les rayons issus d'un point A de l'axe pourraient, après méta-réfraction, sembler provenir d'un autre point B de l'axe, comme dans le cas d'une loupe ordinaire, à cela près que, pour tout point M, MA et MB seraient de côtés différents de la normale, et donc que le rayon lumineux resterait du même côté de celle-ci en pénétrant dans une méta-matière délimitée par une Ovale.

Si bien entendu il est totalement inimaginable que Descartes ait pu prévoir une telle évolution, on ne peut passer décemment sous silence le fait que, emporté par la toute puissance des formules mathématiques, il n'avait finalement pas tout à fait tort d'envisager dans ce cas des développements ultérieurs *a priori* extravagants, même si la forme qu'il avait envisagée n'a pas, au moins pour l'instant, été tout à fait celle de l'avenir [27].

27. Ce n'est sans doute pas évoquer ici le plus futile effet de la méthode cartésienne que de rappeler, à propos de ce point concernant ses mythiques Ovales, que certaines symétries, au moins à première vue purement calculatoires, peuvent justifier la découvertes de concepts théoriques et et d'applications pratiques totalement nouveaux : de cela en tout cas nous pouvons le remercier.

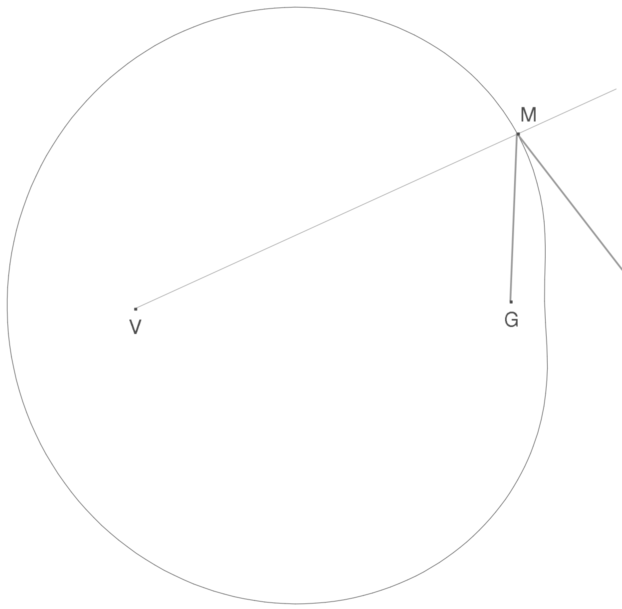


FIGURE 8.6 – *Un effet de méta-stigmatisme réel : les rayons lumineux issus de H vont converger en G (et inversement)*

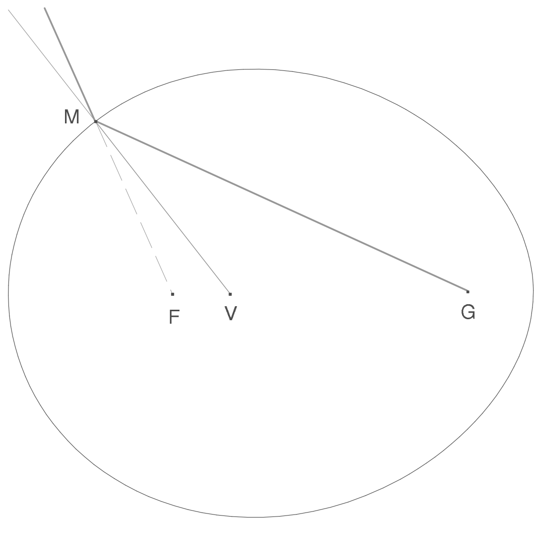


FIGURE 8.7 – *Un effet de méta-loupe : un point lumineux placé en G est perçu comme étant en F*

Quatre problèmes optiques du XVII$^{\text{ème}}$ siècle

Pour finir cette rapide revue de l'état des problèmes jusqu'en 1637, il est sans doute tentant de rassembler, sous une même forme, les caractéristiques des quatre cas fondamentaux de recherche de stigmatisme géométrique, en les séparant en deux catégories pour lesquelles l'un au moins des deux points considérés est à l'infini (on parle alors d'*anaclastique*), et en les découpant de nouveau en deux sous-genres réflexif et réfractif. Une telle méthode n'est pas contraire à l'esprit du *Discours*[28]...

Une erreur classique consiste à croire que le phénomène réflexif est un cas particulier du phénomène réfractif : ce n'est naturellement pas exact, il vaudrait mieux parler ici de *cas limite* ; mais même cette précaution serait fautive.

A **ANACLASTIQUE**

Le point à l'infini est situé sur l'axe focal des coniques impliquées.

I **ANACLASTIQUE RÉFLEXIVE**

- Courbe solution : une parabole
- Point brûlant : son foyer
- Datation : vers 250 avant Jésus-Christ ?
- Découvreur : un prédécesseur d'Apollonius ?
- Deux applications : télescope, phare parabolique d'automobile.

II **ANACLASTIQUE RÉFRACTIVE**

- Courbe solution : une demi-conique à centre
- Point brûlant : l'un de ses foyers
- Datation : 1628/1629
- Découvreur : Descartes
- Une application : lunette astronomique.

28. Les indications données ci-dessous sont évidemment fragmentaires : le miroir plan est le moyen le plus simple d'obtenir un stigmatisme réflexif, Ibn Sahl a peut-être connu les anaclastiques (mais comme une hypothèse sans démonstration), Beeckman a eu sa part dans la mise au point des mêmes anaclastiques, la date de 250 avant Jésus-Christ n'est proposée qu'à au moins cinquante ans près, le stigmatisme réflexif engendré par une hyperbole est nécessairement virtuel *etc.* Cela étant, ce tableau simplificateur donne une vision globale des quatre problèmes qui peut aider un lecteur non physicien à démêler les différentes solutions proposées sur vingt siècles de progrès scientifiques.

B **STIGMATISME**

I **STIGMATISME RÉFLEXIF**

- Courbe solution : une conique à centre
- Points brûlants : ses deux foyers
- Datation : Vers 250 avant Jésus-Christ ?
- Découvreur : un prédécesseur d'Apollonius ?
- Une application : acoustique des salles à voûtes elliptiques.

II **STIGMATISME RÉFRACTIF**

- Courbe solution : une Ovale cartésienne
- Points brûlants : deux de ses trois foyers
- Datation : entre 1628 et 1637
- Découvreur : Descartes
- Une application : lunettes de correction visuelle.

Notons enfin que, dans le langage de l'époque cartésienne directement hérité des Grecs, les trois premiers cas ci-dessus correspondent à des solutions de *problèmes plans*, c'est-à-dire conduisant à des équations de degré 2 au plus donc solubles à la règle et au compas [29] : par exemple, on peut construire de manière classique l'intersection de l'une de leurs courbes solutions avec n'importe quelle droite *etc*. Le dernier au contraire met en jeu une courbe de degré 4 : il s'agit donc d'un problème *solide*. En tout cas, non seulement les courbes recherchées existent, mais même elles peuvent toutes « être reçues en géométrie », et c'est une chance pour le système cartésien.

Ce que sont les Ovales de Descartes

Renvoyant à une partie ultérieure l'exposé de justifications mathématiques pleinement conformes aux usages de rigueur du vingt-et-unième siècle (voir page 386 et suivantes), nous nous contenterons de donner ici des indications peu justifiées mais suffisantes, dans un premier temps, pour savoir ce que sont ces courbes et pouvoir interpréter le texte cartésien avec toute la précision nécessaire en cas de besoin.

29. Ce n'était *a priori* pas évident pour l'anaclastique.

Les quatre genres d'Ovales vus par Descartes

Fidèle à son précepte (déjà rappelé) de *faire partout des dénombrements si entiers, & des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre* (*Discours*, p. 20, AT VI p. 19), Descartes nous propose une classification de ses Ovales en quatre genres, notés ici I, II, III et IV, pour chacun desquels il fournit une définition distincte par le biais d'une construction géométrique appropriée [30]. Il indique (p. 357 des *Essais*, AT VI p. 428) que pour lui ces Ovales ne forment en fait essentiellement qu'une seule et même famille, mais il ajoute une légère restriction puisqu'il explique qu'elles « *semblent être quasi de même nature* »...

Le premier genre, qui servira à régler le problème général de l'astigmatisme classique entre deux points, est celui pour lequel Descartes donne le plus de détails. Sa figure est complexe et maladroite ; pour des raisons de facilité de lecture et de compréhension, nous en avons refait une, différente [31], avec des lettres différentes, mais le dictionnaire suivant permet de passer de l'une à l'autre avec facilité (à part qu'il y a chez Descartes deux points appelés 1, un fixe et un variable, ce qui contribue largement à l'obscurité du dessin !)

Ce travail	A	F	H	P	m	Q	p	s	t	M
Descartes	A	G	F	1	7	R	5	6	8	1

Au départ, on dispose de quatre points fixes (A, F, H, P) tels que A appartienne au segment focal FH et P soit en dehors de l'axe. On construit une demi-droite d'origine A arbitraire, sauf à ne pas passer par les foyers, dans l'ordre les points (Q, p, s) comme sur la figure et vérifiant les égalités $AQ = AF$, $Hp = HP$ et $Qs = PF$, et l'on définit le rapport n (l'indice du

30. Nous prouverons ci-dessous que sa classification est incomplète, ce qu'il n'a pas vu. Il en sera de même chez Paul Tannery, pourtant mathématicien très pointilleux dans son travail cartésien - voir AT VI pp. 325-328 et les pp. 331-339 du tome VI de ses *Mémoires scientifiques*, chez Édouard Privat et Gauthier-Villars, 1926, ces deux textes très voisins méritant d'ailleurs une étude très précise - ainsi que chez les commentateurs plus récents. N'indiquons ici qu'une seule autre erreur, assez étonnante : « *L'une de ces courbes (la* cordiforme, 2^o *et* 3^o *genres de Descartes) enveloppe toujours l'autre* » (AT X, p. 359). Tannery ignorait donc que la branche extérieure pouvait être oviforme.

31. Il nous a fallu notamment inverser la droite et la gauche pour des raisons d'homogénéité entre les quatre genres.

milieu intérieur à l'Ovale, qui contient notamment F), par l'égalité $n = \dfrac{Ap}{As}$ d'où $n > 1$ (« *en sorte qu'A6 soit moindre qu'A5* »). Ces sept points et ce nombre constituent la partie « fixe » de l'Ovale[32].

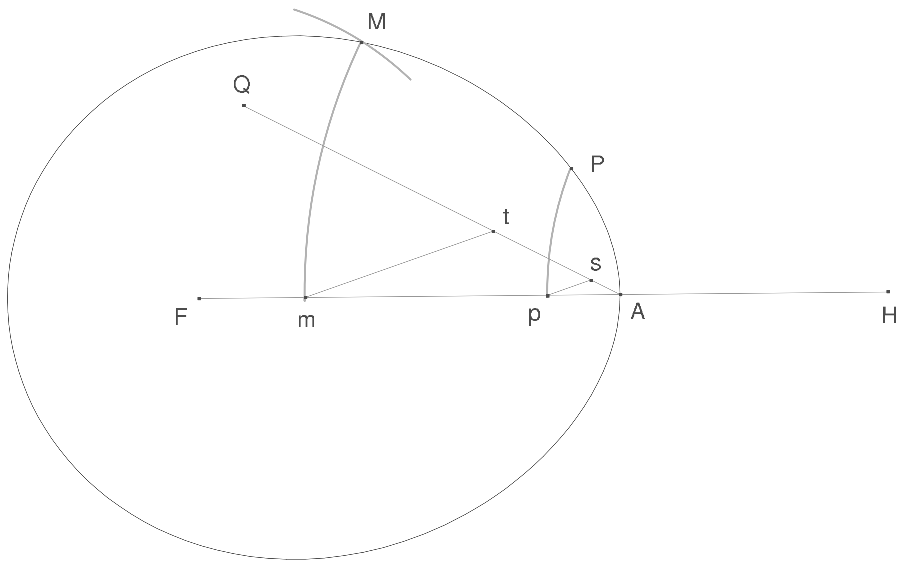


FIGURE 8.8 – *La construction point par point du premier genre*

Introduisons maintenant un point m arbitraire sur l'axe situé du même côté de A que F : on en déduit un autre point variable t sur la demi-droite AQ par le parallélisme de mt et de ps, ce qui donne $At = \dfrac{Am}{n}$ par le théorème de Thalès appliqué aux triangles homothétiques $\begin{bmatrix} pAs \\ mAt \end{bmatrix}$. Enfin le point courant M de l'Ovale est obtenu comme l'un des points communs - s'ils existent - aux cercles de centres (F, H) et de rayons respectifs (tQ, mH)[33].

On calcule aisément sur la figure (Descartes ignorait les mesures algébriques), $MF = tQ = AQ - At = AF - \dfrac{Am}{n}$, $MH = mH = mA + AH$, d'où l'équation

32. Ici nous avons supposé P connu et n inconnu mais on aurait pu faire le contraire.

33. Sur la figure de Descartes, cette courbe est évoquée par une espèce d'ellipse en pointillés beaucoup trop symétrique.

de l'ovale $MH + nMF = AH + nAF$. Plus tard [34] Descartes introduira $\frac{d}{e}$ (noté n par nous), et $z = Am$, d'où $MH = AH + z$ et $MF = AF - \frac{e}{d}z$, puis encore $MH + \frac{d}{e}MF = AH + \frac{d}{e}AF$, respectivement équations paramétriques et équation bipolaire de l'Ovale du premier genre [35].

Or l'étude mathématique de la page 390 nous fournit six types possibles d'équation bipolaire, à savoir

$$\rho - \varepsilon hr = kc, \qquad kr - R = \varepsilon hd, \qquad k\rho - \varepsilon hR = e.$$

Essayons de comparer avec l'invariance de $MH + nMF$. Puisque n est positif, les deux médianes sont à rejeter et il faut prendre $\varepsilon = -1$ (branche intérieure). L'un des deux points F et H est donc le premier foyer puisque ρ apparaît dans les deux cas possibles. Puisque la courbe présente un point A entre F et H, c'est que l'autre est le troisième foyer. Enfin la figure - ou un calcul très élémentaire, sachant que $n > 1$ - montre que la courbe possède un point V du même côté de F par rapport à A : F est donc le premier foyer et H le troisième [36], et nous savons maintenant que l'équation des Ovales du genre I est de la forme $k\rho + hR = e$ et que $n = \frac{k}{h} > 1$.

Un exemple très particulier et bien verrouillé

En page 356 des *Essais* (AT VI, page 428), Descartes illustre par une figure une construction continue (grâce à une corde) des points C de l'une des Ovales possibles du premier genre. Un examen attentif de son texte et de sa figure, montre que G est le premier foyer, K le second et F le troisième, et que $FA = AG$, L est tel que $\frac{LF}{LG} = n$ et enfin K est le milieu de AL. Si G et F sont clairement des foyers de l'Ovale, que K en soit un autre n'est pas du tout mis en évidence : Descartes brouille ici volontairement les pistes [37].

34. Page 350 des *Essais*, page 431 de AT VI.

35. Il posera également $AF = b$ et $AH = c$, mais l'introduction de la lettre c qui a une autre signification dans notre présentation générale des coniques - à savoir la distance entre premier et second foyer - nous a obligé à ne pas en tenir compte ici.

36. D'où les noms que nous leur avons donnés, distincts de ceux de Descartes.

37. Pour ne pas ajouter à l'obscurité, nous avons pour une fois gardé exactement les notations cartésiennes.

Une équation polaire de l'Ovale n'est nullement claire à partir de ces données. Seul un décryptage patient des formules générales donnant les abscisses des sommets de la page 398, particulièrement $GA = \dfrac{k+h}{1+h}\,c$, permet d'avancer ; ainsi $AF = GF - GA = \dfrac{(k+h)(k-1)}{1-h^2}\,c$, et l'égalité $GA = AF$ équivaut à la relation $k+h = 2$; alors $GA = AF = \dfrac{2c}{1+h}$, d'où $AK = GA - GK = \dfrac{1-h}{1+h}\,c$, puis $LF = 2AK + AF = 2\,\dfrac{2-h}{1+h}\,c = \dfrac{2kc}{1+h}$, $LG = AG - AL = \dfrac{2hc}{1+h}$ et $\dfrac{LF}{LG} = \dfrac{k}{h} = n$. La construction de Descartes introduit donc bien K comme second foyer [38].

Deux des équations bipolaires donnent $h\,CK = kc - CG$ et $h\,CF = e - k\,CG$, d'où $h\,(2\,CK - CF) = 2\,kc - e - h\,CG$ et enfin, compte tenu des égalités $e = \dfrac{k^2-h^2}{1-h^2}\,c = 2\,\dfrac{k-h}{1-h^2}\,c$, l'égalité

$$CG + 2\,CK - CF = AL.$$

Si la corde représentée sur la figure a pour longueur une constante $\mathcal{L}$, on a

$$\mathcal{L} = GC + CK + KC + CE = CG + 2\,CK - CF + EF = AL + EF.$$

Par suite, $EF = \mathcal{L} - AL$ est elle-même une constante, ce qui finit de justifier les affirmations cartésiennes si soigneusement embrouillées.

On obtient ainsi une famille à un paramètre d'Ovales pouvant être construites par un système mécanique de cordes. Il est clair que ce n'est pas le cas général [39], mais Descartes ne parle pas de ce point, auquel il a certainement dû réfléchir au vu de ses tentatives d'obtention de définitions générales de ce que doit être une courbe *reçue en géométrie*.

---

38. On peut noter les égalités $k = \dfrac{2n}{n+1}$, $h = \dfrac{2}{n+1}$ et $\dfrac{GK}{GA} = \dfrac{1+h}{2} = \dfrac{n+3}{2(n+1)}$.

39. La présence de coefficients entiers dans l'égalité centrale provient du fait que le rapport $\dfrac{GA}{AF}$ est rationnel (ici égal à 1).

Les trois autres genres

Les trois autres genres sont obtenus par la même technique de constructions graphiques (l'équation au sens moderne en coordonnées bipolaires n'apparaît pas explicitement, seulement comme contenu abstrait de manipulations géométriques à l'ancienne). En adaptant avec souplesse les méthodes précédentes à ces trois autres genres, chacun peut désormais lire le texte original sans difficulté spéciale.

Nous allons montrer qu'en fait, il existe bien deux autres genres analogues au premier (le troisième et le quatrième), mais par contre que le deuxième mérite un traitement à part, car il doit éclater en trois composantes deux à deux distinctes.

Pour les genres III et IV, F est bien toujours le premier foyer, mais H en est le second [40]. Pour ces deux genres, la situation est entièrement analogue à celle du genre I. Entrons un peu plus dans le détail.

Gardant les mêmes lettres [41] F, A et H, avec ici A extérieur au segment $[FH]$ et du même côté de F que H, le genre III se caractérise par les égalités [42] $\varepsilon = 1$ (branche extérieure), $n = \dfrac{1}{h}$, $nMF - MH = nAF - AH$ et

$$\rho - hr = kc.$$

Avec la même configuration de A, F et H, le genre IV se caractérise par les relations $\varepsilon = -1$ (branche intérieure), $n = \dfrac{1}{h}$, $nMF + MH = nAF + AH$ et

$$\rho + hr = kc.$$

Ces deux genres pourraient être presque confondus l'un avec l'autre, car *il s'agit naturellement de la même Ovale* [43], dont on a simplement séparé parties

40. Et devrait donc être noté G si nous étions absolument fidèle à nos notations générales.

41. Pour certaines raisons, Descartes modifie parfois ses notations ce qui rend plus lourde la lecture de son travail, visiblement maîtrisé quant au fond mais pas correctement formalisé, même pour le dix-septième siècle.

42. À l'image de Descartes, qui ne traite vraiment à fond que le genre I, nous ne donnons pas ici de détails : qu'il suffise de dire que le travail est très analogue.

43. On montre que l'égalité $H = A$ fournit le cas particulier de la partie extérieure d'un limaçon à point double réel pour le genre III, l'extérieure étant obtenue pour le genre IV.

extérieure (III) et intérieure (IV). En tout cas ils sont fortement corrélés, avec $\rho - \varepsilon hr = kc$ comme équation commune. Par contre, le genre II est assez nettement différent, et mérite une étude plus poussée.

Pourquoi la classification cartésienne est-elle incomplète ?

Raisonnant de manière abstraite à partir d'une étude mathématique moderne des Ovales, on s'aperçoit très vite qu'une classification raisonnée est finalement basée sur la valeur d'un paramètre ($\varepsilon = \pm 1$, marquant le caractère intérieur ou extérieur de la branche) et le choix de deux foyers pris parmi les trois : cela conduit à décomposer un dénombrement à la Descartes en six familles et non quatre. Les paragraphes suivant montrent comment appliquer cette remarque rationnelle à l'organisation cartésienne de 1637.

Jusqu'à présent, les trois genres de Descartes étudiés ici, à savoir I, III et IV, étaient assez simples et correspondaient effectivement à une branche bien précise de l'Ovale et du choix de deux foyers, notés par nous F et H, parmi les trois possibles. Notons que Tannery a bien raison de souligner la grande ressemblance entre les les genres I et IV, pour laquelle l'équation bipolaire est identique, qui ne diffèrent que par la distance des foyers ($AF + AH$ pour I, et $AF - AH$ pour IV) : il est donc tenté de les identifier[44]. Sur les genres II et III, la remarque analogue qu'il fait semble normale, mais est en fait plus discutable car l'examen du genre II est plus subtil que celui des trois autres.

De fait, le genre II est nettement plus complexe, et il est temps d'essayer de le décrypter. Descartes le définit, comme pour le premier, avec A entre F et H, et par une égalité de la forme $nMF - MH = nAF - AH$ qui semble coller aux relations $nMF + MH = nAF + AH$ (I), $nMF - MH = nAF - AH$ (III) et, de nouveau, $nMF + MH = nAF + AH$ (IV).

La classification cartésienne, apparemment impeccablement bien balancée et symétrique, serait donc finalement la bonne ? Il n'en est rien. S'il est exact que ce genre II repose encore sur une disposition de A, F et H comme dans le genre I (A intérieur au segment FH), et si son équation bipolaire $nMF - MH = nAF - AH$ est bien la même que celle du genre III (ce qui

44. « *Car, au fond, sa première et sa quatrième ovale sont une même courbe* », p. 332 de ses *Mémoires* : en fait, il veut dire qu'il s'agit dans les deux cas d'une branche intérieure, ce qui est vrai.

fait dire à Tannery que, finalement, II et III sont une seule et même Ovale), il faut en fait le décomposer en trois sous-genres.

En effet un peu de calcul, crayon en main, montre que l'on peut (que l'on doit) décomposer le genre II suivant la technique ci-dessous

a) Pour $n = k$, $\varepsilon = -1$ (branche intérieure) et F et H respectivement second et troisième foyer [45], avec $n = k$ et $kr - R = -hd$.

   Connaissant les abscisses des quatre sommets (voir page 398), on peut en déduire h et c (k est déjà connu). On trouve alors notamment $h = n\,\dfrac{AH - nAF}{AH + AF}$, ce qui implique aussitôt l'inégalité $nAF < AH$.

b) Pour $\varepsilon = 1$ (branche extérieure) et F et H respectivement encore second et troisième foyer, avec $n = k$ et $kr - R = hd$.

   Ici la comparaison avec les abscisses des quatre sommets donne notamment $h = \dfrac{nAF - AH}{AF + AH}$ et $c = AF\,\dfrac{2AH - (n-1)AF}{(n-1)(AH + AF)}$, ce qui implique aussitôt les inégalités $(n-1)AH < n(n-1)AF < 2nAH$.

c) Pour $\varepsilon = 1$ (branche extérieure) et F et H respectivement premier et troisième foyer, avec $n = \dfrac{k}{h}$ et $k\rho - hR = e$.

   Ici la comparaison avec les abscisses des quatre sommets donne notamment $c = AF\,\dfrac{(n-1)AF - 2AH}{(n-1)(AF + AH)}$, ce qui implique aussitôt l'inégalité $2AH < (n-1)AF$.

Nous noterons naturellement II_a, II_b et II_c ces trois sous-genres. En y ajoutant I, III et IV, on obtient une classification en six items qui établit un équilibre parfait entre les deux valeurs possibles pour ε et les trois choix de la paire de foyers, et l'on retrouve bien les six types d'équations bipolaires des pages 386 et suivantes.

45. À noter qu'ici l'équation bipolaire devrait plutôt être écrite sous la forme légèrement différente $MH - nMF = AH - nAF$, car $nAF - AH < 0$ dans ce cas.

Il est dès lors facile de montrer que les genres I, II$_a$ et IV sont les trois choix possibles de foyers pour la branche intérieure, et que les genres II$_b$, II$_c$ et III sont les trois choix possibles de foyers pour la branche extérieure[46].

Comme les inégalités ci-dessus entre n, AF et AH s'excluent mutuellement, nous nous trouvons donc en fait devant des conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir détecter, en un coup d'œil, dans quel cas on se trouve[47].

Tous ces calculs - très élémentaires - effectués, on peut regrouper ces résultats dans le tableau suivant[48]

genre	ε	foyers	n	équation
IV	-1	$1,2$	$\frac{1}{h}$	$\rho + hr = kc$
I	-1	$1,3$	$\frac{k}{h}$	$k\rho + hR = e$
II$_a$	-1	$2,3$	k	$kr - R = -hd$
II$_b$	1	$2,3$	k	$kr - R = hd$
II$_c$	1	$1,3$	$\frac{k}{h}$	$k\rho - hR = e$
III	1	$1,2$	$\frac{1}{h}$	$\rho - hr = kc$

Dans ce tableau, résumant les caractéristiques des six genres définis ci-dessus, dont les symétries internes sont très frappantes et justifient amplement ce

46. Tannery avait raison de dire que I et IV représentent la même courbe, mais il fallait y adjoindre II$_a$, ce qu'il n'avait pas prévu, et qu'il en allait de même pour III et les deux parties restantes du II.

47. Les cas limites $nAF = AH$ ou $(n-1)AH = 2AH$, donnent respectivement un cercle et un limaçon de Pascal à point double isolé, deux cas limites d'Ovales cartésiennes.

48. « foyers $= (1,3)$ » signifie que notre F est le premier foyer et H le troisième.

découpage complétant la démarche cartésienne malheureusement incomplète, les trois premières lignes correspondent aux trois manières de regarder une branche intérieure, les autres étant associées à une branche extérieure. C'est aussi à l'aide de ce tableau que l'on sera conduit plus loin à étudier les manières d'utiliser les Ovales cartésiennes en optique, en y ajoutant une nouvelle distinction entre ce qui se passe au voisinage de chacun des deux sommets, ce qui donnera finalement douze situations particulières à examiner avec soin.

Autres classifications des Ovales de Descartes

Connaître la classification ci-dessus est indispensable pour lire le texte, car il repose intégralement sur elle. Cela dit, il existe d'autres classifications plus simples ou plus complètes, qui s'imposent l'une ou l'autre suivant le point de vue à étudier.

En voici l'essentiel, en admettant toujours les notations des justifications mathématiques données plus loin (voir page 386). En dresser la liste - non exhaustive... - montre bien la richesse et la complexité des points de vue qu'elles appellent.

A) Il n'existe qu'un seul type d'Ovale, défini par un triplet (h, k, c) et l'équation du quatrième degré afférente. Plus précisément, à similitude près, une Ovale cartésienne est définie par un paramètre double [49] (h, k). Cela introduit par conséquent une certaine souplesse dans le choix d'une Ovale pour tel ou tel type d'application.

B) Il existe deux types d'Ovales : les branches extérieures ($\varepsilon = 1$) et les branches intérieures ($\varepsilon = -1$). Chacune d'elles est l'une des deux composantes connexes du type unique de l'item précédent.

C) Il existe une autre façon de classer en deux types les Ovales : l'un *cordiforme* pour $k < 1 + h$ et l'autre *oviforme*, différant uniquement par l'allure de la partie d'abscisses positives de sa branche extérieure, lisse dans le premier cas, creusée dans le second (*cf.* page 343).

49. Rappelons qu'à similitude près, il n'existe qu'un cercle, qu'une parabole, et une famille à un paramètre de coniques à centre.

D) Il existe trois types d'Ovales définis par Paul Baudoin dans son livre [50] (*Les Ovales de Descartes et le Limaçon de Pascal*, Vuibert, Paris 1938). Il y considère deux foyers U et V liés au point courant M par des égalités de la forme $MU + m\,MV = C$, $MU - m\,MV = C$ ou $m\,MV - MU = C$ où la constante C est strictement positive et m un réel strictement compris entre 0 et 1, inverse de ce que nous avons noté n.

En fait le premier type de Baudoin est la réunion des genres I et IV de Descartes, son troisième le cas particulier II_a du second, et le troisième réunit le genre III et les deux cas particuliers II_b et II_c du genre II.Il en résulte que les branches extérieures forment le second type de Baudoin, et que les intérieures se répartissent entre les deux autres types.

E) Il existe une autre façon de classer en trois types les Ovales : les intérieures, les extérieures oviformes et les extérieures cordiformes.

F) Il existe quatre types d'Ovales (obtenus tout autrement que par la classification cartésienne) : les intérieures associées à une extérieure oviforme [51], les intérieures associées à une extérieure cordiforme, les extérieures oviformes et les extérieures cordiformes.

G) Il existe six types d'Ovales obtenus par raffinement de la classification cartésienne : les types I, II_a, II_b, II_c, III et IV définis ci-dessus. **C'est cette classification, suffisamment riche tout en restant simple qui paraît la meilleure pour une étude moderne des Ovales**.

H) Il existe une autre façon de classer en six types les Ovales : par raffinement de la classification de Paul Baudoin, en distinguant les cas particuliers oviforme et cordiforme pour chacun d'eux.

I) Il existe huit types d'Ovales obtenus à partir des quatre genres cartésiens I, II, III et IV, en distinguant les cas particuliers oviforme et cordiforme pour chacun d'eux.

---

50. Publié à l'age de 78 ans. Il avait été nommé professeur agrégé de mathématiques et de dessin graphique au lycée Louis-le-Grand en 1912.

51. Rappelons que la connaissance d'une partie, même infime, d'une courbe algébrique suffisamment régulière implique la connaissance de toute sa globalité ; en particulier la branche intérieure d'une Ovale définit parfaitement sa partie extérieure et réciproquement.

J) Il existe neuf types d'Ovales : I, II_a, II_b oviforme, II_b cordiforme, II_c oviforme, II_c cordiforme, III oviforme, III cordiforme et IV.

K) Il existe douze types d'Ovales obtenus à partir des six types I, II_a, II_b, II_c, III et IV en distinguant les cas particuliers oviforme et cordiforme pour chacun d'eux.

Tout auteur d'article portant sur ces courbes devrait soigneusement énoncer dans le cadre de laquelle de ces douze classifications il se place.

Pourquoi les Ovales permettent-elles le stigmatisme ?

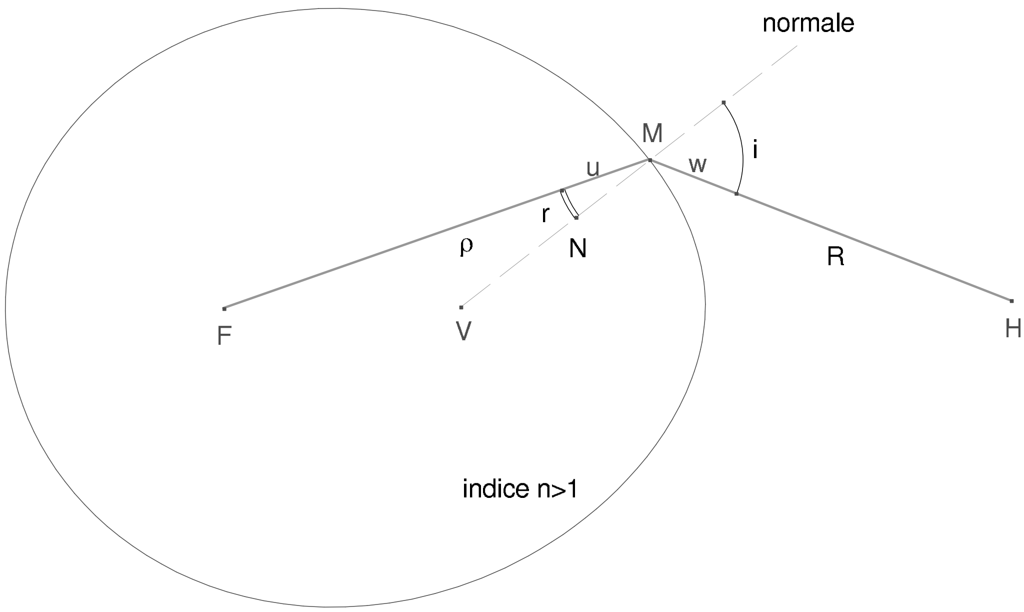


FIGURE 8.9 – *Une solution actuelle du problème inverse cartésien*

Permettons-nous cependant, juste pour ces quelques lignes, d'employer toute la force des mathématiques classiques (forcément post cartésiennes) pour indiquer comment aujourd'hui rechercher des conditions d'astigmatisme, c'est-à-dire au fond résoudre un problème différentiel, conduit nécessairement aux Ovales. Si H et F sont deux points fixes tels que tout rayon issu de H doit passer par F après réfraction, nous allons chercher à déterminer une relation « moderne »[52] nécessaire et suffisante entre $\rho = MF$ et $R = MH$ pour que la réfraction se fasse suivant la loi $\sin\hat{\imath} = n \sin\hat{r}$ avec $n > 1$ et que V, pied de la normale à la surface de révolution cherchée en M, soit entre F et H.

Introduisons donc deux vecteurs[53] unitaires u et w tels que $MF = \rho u$ et $MH = R w$, d'où $M = F - \rho u = H - R w$, puis en passant aux différentielles, $dM = -d\rho\, u - \rho\, du = -dR\, w - R\, dw$. Comme u et du sont orthogonaux (comme w et dw) puisque $(u|u) = 1$, on a $d\rho = -(dM|u)$ et $dR = -(dM|w)$. Si l'on note $N = MV$, vecteur normal à la surface en M et ϖ le vecteur unitaire orthogonal au plan de la figure, alors par définition $(dM|N) = 0$; or l'utilisation du produit vectoriel donne

$$N \wedge u = \|N\| \big(\sin(N,u)\big)\, \varpi = \|N\| \,(\sin\hat{r})\, \varpi,$$

$$N \wedge w = \|N\| \big(\sin(N,w)\big)\, \varpi = \|N\| \big(\sin(\pi + \hat{\imath})\big)\, \varpi = -\, \|N\| \,(\sin\hat{\imath})\, \varpi.$$

En résulte l'égalité

$$(\sin\hat{\imath} - n \sin\hat{r})\, \|N\|\, \varpi = -\, N \wedge (w + nu).$$

Par suite l'annulation de $\sin\hat{\imath} = n \sin\hat{r}$ équivaut à la colinéarité de N et de $w + nu$, c'est-à-dire encore aux égalités

$$0 = -(dM|w + nu) = dR + n\, d\rho = d(R + n\rho).$$

Il est donc parfaitement logique, pour un « moderne », de s'intéresser aux lieux des points M liés à deux points fixes par une relation affine du type $MH \pm n\, MF = \text{Constante}$.

Cela dit, nous pensons qu'une telle démarche, complètement dépendante du calcul différentiel et intégral que Newton et Leibniz mettront au point entre 1665 et 1700, était très clairement opposée à la forme d'esprit et aux connaissances de l'algébriste Descartes, et il faut certainement rechercher ailleurs que dans cette manipulation de géométrie infinitésimale l'origine de la découverte de ces courbes résolvant le problème du stigmatisme entre deux points.

Nous reviendrons plus loin (page 382) sur ce très difficile problème.

52. C'est-à-dire au minimum un contemporain de Newton ou, plus sûrement, un mathématicien des siècles suivants, comme Louis Poinsot (1777-1859) auquel nous empruntons une idée vectorielle très puissante.

53. Dans ce paragraphe, nous oublierons volontairement les flèches situées au-dessus des vecteurs, et utiliserons librement les notations classiques des produits scalaire et vectoriel ainsi que de l'algèbre affine.

La preuve du stigmatisme chez Descartes

René Descartes a démontré que le premier genre de ses Ovales fournissait une solution au problème du stigmatisme rigoureux. Il a procédé en plusieurs étapes : dans ce qui suit, où nous suivons rigoureusement ses notations [54], le premier nombre signifie le numéro de la page dans l'édition originale des *Essais*, le second le numéro de la page dans le sixième volume de l'édition Adam et Tannery (AT VI)

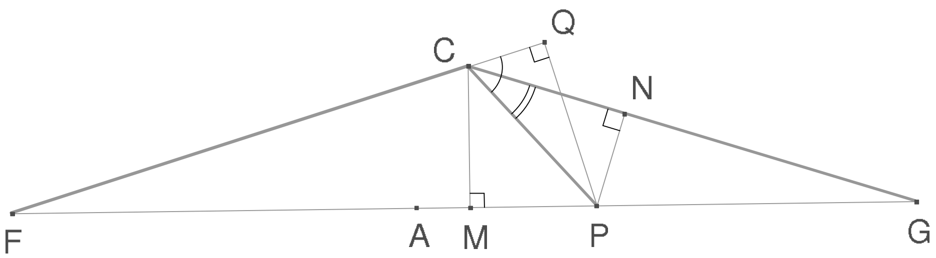


FIGURE 8.10 – *La figure fondamentale pour l'exposé de la preuve cartésienne*

a) (344,416) Pour la première fois, l'Ovale est introduite sous forme paramétrique en une variable z, et son intersection au point courant C défini par $R = FC = FA + z = c + z$ et $\rho = GC = GA - \dfrac{e}{d}z = b - \dfrac{z}{n}$ d'avec le demi-cercle d'équation $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$ le conduit à une équation du second degré en z, à savoir [55]

$$z^2 + \frac{2n\,(bc(n-1) - (cn+b)v)\,z + n^2(v^2 - s^2)(b+c)}{bn^2 + c + (1-n^2)v} = 0.$$

54. Nous avons simplement introduit la variable $n = \dfrac{d}{e}$ afin d'alléger un petit peu ses écritures. Attention : ici M n'a pas la signification usuelle, ce n'est que la projection orthogonale sur l'axe des ordonnées du point courant C.

55. Cela résulte de l'élimination de x et y entre les trois égalités

$$x^2 + (y-v)^2 = s^2, \quad (c+z)^2 = (c+y)^2 + x^2, \quad (bn-z)^2 = n^2\big((y-b)^2 + x^2\big)$$

(ne pas oublier que, contrairement à nos habitudes, l'abscisse x est comptée vers le haut et l'ordonnée y vers la droite). Que l'équation en z soit du second degré est une chance ; normalement le résultat de l'élimination donne ici un polynôme de degré 4.

b) (349,421) Puis il applique sa méthode des coefficients indéterminés pour écrire que cette équation en z a une racine au moins double[56]. Cela lui donne la position du pied P de la normale par l'égalité

$$AP = v = \frac{bcn(n-1) + (bn^2 + c)\, z}{n(cn+b) + (n^2-1)\, z}\,.$$

c) (360,431) Il vérifie enfin - toujours pour la seule Ovale du premier genre[57] - la relation $\sin\hat{\imath} = n \sin\hat{r}$. Il voit qu'elle équivaut à l'égalité $PQ = n\, PN$ où Q et N sont les projections orthogonales relatives de P sur les rayons vecteurs FC (prolongée au delà de C) et CG : c'est la définition usuelle des sinus dans des triangles rectangles[58].

Il introduit alors deux couples de triangles rectangles semblables[59] $\begin{bmatrix} PQF \\ CMF \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} PNG \\ CMG \end{bmatrix}$ qui lui fournissent les égalités

$$PQ = \frac{PF.CM}{CF}, \quad PN = \frac{PG.CM}{CG}, \quad \frac{PF.CM}{CF} = n\, \frac{PG.CM}{CG}$$

soit enfin $PF.CG = n\, PG.CF$. Or Descartes connaît $AP = v$. Il en déduit les valeurs de PF, PG puis celles des deux produits $PF.CG$ et $PG.CF$, dont il vérifie que le rapport est bien n, ce qu'il fallait démontrer.

Il est intéressant de noter que Descartes aurait pu abréger son calcul : en effet, la loi des sinus dans un triangle selon laquelle les sinus des trois angles sont proportionnels aux trois côtés[60], que l'on applique aux triangles FCP et PCG, fournit l'égalité fondamentale $\dfrac{PF}{PG} = \dfrac{\sin\hat{\imath}}{\sin\hat{r}}$ qui allège de beaucoup le calcul précédent.

56. Comme le degré est 2, on peut obtenir rapidement la racine double z et en déduire la valeur de v.

57. Dont la construction point par point à été explicitée dans les pages (352,424).

58. Ici Descartes ne suit pas absolument son exposé de la loi de la réfraction : il aurait dû pour cela projeter orthogonalement F en H et G en K sur la normale CP ; les couples de triangles semblables $\begin{bmatrix} PQC \\ FHC \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} PNC \\ GKC \end{bmatrix}$ l'auraient conduits aux relations $PQ = PC\, \dfrac{FH}{FC}$ et $PN = PC\, \dfrac{GK}{GC}$, d'où la conclusion.

59. Ces similitudes sont justifiées par les égalités des angles de ces triangles.

60. Corollaire de la vingtième Proposition du Troisième Élément d'Euclide, elle est évidente si l'on introduit les hauteurs du triangle ; il semble sûr qu'elle ait été explicitement connue au moins de Ptolemée, Al-Tusi, Al-Kashi, Regiomontanus et *al.*

Déterminer le pied de la normale par les rayons vecteurs

Pour la suite [61] indiquons que l'on peut maintenant écrire la valeur de v sous une forme particulièrement intéressante, à savoir

$$v = \frac{(n\,AG)\,R - AF\,\rho}{nR + \rho} = \frac{nb\,R - c\,\rho}{nR + \rho}$$

qui résulte aussitôt des égalités

$$\frac{b+c}{v+c} = \frac{AG + AF}{v + AF} = \frac{GF}{PF} = 1 + \frac{PG}{PF} = 1 + \frac{PN}{PQ}\,\frac{CG}{CF} = 1 + \frac{CG}{n\,CF} = 1 + \frac{\rho}{nR}\,.$$

Par suite le nombre v est à la fois fonction homographique de z, n, R, ρ et de leur rapport !

Cette formule élégante n'est pas présente dans *La Géométrie*. Il serait pourtant très surprenant que Descartes ne l'ait pas rencontrée dans ses calculs préparatoires. Elle correspond au désir légitime de calculer $v = AP$, jusque là connu comme fonction homographique de z, à partir seulement des deux rayons vecteurs $\rho = CG$ et $R = CF$, ce qui est conforme à l'usage des coordonnées bipolaires dans toute cette partie, qui fait que chaque objet géométrique lié au point courant C doit pouvoir s'exprimer - rationnellement si possible - en ρ et R.

Bien entendu, à elle seule, cette égalité peut être vue comme **une expression, nécessaire et suffisante, de la relation** $\sin\hat{\imath} = n\,\sin\hat{r}$.

Fournissant ainsi la valeur de v, elle permet théoriquement de remonter jusqu'à une équation $P(R,\rho) = 0$ définissant la courbe résolvant le stigmatisme, à condition de savoir résoudre une équation différentielle [62], ou de pouvoir deviner une certaine solution particulière, dont il ne reste plus qu'à vérifier la pertinence : telle a très certainement été la procédure suivie par Descartes pour découvrir ses Ovales.

---

61. Une tentative de reconstruction de la résolution cartésienne du problème du stigmatisme rigoureux, page 382.
62. À l'époque, on disait *un problème inverse des tangentes*.

Ce à quoi Descartes destinait ses Ovales

Il nous faut maintenant entrer dans ce qui, pour Descartes, était sans aucun doute le point essentiel justifiant que près d'une page sur six de *La Géométrie* était dévolue aux Ovales : leurs applications à l'optique théorique, et surtout pratique (dans sa perception des choses).

Les douze effets optiques possibles basés sur les Ovales

À la page 352, nous avons défini un *index* (N, T), et ses quatre valeurs possibles pour les point situés au voisinage de l'un des deux sommets d'une branche donnée d'Ovale cartésienne. D'après les valeurs de cet index, nous pouvons définir à quel effet optique peut servir une fraction d'Ovale donnée. On obtient la classification ci-dessous

A) $(N, T) = (+, +)$ si les deux foyers concernés sont du même côté de la normale et du même côté de la tangente : il y a alors *effet loupe* ;

B) $(N, T) = (+, -)$ si les deux foyers concernés sont du même côté de la normale et de part et d'autre de la tangente : il y a alors *effet de méta-stigmatisme* ou *réfraction négative* ;

C) $(N, T) = (-, +)$ si les deux foyers concernés sont de part et d'autre de la normale et du même côté de la tangente : il y a alors *effet de méta-loupe* ;

D) $(N, T) = (-, -)$ si les deux foyers concernés sont de part et d'autre de la normale et de part et d'autre de la tangente : il y a alors *effet de stigmatisme absolu*.

Nous indiquerons plus loin (page 398) que les abscisses des quatre sommets d'une Ovale sont égales à $\alpha = \dfrac{-k - \varepsilon h}{1 - \varepsilon h}\, c$ et $\beta = \dfrac{k - \varepsilon h}{1 - \varepsilon h}\, c$, telles que

$$\frac{-k-h}{1-h}\, c < \frac{-k+h}{1+h}\, c \,\Big(< 0 < c\Big) < \frac{k+h}{1+h}\, c < \frac{k-h}{1-h}\, c \,\Big(< e\Big)$$

(cette suite d'inégalités permet de placer les quatre sommets et les trois foyers, d'abscisses 0, c et $c+d=e$, les uns par rapport aux autres).

Pour simplifier l'exposé, nous appellerons *sommets droits* ceux d'abscisse positive, situés entre le deuxième et le troisième foyer, et *sommets gauches* les autres (conformément à la figure générale ouvrant ce chapitre).

Nous pouvons maintenant dresser le tableau suivant qui repose sur celui des six genres complétant les quatre genres de Descartes (page 366) et les résultats de la page 412 ; il concerne les douze situations différentes possibles, selon que l'on est proche d'un sommet droit ou d'un sommet gauche d'une branche extérieure ou intérieure. Les quatre lignes décrivent les index suivant le sommet choisi et le type de branche, et les trois colonnes[63] correspondent aux choix des deux foyers concernés parmi les trois possibles $F(1)$, $G(2)$ et $H(3)$. Chaque genre apparaît deux fois, comme il est normal (deux sommets !). Par contre, le fait qu'une branche extérieure soit cordiforme ou oviforme est sans importance pour l'utilisation optique de tel ou tel appareillage basé sur l'Ovale considérée.

sommet		$(1,2)$		$(1,3)$		$(2,3)$
gauche extérieur	III	$(+,+)$	II_c	$(+,+)$	II_b	$(+,+)$
gauche intérieur	IV	$(-,+)$	I	$(-,+)$	II_a	$(+,+)$
droit intérieur	IV	$(-,+)$	I	$(-,-)$	II_a	$(+,-)$
droit extérieur	III	$(+,+)$	II_c	$(+,-)$	II_b	$(+,-)$

Lire les figures cartésiennes

Combiné avec la classification des effets optiques selon l'index dressé un peu plus haut, le tableau ci-dessus va nous permettre de lire ce que dit Descartes de chacune des applications optiques de la découverte de ses Ovales. Dans ces textes, le rapport $\dfrac{A5}{A6}$ est égal à l'indice n de réfraction considéré, toujours

63. En fait, au nombre de six, pour indiquer le genre associé.

supposé strictement supérieur à 1, et l'intérieur de la courbe est supposé plus réfringent que son extérieur [64].

(A) **Le premier genre**

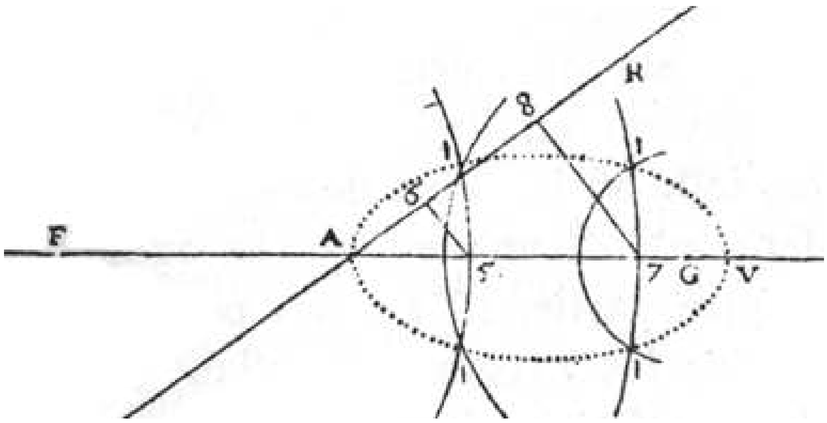


FIGURE 8.11 – *Le premier genre d'Ovale*

Ici A est le sommet droit et V le sommet gauche d'une branche intérieure.

> *Outre cela en chascune de ces ovales il faut considerer deux parties, qui ont diverses proprietés : a sçavoir, en la premiere, la partie qui est vers A, fait que les rayons, qui estant dans l'air viennent du point F, se retournent tous vers le point G, lorsqu'ils rencontrent la superficie convexe d'un verre, dont la superficie est $1A1$, & dans lequel les refractions se font telles, que suivant ce qui a esté dit en la Dioptrique, elles peuvent toutes estre mesurées par la proportion, qui est entre les lignes $A5$ & $A6$, ou semblables, par l'aide desquelles on a descrit cete ovale.*

Au voisinage de A, il y a *un effet de stigmatisme absolu* entre les deux points F et G, respectivement troisième et premier foyer. C'est l'application « concrète » idéale, cherchée pendant si longtemps.

64. Comme d'habitude, il s'agit en fait de l'intérieur de la surface de révolution engendrée par la courbe dans une rotation autour de l'axe, mais le contexte permet de comprendre notre abus de langage.

Mais la partie, qui est vers V, fait que les rayons qui viennent du point G se refleschiraient tous vers F, s'ils y rencontraient la superficie concave d'un miroir, dont la figure fût $1V1$, & qui fust de telle matière qu'il diminuast la force de ces rayons, selon la proportion qui est entre les lignes $A5$ & $A6$: car de ce qui a été demontré en la Dioptrique, il est evident que cela posé, les angles de la reflexion seraient inesgaux, aussy bien que sont ceux de la refraction, & pourraient estre mesurés en mesme sorte.

Au voisinage de V, il y a un *effet de méta-loupe*, que ne connaît pas Descartes, qui préfère inventer à la place une hypothétique réflexion engendrée par un matériau spécial freinant la lumière. Il ne semble pas trop y croire lui-même, comme le prouve la comparaison grammaticale entre les deux parties de son commentaire : les rayons *se retournent* dans un cas, *se réfléchiraient* dans l'autre.

(B) **Le deuxième genre**

Les choses se compliquent notablement avec ce genre, que visiblement Descartes n'a pas su maîtriser complètement. La discussion sera donc bien plus lourde que pour les autres cas.

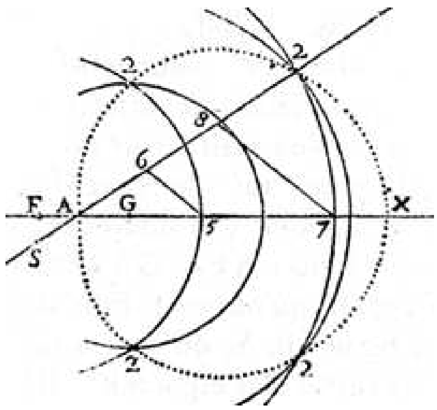


FIGURE 8.12 – *Le deuxième genre d'Ovale*

Ici A est le sommet droit et X le sommet gauche d'une branche extérieure.

En la seconde ovale, la partie $2A2$ *sert encore pour les reflexions dont on suppose les angles être inesgaux. Car estant en la superficie d'un miroir composé de mesme matiere que le precedent, elle ferait tellement refleschir tous les rayons qui viendraient du point* G*, qu'ils sembleraient après estre refleschis venir du point* F*. Et il est a remarquer, qu'ayant fait la ligne* AG *beaucoup plus grande que* AF*, ce miroir serait convexe au milieu, vers* A*, & concave aux extrémitez : car telle est la figure de cete ligne, qui en cela represente plutost un coeur qu'une ovale.*

Au voisinage de A, il y a un *effet de méta-loupe* entre les deux points F et G, respectivement troisième et premier foyer. Comme au voisinage du sommet gauche du premier genre, Descartes qui ne pouvait imaginer la méta-matière continue à croire ici - de manière assez vague toutefois - en ses réflexions à angles inégaux pour lesquelles les deux foyers F et G seraient images l'un de l'autre.

Dans le cas où l'on est dans les genres II_a (branche intérieure, non connue de Descartes) ou II_b (branche extérieure), G est le second foyer et F le troisième, tandis que, dans le cas II_c (branche extérieure), si F est encore le troisième foyer, G est par contre le premier.

La définition que Descartes donne ici des branches extérieures cordiformes (il pense visiblement qu'elles le sont toutes) est intéressante et correcte : convexe au milieu, concaves aux deux bouts signifie bien trois tangentes verticales, donc séparées par deux tangentes d'inflexion.

C'est la seule allusion à un changement de convexité dans la continuité que l'on peut lire chez lui : bien que ce phénomène soit bien visible sur une Conchoïde de Nicomède[65], il passe sous silence tout phénomène d'inflexion au moment de traiter des tangentes à cette courbe[66].

Mais son autre partie $2X2$ *sert pour les refractions, & fait que les rayons, qui estant dans l'air tendent vers* F*, se detournent vers* G*, en traversant la superficie d'un verre, qui en ait la figure.*

65. Page 321 des *Essais*, 423 dans AT VI.
66. Par contre, cela n'échappera pas à Fermat, qui y fera notamment écho dans une correspondance de la fin de 1636 avec Roberval (*Œuvres complètes*, Vol. I, pp. 161 et 166, Vol. II, pp. 82 et 86, Vol. III, pp. 142 et 147 et *Supplément*, p. 44).

Ici, au voisinage de X, il s'agit simplement d'un *effet loupe*, c'est-à-dire de stigmatisme virtuel transformant des rayons issus du foyer F en des rayons semblant provenir de l'autre foyer G.

Dans le cas où l'on est dans les genres II_a (branche intérieure, non connue de Descartes) ou II_b (branche extérieure), G est le second foyer et F le troisième, tandis que, dans le cas II_c (branche extérieure), si F est encore le troisième foyer, G est par contre le premier.

Cela dit, ce n'est pas exactement ce qu'écrit Descartes, même si c'est équivalent grâce au *principe du retour inverse*, qui dit que tout cheminement lumineux décrit dans un sens peut aussi être exactement parcouru dans le sens opposé.

Il parle, *a priori* bizarrement, d'un faisceau de rayons qui, dans l'air extérieur, *tendent vers* le troisième foyer F. Ce qui paraît un peu étrange au premier abord, c'est ce concept de faisceau de rayons qui ne se rencontrent pas physiquement, mais pourraient le faire si l'interface n'existait pas. En réalité, la fin du Livre Second fournit la clef (voir la page 414) : pour engendrer un tel faisceau, il suffit par exemple de créer un stigmatisme absolu entre une origine donnée et un point d'arrivée qui serait justement G ; c'est bien ce qui se passera lorsque Descartes accolera alors plusieurs morceaux d'Ovale.

Il reste à signaler une double et assez grave erreur de Descartes, déjà présente dans son commentaire des Ovales de deuxième genre. D'une part, en parlant de *cœur*, il affirme en substance que toute branche extérieure d'Ovale est cordiforme et non convexe. D'autre part, même dans ce cas, la représentation graphique qu'il en donne est ici encore bien fautive : il ne semble pas très bien connaître la forme singulière de ces Ovales, avec trois tangentes verticales (et non une sorte de rebroussement, qui ferait penser à une variante de cardioïde).

Cette relative médiocrité des images que nous fournit *La Géométrie* montre combien la technique de construction point par point donnée plus haut par son auteur est bien malcommode pour obtenir une vision précise de la courbe, par contre tout à fait accessible aujourd'hui grâce aux logiciels spécialisés.

(C) **Le troisième genre**

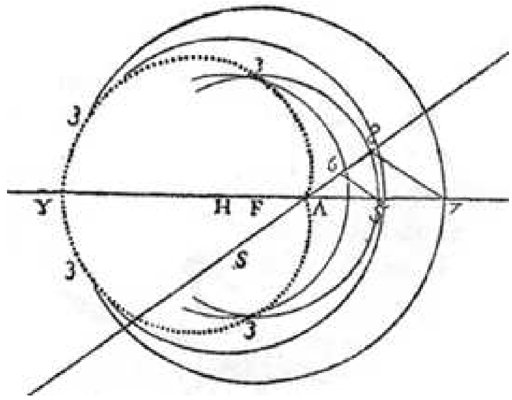


FIGURE 8.13 – *Le troisième genre d'Ovale*

Ici A est le sommet droit et Y le sommet gauche d'une branche extérieure.

La troisième ovale sert toute aux refractions, & fait que les rayons, qui estant dans l'air tendent vers F, se vont rendre vers H dans le verre, après qu'ils ont traversé sa superficie, dont la figure est $A3Y3$, qui est convexe partout, excepté vers A où elle est un peu concave, en sorte qu'elle a la figure d'un coeur aussy bien que la precedente. Et la difference qui est entre les deux parties de cette ovale, consiste en ce que le point F est plus proche de l'une, que n'est le point H ; & qu'il est plus éloigné de l'autre, que ce mesme point H.

Que nous soyons au voisinage de A ou de Y, il y a un *effet de loupe*, qui transforme des rayons issus du premier foyer H en un faisceau de rayons semblant provenir du second foyer F ; dans un cas il y a agrandissement, et rapetissement dans l'autre.

Ici encore, ce n'est pas exactement ce qu'écrit Descartes, même si c'est équivalent (principe du retour inverse). Il parle, *a priori* bizarrement, d'un faisceau de rayons qui, dans l'air extérieur, *tendent vers* le second foyer F. Ici encore, comme au voisinage du sommet gauche d'une Ovale du deuxième genre, cela paraît étrange. En réalité, la fin du Livre Second fournit encore la clef pour la même raison que plus haut, ce qui se produit lorsque Descartes accolera plusieurs morceaux d'Ovale.

Notons enfin que Descartes affirme, toujours comme pour le deuxième genre, que toute branche extérieure est cordiforme et non convexe, avec une représentation maladroite faisant, ici encore, penser davantage à un rebroussement qu'à une tangente verticale.

(D) **Le quatrième genre**

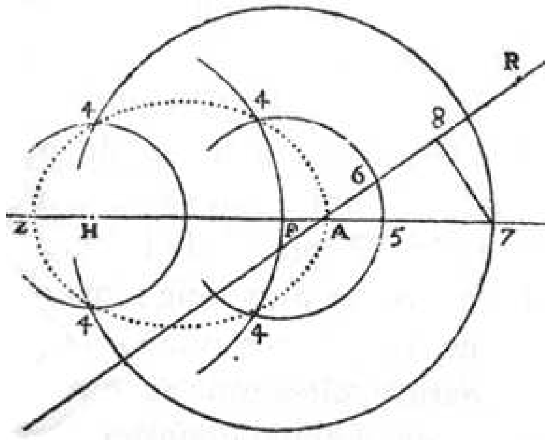


FIGURE 8.14 – *Le quatrième genre d'Ovale*

Ici A est le sommet droit et Z le sommet gauche d'une branche intérieure.

En mesme façon la derniere ovale sert toute aux reflexions, & fait que si les rayons, qui vienent du point H, rencontraient la superficie concave d'un miroir de mesme matiere que les precedens, & dont la figure fust $A4Z4$, ils se refleschiraient tous vers F.

Que nous soyons au voisinage de A ou de Z, il y a un *effet de méta-loupe*, qui transforme des rayons issus de l'un des deux premiers foyers en rayons semblant provenir de l'autre. Au voisinage de A, après réfraction négative, les rayons issus du premier foyer H semblent provenir du second foyer F ; c'est exactement l'inverse au voisinage de Z.

> Toujours faute de connaître la méta-matière, comme au voisinage du sommet gauche du premier genre ou ceux de droite du deuxième genre, Descartes continue à croire en ses réflexions à angles inégaux pour lesquelles les deux foyers F et H seraient images l'un de l'autre.

À la fin de ses descriptions, Descartes ajoute ces lignes intéressantes

De façon qu'on peut nommer les points F, & G, ou H les points bruslants de ces ovales, a l'exemple de ceux des Ellipses, & des Hyperboles, qui ont esté ainsi nommés en la Dioptrique.

I'omets quantité d'autres refractions, & reflexions, qui sont reiglées par ces mesmes ovales : car n'estant que les converses, ou les contraires de celles cy, elles en peuvent facilement estre déduites.

La première phrase est très importante : elle montre de manière forte qu'il connaissait parfaitement les trois foyers d'une Ovale (ce que les *Excerpta* confirmeront plus tard) et, surtout, que cette courbe a été bâtie par analogie avec les coniques. La seconde est plus problématique : en un sens, elle est juste puisque nous avons montré que les quatre genres cartésiens sont insuffisamment détaillés, en un autre sens elle semble seulement indiquer le principe du retour inverse signalé plus haut.

Deux énigmes concernant les Ovales

Parmi toutes les questions que l'on peut se poser encore aujourd'hui sur les Ovales, deux semblent assez coriaces : l'origine de ces courbes et leur éventuelle définition comme courbes de Pappus.

D'où est sorti le concept des Ovales ?

Ce sujet a parfois été traité par des spécialistes compétents, mais il ne semble pas que les tentatives publiées à ce jour soient convaincantes. Certaines, dont essentiellement le remarquable article *De la Dioptrique à la Géométrie : les Ovales de Descartes*[67] de Roshdi Rashed, reviennent à démontrer la

67. Dans *Physis, Rivista internazionale di Storia della Scienze*, volume XLII (Firenze 2005), nouvelle série, fascicule 2.

constance d'une expression de la forme $z = AM \pm k\,BM$ par des accroissements différentiels géométriques sachant que cette invariance équivaut à une condition de la forme $z' = 0$. Il faut également citer l'ingénieux mais confus article *Comment Descartes a-t-il découvert ses Ovales*[68] de Hokiti Hara, fortement appuyé sur une lecture très fouillée des fragments présents dans les *Excerpta*, donnant à la fois une certaine importance aux enroulements de cordes issus des techniques de jardiniers et aux considérations cinématiques ≪ divinatoires ≫ introduites en 1900 par le Danois Hieronymus Georg Zeuthen à propos de la Conchoïde de Nicomède, tout cela sans proposer finalement de conclusion nette, même trop audacieuse qu'on aurait pu pardonner en raison de l'extrême difficulté du problème.

Essayer de trouver une origine d'idée mathématique est entreprise périlleuse. Tous les professionnels - du dix-septième siècle comme du vingt-et-unième[69] - savent la lenteur nécessaire à sa maturation, la longue et pénible accumulation de pages entières de calculs semblant ne déboucher sur rien, d'échecs apparemment sans issue, et puis dans les cas d'extrême chance une intuition fulgurante, telle celle que Henri Poincaré a décrite dans *La science et l'hypothèse* à propos des fonctions fuchsiennes.

Cela dit, il ne coûte rien d'essayer. Nous allons proposer ci-dessous une hypothèse, extrêmement hasardeuse certes, qui pourrait indiquer dans quel sens chercher. La chose aurait pu s'être déroulée en six étapes, dont en tout cas les trois premières sont quasiment certaines. Elles reposent sur l'outil essentiel de Descartes concernant la recherche des normales : le calcul de l'abscisse[70] v du pied de la normale au point considéré M. Parmi les différentes formes à donner à cette expression, on privilégiera si possible celles qui reposent sur l'emploi exclusif des coordonnées bipolaires de M relatives au système de foyers que forment les deux points images parfaites l'un de l'autre.

a) Déterminer une condition suffisante sur v pour que la courbe cherchée réalise l'astigmatisme absolu. D'après la page 371, cette égalité[71] s'écrit

68. Dans *Historia Scientiarum*, No 29 (Tokyo 1985).
69. Voir par exemple le joli cercle vicieux du R.P. Claude Rabuel, à la page 395 de ses *Commentaires sur la géométrie de M.Descartes* de 1730.
70. Ou de l'ordonnée, selon la façon dont on lit les axes de coordonnées cartésiens.
71. Également nécessaire, mais cela ne joue pas ici.

sous la forme

$$v = \frac{nb\,R - c\,\rho}{nR + \rho}\cdot$$

b) Établir une formule analogue pour les cas semblables de stigmatisme absolu réflexif connus depuis l'Antiquité. Nous savons que le résultat, qui sera établi plus bas (à savoir page 421), s'écrit sous la forme

$$2a\,v = fR + h\rho.$$

c) Établir une formule analogue pour les cas limites connus de l'anaclastique, problème analogue résolu par Descartes vers 1628. Ici, l'un des deux points est à l'infini et il ne peut être question de coordonnées bipolaires (R, ρ), mais le système mixte (ρ, x) peut jouer ce rôle [72]. Nous savons que le résultat, qui sera établi plus bas (à savoir page 434), s'écrit sous la forme

$$v = (\mathbf{e} \pm 1)\,\rho \mp \mathbf{e}\,x.$$

d) Au vu des quatre cas étudiés dans les deux paragraphes précédents (ellipse et hyperbole convoquées comme solutions des problèmes de stigmatisme réflexif et de l'anaclastique), il apparaît que v est chaque fois **combinaison linéaire des deux coordonnées**, bipolaires pour le b) et mixtes pour le c). Dès lors **une hypothèse de travail plausible est de rendre constant le dénominateur de l'expression de v du a)**, c'est-à-dire de tester la relation

$$nR + \rho = \text{constante}.$$

e) Tout calcul fait [73], on aboutit alors à un résultat équivalent à l'égalité décevante

$$\sin\hat{\imath} = \frac{1}{n}\,\sin\hat{r}.$$

f) Descartes se serait donc ici retrouvé en échec, mais - cas très fréquent en mathématiques - cet échec est presque un succès, puisqu'il lui suffit de penser à remplacer n par son inverse pour tomber enfin sur le bon résultat escompté [74], à savoir ce qu'il fallait démontrer

$$R + n\rho = \text{constante}.$$

72. Toute courbe polynomiale en (ρ, x) est algébrique, et réciproquement si elle admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie.

73. Par exemple en tout point analogue à celui de la preuve cartésienne donnée page 371.

74. Il est vrai que, du coup, le dénominateur du v du a) n'est plus constant, et que par suite l'hypothèse du d) est totalement fausse, mais c'est évidemment sans conséquence !

Le scénario ci-dessus n'est bien entendu qu'une esquisse ; son principal intérêt est simplement de montrer dans quelle voie l'on pourrait le retravailler avant d'accéder, peut-être, à une reconstitution plus fiable, par exemple en le reliant à des textes cartésiens qui iraient dans ce sens. Pour l'instant, on ne peut que se rapporter qu'au calcul de v dans le cas des coniques, explicitement présent dans *La Géométrie* (page 347 des *Essais*, AT VI page 419, mais où ce nombre n'est pas mis exactement sous la forme qui nous intéresse ici), et au calcul cartésio-beeckmanien [75] de la page 426 où la distance d'un foyer F au pied de la normale en M est montrée être égale à $\mathbf{e}\,MF$, ce qui conduit à un autre calcul de v où, cette fois, l'un des rayons vecteurs intervient de manière affine. Mais, faute d'autres documents, les lignes précédentes n'ont pour le moment de valeur qu'indicative.

La question de l'origine des Ovales reste donc encore énigmatique.

Les Ovales sont-elles des courbes de Pappus ?

On sait que Descartes assimilait toute courbe géométrique (algébrique de nos jours) aux courbes ayant une définition à la Pappus, c'est-à-dire solutions d'un problème de Pappus à N droites. On sait aussi (aujourd'hui) que c'est inexact... Cela dit, la plupart des courbes qu'il a introduites, par exemple sa Parabole Cartésienne, satisfont à ce critère.

Il est donc normal de se poser la même question à propos des Ovales. Pour autant que nous le sachions, la réponse est inconnue, même si l'on peut raisonnablement conjecturer qu'elle est négative. Un élément en ce sens est que de très nombreux essais, basés sur certaines propriétés géométriques des Ovales, n'ont jamais permis de réussir à trouver une décomposition en sept ou huit droites qui convienne, mais ce n'est pas un argument complètement convaincant !

Jusqu'il y a quelques années, le problème n'était pas apparu dans la littérature. Toutefois Roshdi Rashed, dans le très riche article *De la Dioptrique à la Géométrie : les ovales de Descartes* déjà signalé [76] écrit, page 350, *qu'il ne cherche pas à obtenir ces courbes comme solutions d'un problème de*

75. Où F et M sont respectivement notés I et B, conformément au texte du *Journal* de Beeckman.

76. En page 382.

Pappus après avoir rappelé, page 342, que *si les cubiques les plus générales sont bien solutions du problème de Pappus*, que ce n'est pas le cas pour certaines quartiques, et laisse entendre, qu'elles pourraient également fournir un contre-exemple analogue à celui qu'il introduit ailleurs, à savoir une Ovale de Cassini [77].

Le problème reste donc ouvert.

Les mathématiques des Ovales

Premières définitions

a) Soit, dans un plan muni d'un repère euclidien, F l'origine et G le point de coordonnées $(c, 0)$, appelés par la suite **foyers**, avec $c > 0$. Pour tout point M du plan, on notera $\rho = FM$ la distance de F à M et $r = GM$ celle de G à M. Enfin la donnée d'un couple (h, k) de réels positifs ou nuls définit le polynôme

$$\begin{aligned} P_{k,h,c}(x,y) &= (\rho + hr - kc)\,(\rho - hr - kc)\,(\rho + hr + kc)\,(\rho - hr + kc) \\ &= [(1-h^2)\rho^2 + 2h^2cx + (k^2-h^2)c^2]^2 - 4k^2c^2\rho^2 \end{aligned}$$

avec $\rho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - c^2 + 2cx$. C'est un polynôme pair par rapport à y, généralement de degré 4 en chacune des variables x et y, souvent simplifié en $P(x, y)$ si l'on omet les paramètres k, h et c. Plus précisément

$$\begin{aligned} P(x,y) = (1-h^2)^2\rho^4 + 4h^2(1-h^2)\,cx\rho^2 + 2c^2[2h^4x^2 + (h^4 - h^2k^2 - h^2 - k^2)\rho^2] \\ +4h^2(k^2-h^2)\,c^3x + (k^2-h^2)^2c^4. \end{aligned}$$

77. *Les premières classifications des courbes*, page 47 du fascicule 1 de la même revue. Son argument est très frappant mais, devant la possibilité de certaines coïncidences ponctuelles peu vraisemblables, il faut le justifier de manière plus approfondie : voir par exemple l'étude de la quartique d'équation $y = x^4$ dans notre chapitre sur le problème de Pappus et les coordonnées.

D'autre part, le fait qu'ici la branche extérieure ne soit pas toujours convexe - à cause du cas cordiforme - rend moins évidentes les ressemblances entre les courbes de Descartes et de Cassini, respectivement définies par l'invariance d'une combinaison linéaire et du produit de R par ρ.

b) L'ensemble O des points du plan vérifiant $P(x, y) = 0$ est appelé **Ovale de Descartes** (ou **Ovales de Descartes**). C'est évidemment la réunion de quatre ensembles définis par l'une des égalités

$$\rho - \varepsilon hr = \delta kc$$

où $\varepsilon^2 = \delta^2 = 1$. Nous verrons que certains de ces sous-ensembles peuvent être vides, mais que O ne l'est pas. Si P est effectivement de degré 4, c'est-à-dire si $k^2 \neq h^2$, une Ovale de Descartes est donc une *quartique*, *bicirculaire* parce que $(x^2 + y^2)^2$ divise le terme de plus haut degré et $x^2 + y^2$ le suivant.

Au prix d'un éventuel échange entre F et G (et du sens de l'axe des abscisses), on peut choisir $0 \leqslant h \leqslant 1$. Si en effet $h > 1$ et si l'on pose $c' = c$, $h' = \dfrac{1}{h}$ et $k' = \dfrac{k}{h} \geqslant 0$, alors $P'(x, y) = P_{k',h',c'}(c - x, y) = h^{-4}P(x, y)$ et $h' > 1$ établissent le résultat. *On supposera donc désormais* $0 \leqslant h \leqslant 1$.

Quelques cas particuliers fondamentaux

a) Si $k = h = 0$, O est évidemment le *singleton* $\{F\}$.

b) Si $k = 0$ et $h = 1$, O est évidemment la *médiatrice* du segment $[FG]$.

c) Si $k = 0$ et $0 < h < 1$, O est le *cercle* de centre de coordonnées $\left(\dfrac{h^2}{h^2 - 1}c, 0\right)$ et de rayon $\left|\dfrac{hc}{1 - h^2}\right|$ (c'est le cercle d'Apollonius). *On supposera donc désormais* $k > 0$.

d) Si $h = 0$, O est évidemment le *cercle* de centre F et de rayon kc. *On supposera donc désormais* $h > 0$.

e) Si $h = 1$, O est la *droite* FG si $k = 1$ et, si $k \neq 1$, la *conique* de foyers F et G et d'excentricité $\dfrac{1}{k}$ (*ellipse* si $k > 1$, *hyperbole* si $0 < k < 1$). Ces cas particuliers étaient connus depuis l'Antiquité, et notamment de Descartes (*cf. La Dioptrique*, pp. 91 et sq., AT VI, pp. 165 et sq.) ; ils lui ont visiblement servi de point de départ pour concevoir ses Ovales. *On supposera donc désormais* $h < 1$; P est alors de degré 4.

f) Si $k = h < 1$, O est un *limaçon de Pascal* de point double isolé F, d'équation $\rho = \dfrac{2kc}{1-k^2}(1 - k\cos\theta)$ puisque $P = 0$ se factorise en deux égalités définissant chacune la même courbe. *On supposera donc désormais $k \neq h$.*

g) Si $0 < h < k = 1$, O est un *limaçon de Pascal* de point double G à tangentes réelles distinctes. En effet, si l'on pose $X = c - x$, l'équation $P = 0$ s'écrit

$$0 = (1-h^2)^2(X^2+y^2)^2 - 4c(1-h^2)\,X\,(X^2+y^2) + 4c^2[(1-h^2)X^2 - h^2y^2],$$

soit encore, en coordonnées polaires de sommet G pour cette fois,

$$0 = [(1-h^2)\,\rho + 2\,c(h - \cos\theta)]\,[(1-h^2)\,\rho - 2c(h + \cos\theta)].$$

L'annulation de l'un ou l'autre facteur donne, ici encore, une même courbe dont une équation est, par exemple, $\rho = \dfrac{2c}{1-h^2}(h + \cos\theta)$.

h) Ainsi tout point, toute droite, toute conique à centre propre et tout limaçon de Pascal autre qu'une cardioïde (donc aussi toute inverse des précédentes par rapport à l'un de ses foyers) est un cas particulier d'Ovale de Descartes. Ce sont les seuls.

On supposera donc désormais $0 < h < 1$ *et* k *strictement positif, distinct de 1 et de* h ; le nom d'Ovale sera réservé à ces cas. Comme on obtient $P(0,0) = (k^2 - h^2)^2c^4 > 0$ et $P(c,0) = (1-k^2)^2c^4 > 0$, on voit que les nombres positifs ou nuls ρ et r sont maintenant strictement positifs puisqu'ils ne peuvent s'annuler.

Nous verrons plus loin que l'on peut même supposer $0 < h < 1 < k$ et $\delta = 1$ à condition d'introduire un troisième foyer, dont l'étude commence dans la partie suivante.

Le troisième foyer

a) L'équation générale $P = 0$ peut s'écrire

$$(\rho^2 + 2px + q)^2 = 4s^2\rho^2$$

avec $(1-h^2)\,p = h^2c$, $(1-h^2)\,q = (k^2-h^2)\,c^2$ et $(1-h^2)\,s = kc$. Si l'on recherche systématiquement les triplets (u,v,e) tels que $(1-u^2)\,p = u^2e$, $(1-u^2)\,q = (v^2-u^2)\,e^2$ et $(1-u^2)\,s = ve$, on est conduit par élimination de v et de e dans ce système à l'équation

$$(u^2-h^2)\,(k^2u^2-h^2) = 0.$$

En particulier, le triplet $\left(\dfrac{h}{k}, \dfrac{1}{k}, \dfrac{k^2-h^2}{1-h^2}\,c\right)$ convient.

Le point H de coordonnées $(e,0)$, avec $e = \dfrac{k^2-h^2}{1-h^2}\,c$, est également appelé *foyer* de l'Ovale. Suivant les conventions usuelles, il est strictement à droite de G si, et seulement si, $d = e - c = \dfrac{k^2-1}{1-h^2}\,c$ est strictement positif, donc si, et seulement si, $k > 1$. On dit dans ce cas que F est le premier foyer, G le deuxième et H le troisième.

b) Si $0 < h < k < 1$, on a $0 < e < c$ et H est strictement entre F et G. Nous dirons alors que F est le premier foyer, H le deuxième et G le troisième, avec $\left(\dfrac{h}{k}, \dfrac{1}{k}, \dfrac{k^2-h^2}{1-h^2}\,c\right)$ comme paramètres de l'Ovale : le premier est strictement compris entre 0 et 1, le deuxième est strictement supérieur à 1 et le troisième strictement positif.

Reste le cas $0 < h < k < 1$. On a $e < 0 < c$ et F est strictement entre H et G. Nous dirons alors que G est le premier foyer, F le deuxième et H le troisième. Cette configuration a été obtenue en opérant comme plus haut, pour rendre la valeur absolue de h inférieure ou égale à 1 (notamment le sens de l'axe des abscisses a été changé). Les calculs précédents donnent $\left(\dfrac{h}{k}, \dfrac{1}{k}, c\right)$ comme paramètres de l'Ovale : le premier est strictement compris entre 0 et 1, le deuxième est strictement supérieur à 1 et le troisième strictement positif.

c) En résumé, aux changements de noms près, nous disposons maintenant de trois foyers deux à deux distincts, disposés dans l'ordre (F,G,H) - d'où les noms de premier, deuxième et troisième foyer -, et de paramètres (h,k,c) avec $0 < h < 1$, $k > 1$ et $c > 0$. Les distances FG, GH et FH sont respectivement égales à c, d et e, et liées par les deux égalités

$e = c + d = ck^2 + dh^2$. Le paramètre c est simplement un paramètre d'homogénéité ; en fait l'Ovale est définie, à similitude près, par (k, h).

Équations polaires et bipolaires

a) *On supposera donc désormais* $0 < h < 1 < k$, ce qui implique la relation $h \neq k$. Nous avons vu que l'équation générale de l'Ovale s'écrivait

$$\rho - \varepsilon hr = \delta kc$$

où $\varepsilon^2 = \delta^2 = 1$. Les deux sous-ensembles de O définis par $\delta = -1$ sont vides, puisque

$$\rho + hr + kc > \rho - hr + kc > \rho - r + c = FM - GM + FG > 0.$$

L'Ovale est donc formée de deux branches (au plus), d'ailleurs disjointes car $hr > 0$ (nous verrons plus loin qu'aucune de ces deux branches n'est vide). L'une de ses équations polaires s'écrit donc $(\rho - kc)^2 = h^2r^2$, soit encore

$$(1 - h^2)\,\rho^2 - 2c\,(k - h^2\cos\theta)\,\rho + (k^2 - h^2)\,c^2 = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous une forme très simple. Si l'on note Ω le *centre* de l'Ovale, c'est-à-dire le point de l'axe d'abscisse $\omega = -\dfrac{h^2}{1-h^2}\,c$ et $\chi = \dfrac{kc}{1-h^2}$ on voit que l'équation peut se mettre sous la forme

$$\rho^2 - 2\omega\,x - 2\chi\,\rho + ce = 0$$

soit encore $\Omega M^2 - 2\chi\,FM = \omega^2 - ce$, écriture qui sera utilisée plus loin. Enfin un corollaire immédiat conduit à l'égalité $\cos\theta = \dfrac{1}{2\omega}\left[\rho - 2\chi + \dfrac{ce}{\rho}\right]$, qui montre qu'un cercle de centre F ne rencontre l'Ovale qu'en deux points au plus, alors nécessairement symétriques par rapport à l'axe.

Il existe également une équation polaire analogue avec G comme pôle, mais un peu plus délicate à exploiter si l'on tient absolument à garder r strictement positif comme c'est le cas ici, conformément d'ailleurs aux habitudes cartésiennes.

b) L'existence du troisième foyer H conduit à s'interroger sur les relations existant entre $\rho = FM$, $r = GM$ et $R = HM$. Nous allons montrer qu'il existe des équations bipolaires pour chacune des deux branches de l'Ovale faisant respectivement intervenir l'un des trois couples (ρ, r), (r, R) et (R, ρ), à savoir

$$\rho - \varepsilon hr = kc, \qquad kr - R = \varepsilon hd, \qquad k\rho - \varepsilon hR = e.$$

Il suffit de démontrer, circulairement, trois implications de la forme

$$(\rho - \varepsilon hr = kc) \Longrightarrow (kr - R = \varepsilon hd).$$

Nous ne justifierons que celle-là, les autres preuves étant similaires.

Le point de départ est la *relation de Stewart*

$$c\,R^2 + d\,\rho^2 - e\,r^2 = cde$$

qui se vérifie immédiatement à l'aide des coordonnées (x, y) de M. On en déduit $R^2 = \frac{e}{c}\,r^2 - \frac{d}{c}\,\rho^2 + de$. Il suffit alors de remplacer ρ par $kc + \varepsilon hr$ ainsi que d et e par leurs expressions en fonction de h et de k pour obtenir $R^2 = (kr - \varepsilon hd)^2$. L'égalité $R = kr - \varepsilon hd$ s'en déduit en remarquant les inégalités

$$R + kr + hd > R + kr - hd > R + r - d = MH + MG - GH > 0.$$

c) Chacune des deux branches de l'Ovale admet donc, au choix, trois équations bipolaires très simples. On notera les relations matricielles

$$\begin{bmatrix} \varepsilon hd \\ -e \\ kc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & -1 \\ -k & 0 & \varepsilon h \\ 1 & -\varepsilon h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ r \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ r \\ R \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \varepsilon h \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit aussitôt l'égalité

$$\varepsilon hd\,\rho - e\,r + kc\,R = 0$$

que l'on peut d'ailleurs vérifier directement à partir des trois équations bipolaires.

Les propriétés valables pour un pôle, disons F, s'étendent généralement aux deux autres. Toutefois, parmi les différences qu'on peut lister fastidieusement, notons au moins les deux suivantes : il existe des cercles de centre H coupant l'Ovale en quatre points (ce qui est impossible pour F) et H est le seul des trois foyers d'où l'on peut mener des tangentes à la courbe.

d) Signalons enfin que cette étude montre qu'une partie donnée du plan (ici l'une de ce que nous appellerons une branche d'une Ovale de Descartes), peut admettre de nombreuses expression en x et y dont l'annulation est une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à la partie considérée. Ainsi les équations suivantes (où ε a une valeur déterminée égale à 1 ou -1) représentent-elles la même branche

$$\sqrt{x^2+y^2}-\varepsilon h\sqrt{(x-c)^2+y^2}-kc=0,$$

$$k\sqrt{x^2+y^2}-\varepsilon h\sqrt{(x-e)^2+y^2}-e=0,$$

$$k\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}-\varepsilon hd=0,$$

$$(1-h^2)\sqrt{x^2+y^2}-k-h^2\cos^2\theta+\varepsilon ch\sqrt{(1-h^2)\sin^2\theta+(k-\cos\theta)^2}=0$$

(voir page 395 pour la dernière), et il est très improbable de pouvoir remarquer à vue qu'elles sont équivalentes entre elles [78] ! Ces quelques remarques prouvent que la géométrie analytique est une branche très profonde de la géométrie, dont Descartes n'avait pas pu prévoir toute l'étendue des aspects, qui vont bien au-delà de la simple manipulation d'une égalité polynomiale classique du genre $P(x,y)=0$.

Paramétrisations des Ovales

a) Il existe de nombreuses paramétrisations de chacune des branches de l'Ovale. Si l'on prend par exemple r comme paramètre, x et y^2 s'expriment

78. On pourra rapprocher ce fait que les deux expressions assez simples $y\,(x+\sqrt{x^2})-2=0$ et $x+y-\sqrt{4-(x-y)^2}=0$, et bien d'autres encore, caractérisent la branche d'hyperbole autrement définie par la conjonction des relations $xy-1=0$ et $x>0$.

respectivement sous la forme de polynômes du second et du quatrième degré en r, à savoir

$$x = \frac{1}{2c}\,(c^2 - r^2 + \rho^2) = \frac{h^2-1}{2c}\,r^2 + \varepsilon hk\,r + \frac{1+k^2}{2}\,c = Q(r),$$

$$y^2 = \rho^2 - x^2 = (kc + \varepsilon hr)^2 - Q(r)^2.$$

On pourra noter que $|y|$ est bien défini par cette dernière égalité, puisque

$$4c^2y^2 = (c+\rho-r)\,(c+\rho+r)\,(c-\rho+r)\,(-c+\rho+r) \geqslant 0.$$

Reste à déterminer l'ensemble des valeurs admissibles de r : c'est un intervalle, et plus précisément le segment $\left[\dfrac{k-1}{1-\varepsilon h}\,c, \dfrac{k+1}{1-\varepsilon h}\,c\right]$. En effet, il faut (et suffit de) vérifier les *inégalités triangulaires* $0 < r \leqslant \rho{+}c$, $0 < \rho \leqslant c{+}r$ et $0 < c \leqslant r{+}\rho$, nécessaires et suffisantes pour qu'existe le triangle FMG : les calculs sont élémentaires et conduisent effectivement à l'encadrement annoncé

$$(0 <)\ \ \frac{k-1}{1-\varepsilon h}\,c \leqslant r \leqslant \frac{k+1}{1-\varepsilon h}\,c,$$

ces deux majorations étant respectivement les traductions immédiates de $\rho \leqslant c{+}r$ et de $r \leqslant c{+}\rho$ sachant que $\rho = kc{+}\varepsilon hr$; pour terminer, il suffit de remarquer que ces valeurs extrêmes sont bien atteintes aux points sur les axes. Au passage, signalons que l'on obtient ainsi très facilement le caractère borné de l'Ovale, bien corroboré par les figures, les équations polaires *etc.*

b) On en déduit que r et ρ admettent toutes deux des représentations affines en un paramètre t décrivant le segment $[-1, 1]$, à savoir

$$r = \frac{k+t}{1-\varepsilon h}\,c, \qquad \text{d'où } \rho = \frac{k+\varepsilon ht}{1-\varepsilon h}\,c \quad \text{et} \quad t = \frac{r-\rho}{c}\cdot$$

Il existe également une expression analogue pour R, mais moins élégante

$$R = \frac{k(1+\varepsilon h)\,t + k^2 + \varepsilon h}{1-h^2}\,c.$$

On obtient ainsi aussitôt les valeurs extrémales de ρ et de R.

On notera que, pour la valeur minimale de r, on trouve

$$0 < c < x(-1) = \rho(-1) = c + r(-1) = \frac{k - \varepsilon h}{1 - \varepsilon h}\, c < e.$$

Inversement, pour la valeur maximale de r, on trouve

$$0 < -x(1) = \rho(-1) = r(-1) - c = \frac{k - \varepsilon h}{1 + \varepsilon h}\, c.$$

Ces remarques suffisant à prouver qu'aucune des deux branches de l'Ovale n'est vide. Elles sont évidemment connexes, et en constituent les deux composantes connexes.

c) Les réels x et y^2 s'expriment assez simplement en fonction de t. Ainsi

$$x = \frac{c}{2(1 - \varepsilon h)}\,[1 - \varepsilon h - 2k\,t - (1 + \varepsilon h)\,t^2].$$

Par exemple, $t = 0$ équivaut à $\rho = r$, leur valeur commune étant $\dfrac{kc}{1 - \varepsilon h}\cdot$ Cela équivaut encore à $x = \dfrac{c}{2}\cdot$ Pour connaître y^2 en fonction de t, se reporter page 396.

Il existe de même des représentations paramétriques avec ρ ou R comme paramètre. Chacune d'elles permet une construction point par point (par exemple informatique) de l'Ovale considérée.

d) Signalons enfin une autre représentation paramétrique utilisée par Descartes lui-même (*La Géométrie*, p. 360, AT VI p. 432). Ce dernier introduit un sommet Σ de l'Ovale, de coordonnées $(\sigma, 0)$ dans notre système, pose $a = F\Sigma = |\sigma|$, $b = G\Sigma = |c - \sigma|$, nombres liés par la relation $a - \varepsilon hb = kc$, puis $z = r - b$, d'où $\varepsilon hz = \rho - a$ et les égalités $\rho = \varepsilon hz + a$, $r = z + b$ et

$$x = \frac{1}{2c}\,[(h^2 - 1)\,z^2 - 2(b - \varepsilon ha)\,z + a^2 - b^2 + c^2] = U(z),$$

$$y^2 = (a + \varepsilon hz)^2 - U^2(z) = V(z).$$

C'est à partir de cette représentation (avec origine en Σ, qu'il note A) que Descartes déduit la normale à l'Ovale et son application à la dioptrique.

On pourra noter que $a = \dfrac{k \mp \varepsilon h}{1 - \varepsilon h}\, c$ et $b = \dfrac{k \mp 1}{1 - \varepsilon h}\, c$. Par suite $z = \dfrac{t \pm 1}{1 - \varepsilon h}\, c$, relation où l'on retrouve que z est nul en l'une des extrémités d'une branche de l'Ovale.

Les deux branches d'une Ovale

a) On appelle *branche intérieure* celle obtenue pour $\varepsilon = -1$, et *branche extérieure* celle obtenue pour $\varepsilon = 1$. Cette appellation est justifiée par la propriété suivante : pour $\varepsilon = -1$, on dispose de l'inégalité $\rho^2 < ce$, et de l'égalité inverse sinon. Cela se prouve en remarquant que, dans le premier cas, le maximum de ρ est obtenu pour $t = 1$ et vaut $\dfrac{k-h}{1+h}\, c$, tandis que dans le second le minimum de ρ est obtenu pour $t = -1$ et vaut $\dfrac{k-h}{1-h}\, c$. On montre de même que $r^2 < cd$ pour $\varepsilon = -1$, et $r^2 > cd$ sinon.

L'équation polaire en F rencontrée plus haut

$$(1 - h^2)\, \rho^2 - 2c\, (k - h^2 \cos\theta)\, \rho + (k^2 - h^2)\, c^2 = 0$$

de l'Ovale montre qu'elle est *anallagmatique* - c'est-à-dire globalement invariante - par l'inversion de pôle F et de rapport ce, échangeant les points G et H ; plus précisément, l'inverse de la branche intérieure est la branche extérieure et réciproquement, ce qui montre que ε est multiplié par -1. Il existe également des invariances analogues relatives à des inversions de pôles G et H (de rapports respectifs $-cd$ et ed) : à la différence des deux autres, cette dernière laisse ε constant.

On en déduit encore que chaque branche admet une équation polaire de pôle F, à savoir

$$\rho = \frac{k - h^2 \cos^2\theta + \varepsilon ch \sqrt{(1 - h^2)\sin^2\theta + (k - \cos\theta)^2}}{1 - h^2}\,.$$

Il en va de même pour r et le foyer G.

b) L'expression de x en fonction de t donne aussitôt celle de la dérivée de x, à savoir $\dfrac{dx}{dt} = c\,\dfrac{\varepsilon h+1}{\varepsilon h-1}\left(t+\dfrac{k}{\varepsilon h+1}\right)$. Elle ne peut s'annuler à l'intérieur de l'intervalle $]-1,1[$ que si, et seulement si, $k < 1+\varepsilon h$, ce qui équivaut à $\varepsilon = 1$ et $k < 1+h$. Si $\varepsilon = -1$, alors x décroît ; il en va de même si $\varepsilon = 1$ et $k \geqslant 1+h$. Les valeurs extrêmes de l'abscisse ont été déterminées plus haut et vérifient les relations $x(1) < 0 < x(-1)$. La branche intérieure et, si $k \geqslant 1+h$, la branche extérieure sont dites *oviformes*. On peut montrer (lourdement) qu'elles sont alors toutes deux convexes.

Si $\varepsilon = 1$ et $k < 1+h$, la branche intérieure reste convexe, mais ce n'est plus le cas pour la branche extérieure qui est alors dite *cordiforme*. L'abscisse, d'abord strictement positive, commence par croître tant que $t < -\dfrac{k}{1+h}$, se stabilise pour $x = \dfrac{c}{2(1-h^2)}\,[k^2-h^2+1]$ $\Big($ce qui correspond aux valeurs $r = \dfrac{c\,kh}{1-h^2}$, $\rho = \dfrac{c\,k}{1-h^2}$ et $R = \dfrac{c\,h}{1-h^2}\Big)$. Les deux points ainsi définis sont donc tels que $r = kR = \rho h$. Ils admettent une tangente parallèle à l'axe des ordonnées, d'ailleurs commune. Après cette valeur de t, x décroît jusqu'à atteindre son minimum $x(1) < 0$.

c) Les variations de y sont plus difficiles à déterminer. On peut commencer par calculer $Y = y^2$ en fonction de t, ce qui donne le polynôme du quatrième degré

$$Y = \frac{c^2(1-t^2)}{4(1-\varepsilon h)^2}\,[3(1+\varepsilon h)^2 t^2 + 6k(1+\varepsilon h)\,t + 2k^2 - h^2 - 1].$$

On vérifie bien que $Y(-1) = Y(1) = 0$. Comme nous savons que $Y \geqslant 0$ sur $[-1,1]$, il en résulte que $Y'(-1) \geqslant 0$ et $Y'(1) \leqslant 0$ et Y' s'annule un nombre impair de fois sur $[-1,1]$. Supposons que Y' y admette trois racines ; le théorème de Rolle montre alors que Y'' s'y annule au moins deux fois. Or un calcul simple donne

$$Y''(x) = -\frac{c^2}{(1-\varepsilon h)^2}\,[3(1+\varepsilon h)^2 t^2 + 6k(1+\varepsilon h)\,t + 2k^2 - h^2 - 1] = -\frac{c^2\,\mathcal{T}}{(1-\varepsilon h)^2}.$$

Le trinôme $\mathcal{T}$ est de discriminant réduit $3(1+\varepsilon h)^2(k^2+h^2+1)$, et admet deux racines distinctes de même signe et de somme $-\dfrac{2k}{1+\varepsilon h} < -1$, strictement négatives. Il est donc exclu que les deux racines de Y'' appartiennent à $[-1,1]$; par suite, Y' n'a qu'une seule racine sur ce segment et y, comme Y, commence par croître à partir de 0, puis décroît jusqu'à 0. Il n'existe donc, pour une branche donnée, que deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, symétriques par rapport à cet axe.

On verra plus loin que ces maximums sont atteints en des points d'abscisses strictement inférieures à $\dfrac{c}{2}$, donc plus proches de F que de G.

Régionnement du plan

a) Les deux branches d'une Ovale déterminent cinq régions : celle qui est strictement intérieure à la branche intérieure et contient F et G, celle qui est strictement extérieure à la branche extérieure et contient H, celle qui est strictement extérieure à la branche intérieure et strictement intérieure à la branche extérieure et enfin les deux branches.

La réunion des deux dernières est caractérisée par l'équation $P = 0$. Les égalités

$$P(0,0) = (1-h^2)^2c^2e^2, \quad P(c,0) = (1-h^2)^2c^2d^2, \quad P(e,0) = (1-h^2)^2d^2e^2$$

laissent à croire que les trois premières régions vérifient respectivement les inégalités $P > 0$, $P < 0$ et $P > 0$ de nouveau.

b) C'est ce que va montrer l'étude suivante, qui précisera ce régionnement. On note d'abord que le produit de deux des quatre facteurs de P, à savoir $\rho + hr + kc$ et $\rho - hr + kc$, est strictement minoré par $(\rho + c)\,(\rho - r + c)$, et donc strictement positif dans le plan. Il en résulte que le signe de P est celui du produit des deux autres facteurs, à savoir $S = \rho - hr - kc$ et $T = \rho + hr - kc > S$, respectivement nuls sur la branche extérieure et la branche intérieure de l'Ovale, et non nuls ailleurs.

Fixons un réel θ tel que $x = \rho\cos\theta$. Il vient

$$ST = (1-h^2)\,\rho^2 + 2c\,(h^2\cos\theta - k)\,\rho + (k^2 - h^2)c^2.$$

Le discriminant réduit de ce trinôme est

$$c^2[(h^2\cos\theta - k)^2 - (1-h^2)\,(k^2-h^2)] = c^2h^2[(k-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\,(1-h^2)] > 0.$$

Il admet donc deux racines $\rho_1 > \rho_2 > 0$ (voir page 395) ; ST est strictement négatif pour $\rho_2 < \rho < \rho_1$, nul aux deux extrémités et strictement positif au delà. Or, pour $\rho = 0$, on a $M = F$, d'où $r = GF = c$, d'où $S < T = (h-k)c < 0$; au voisinage de $+\infty$, on a $r \sim \rho$, d'où $S \sim (1-h)\,\rho$ et $T \sim (1+h)\,\rho$ et le tableau

ρ	0		ρ_2		ρ_1		$+\infty$
ST		$+$	0	$-$	0	$+$	
S		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
T		$-$	0	$+$	$+$	$+$	

Il en résulte que l'intérieur strict de la branche intérieure est caractérisé par $S < T < 0$, cette branche par $S < T = 0$, la partie intermédiaire par $S < 0 < T$, la branche extérieure par $S = 0 < T$ et l'extérieur strict de cette branche par $0 < S < T$. On retrouve les résultats précédents, puisque P a le signe de ST.

On peut naturellement également caractériser, de manière analogue, les cinq régions ci-dessus à l'aide des couples (ρ, R) ou (r, R).

c) Ce régionnement permet d'obtenir plus de précisions sur la forme des deux branches et leurs positions relatives. Pour cela on peut introduire les deux *cercles principaux* admettant comme diamètres les segments joignant les points d'intersection de chaque branche avec l'axe des abscisses (les sommets).

Ceux-ci ont pour abscisses $\alpha = \dfrac{-k-\varepsilon h}{1-\varepsilon h}\,c$ et $\beta = \dfrac{k-\varepsilon h}{1-\varepsilon h}\,c$, de somme $\alpha + \beta = \dfrac{2\varepsilon h}{\varepsilon h - 1}\,c$ et de produit $\alpha\beta = \dfrac{h^2-k^2}{(1-\varepsilon h)^2}\,c^2$. Une équation du cercle principal relatif à la branche est $y^2 = -\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$, soit encore $\rho^2 = (\alpha+\beta)\,x - \alpha\beta$.

Reportant cette expression dans celle du polynôme P, il vient

$$(1-h^2)^2\rho^4 + 4h^2(1-h^2)cx\rho^2 + 2c^2[2h^4x^2 + (h^4 - h^2k^2 - h^2 - k^2)\rho^2]$$

$$+4h^2(k^2-h^2)c^3x + (k^2-h^2)^2c^4$$

$$= \left(\frac{2ch}{1-\varepsilon h}\right)^2 [(1-\varepsilon h)^2 x^2 + 2c\,\varepsilon h(1-\varepsilon h)x - (k^2-h^2)c^2]$$
$$= 4c^2h^2[x^2 - (\alpha+\beta)\,x + \alpha\beta] = -4\,c^2h^2y^2.$$

Il en résulte que P est strictement négatif en tout point du cercle principal (sauf en ses points communs avec l'axe des abscisses), et que ces deux cercles, privés de ces points, appartiennent à la partie située entre les deux branches et caractérisée par l'inégalité $P < 0$.

Finalement la branche intérieure est strictement incluse dans le disque principal associé, alors que la branche extérieure est strictement extérieure à l'autre disque principal (aux quatre exceptions près signalées plus haut). On peut en déduire une règle simple permettant de distinguer une branche intérieure d'une branche extérieure (même non cordiforme) : la première est plus large que haute, alors que la seconde est plus haute que large. Ce qui précède montre également que les quatre tangentes parallèles à l'axe des abscisses sont deux à deux distinctes.

Les calculs précédents donnent aussitôt l'abscisse ω de l'isobarycentre Ω des quatre points d'ordonnée nulle, à savoir $\omega = -\dfrac{h^2}{1-h^2}\,c$. Ce point est appelé *centre* ou *foyer singulier* de l'Ovale ; cette dernière dénomination sera justifiée plus loin.

Normales et tangentes aux Ovales

a) La détermination de la normale au point courant d'une Ovale (et donc de la tangente) a constitué le premier tour de force de Descartes, qui en a donné une application mémorable au problème du stigmatisme optique parfait en appliquant sa méthode algébrique à sa représentation paramétrique en z. Voici d'abord une méthode différentielle, plus rapide et précise.

Soient $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ les trois vecteurs unitaires issus de M et respectivement définis par $\overrightarrow{MF} = \rho\,\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{MG} = r\,\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{MH} = R\,\overrightarrow{w}$. Différentier ces égalités et les multiplier scalairement respectivement par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ donne les égalités

$$\left(\overrightarrow{dM}|\overrightarrow{u}\right) = -\,d\rho, \qquad \left(\overrightarrow{dM}|\overrightarrow{v}\right) = -\,dr, \qquad \left(\overrightarrow{dM}|\overrightarrow{w}\right) = -\,dR.$$

Les égalités $d\rho = \varepsilon h\,dr$, $k\,d\rho = \varepsilon h\,dR$ et $dR = k\,dr$ montrent aussitôt que l'éventuel vecteur normal est proportionnel à chacun des vecteurs

$$\overrightarrow{u} - \varepsilon h\,\overrightarrow{v}, \qquad k\,\overrightarrow{u} - \varepsilon h\,\overrightarrow{w}, \qquad \overrightarrow{w} - k\,\overrightarrow{v}.$$

La simplicité de ce résultat est exceptionnelle.

b) Soit V l'intersection (éventuelle) de la normale en M et de l'axe des abscisses, ν son abscisse et s la norme de MV. Ce point n'existe que si, et seulement si, M n'est pas un point à tangente perpendiculaire à l'axe des abscisses. En particulier, ce n'est pas l'un des quatre sommets de l'Ovale. Les égalités $c\,\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{FG} = r\,\overrightarrow{v} - \rho\,\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{FV} = -\,\rho h\overrightarrow{u} + \lambda\,(\overrightarrow{u} - \varepsilon h\,\overrightarrow{v}) = \nu\,\overrightarrow{\imath}$ et l'indépendance des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donnent $\nu = \dfrac{h\rho}{h\rho - \varepsilon r}\,c$, valeur implicitement donnée par Descartes au début de sa vérification de ce que les Ovales résolvaient bien son problème de stigmatisme. Des calculs simples montrent que $\nu - c = \dfrac{\varepsilon r}{h\rho}\,\nu$ et $\nu - e = \dfrac{\varepsilon k R}{h\rho}\,\nu$ (il existe de nombreuses autres expressions de ces quantités, mais celles-ci suffiront).

Le calcul des produits $\overrightarrow{MV} \wedge \overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{MV} \wedge \overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MV} \wedge \overrightarrow{MH}$ donne, pour valeurs des sinus des angles $\varphi = \big(\overrightarrow{MV}, \overrightarrow{MF}\big)$, $\psi = \big(\overrightarrow{MV}, \overrightarrow{MG}\big)$ et $\tau = \big(\overrightarrow{MV} \wedge \overrightarrow{MH}\big)$, les valeurs $-\dfrac{\nu y}{\rho s}$, $\dfrac{y(c-\nu)}{rs}$ et $\dfrac{y(e-\nu)}{Rs}\cdot$ En résultent les égalités très remarquables

$$\varepsilon\,\frac{\sin\varphi}{h} = \sin\psi = \frac{\sin\tau}{k}\cdot$$

Il en résulte surtout que le rapport des sinus de n'importe quel couple de ces trois angles est constant ; c'est de cette propriété rare que découlent les applications de la théorie des Ovales de Descartes à l'optique qui seront largement développées plus loin.

c) Les différents points d'abscisse $\dfrac{c}{2}$ correspondent à $\rho = r = \dfrac{kc}{1 - \varepsilon h}$: alors $\nu = \dfrac{h}{h - \varepsilon}\,c < \dfrac{c}{2}$ puisque $\dfrac{h}{h-1} < 0 < \dfrac{h}{h+1} < \dfrac{1}{2}\cdot$ Par suite, en ces points, la pente de la tangente est négative, ce qui montre que les points où la tangente est orthogonale à l'axe des ordonnées ont une abscisse strictement inférieure à $\dfrac{c}{2}\cdot$

d) L'application de la méthode de Descartes au couple d'équations $x = U(z)$ et $y^2 = V(z)$ conduit évidemment à la même valeur de ν. Rappelons qu'elle consiste à rechercher l'abscisse ν du centre du cercle centré sur l'axe des abscisses et coupant l'Ovale en au moins deux points confondus avec M. En voici une mise en œuvre, adaptée aux notations précédentes, qui respecte la technique cartésienne sinon sa lettre.

Soit s le rayon de ce cercle. Rappelons les égalités

$r = b + z, \quad \rho = a + \varepsilon hz, \quad 2c\,x = (h^2-1)\,z^2 + 2\,(\varepsilon ha - b)\,z + a^2 - b^2 + c^2.$

Dans les notations mêmes de Descartes, tout cercle de centre $(\nu, 0)$ et de rayon s a une équation de la forme $2\nu x = \rho^2 + v^2 - s^2$. S'il passe par M, on dispose des égalités

$\nu\,[(h^2-1)\,z^2 + 2(\varepsilon ha - b)\,z + a^2 - b^2 + c^2] = 2\,c\nu x = c\,[(a+\varepsilon hz)^2 + v^2 - s^2]$

d'où l'annulation d'un polynôme du second degré en z dépendant de a, b, c, εh et ν. Pour que ce cercle ait pour centre un point de la normale en M, il faut donc que le paramètre z de M soit racine multiple de l'équation $Az^2 + 2Bz + C = 0$ où $A = \nu\,(h^2-1) - ch^2$ et $B = \nu\,(\varepsilon ha - b) - \varepsilon ach$. Une racine multiple d'un tel polynôme est nécessairement une racine double ; l'égalité $z = -\dfrac{B}{A}$ est donc nécessaire. De cette relation on déduit aussitôt

$$\nu = \varepsilon ch\,\frac{a + \varepsilon hz}{(h^2-1)z + \varepsilon ha - b} = \frac{\varepsilon ch\rho}{h^2 z + \varepsilon ha - r} = \frac{ch\rho}{h\rho - \varepsilon r}\cdot$$

Dans son texte, Descartes n'utilise pas la valeur explicite de la racine double, mais la retrouve sans peine grâce à la méthode des coefficients indéterminés (introduite pour la circonstance) appliquée à la divisibilité de $Az^2 + 2Bz + C$ par une expression du type $(z - f)^2$. Que l'on obtienne une équation du second degré en le paramètre z est un hasard heureux, sans lequel il aurait été bien difficile, en 1637, de déterminer ainsi simplement la normale en M. Il faut également signaler que seule est donnée, dans *La*

Géométrie, la valeur de ν en fonction - homographique - de z et non son expression en fonction de ρ et r, mais c'est sans grande importance.

Le fait que l'on obtienne ainsi une équation du premier degré pour avoir ν pourrait sembler être également un coup de chance, mais il n'en est rien : Descartes aurait pu démontrer, avec les moyens de son temps, que c'est toujours le cas pour une courbe telle que x et x^2+y^2 s'expriment polynomialement en fonction d'un paramètre z (ou même rationnellement, dans le cas d'une *courbe unicursale* par exemple). Par contre, le cas général d'une *courbe algébrique*, où l'on élimine encore y au profit de x par la relation $y^2 = -x^2 + 2vx + s^2 - v^2$ conduit à une équation algébrique en ν aux coefficients polynomiaux en x, dont le degré n'est égal à un que si et seulement si les points d'abscisse x sur la courbe ont tous même pied de normale ; c'est le cas par exemple si y ne figure que par y ou y^2, comme par exemple pour le graphe d'une fonction rationnelle ou de la racine carrée d'une telle fonction (par exemple une conique symétrique par rapport à l'axe des abscisses).

e) Ayant réglé le problème de la détermination générique de la tangente à une Ovale en l'un de ses points M, il est maintenant possible d'étudier celles qui seraient issues du troisième foyer H. Une condition nécessaire et suffisante est évidemment la nullité de l'expression $y^2 - (x-\nu)(e-x)$. La multipliant par $2k\,(h\rho - \varepsilon kR) = 2k\,\dfrac{eh\rho}{\nu}$, il vient

$$2k\,(h\rho-\varepsilon kR)\,\rho^2+k(\varepsilon kR-2h\rho)\,(2ex)+2e^2kh\rho = \varepsilon kR\,[k(e^2-\rho^2-R^2)+2\varepsilon hR\rho]$$

$$= \varepsilon R\,[(k^2-1)\,e^2 + (h^2-k^2)\,R^2] = \varepsilon R\,(h^2-k^2)\,(R^2-de)$$

puisque $k\rho - \varepsilon hR = e$. De telles tangentes éventuelles sont donc déterminées par $R = \sqrt{de}$; reste à voir si cette valeur est acceptable.

f) On en déduit les valeurs de ρ et r associées, à savoir

$$\rho = \frac{\sqrt{e}}{k}\,\big[\sqrt{e} + \varepsilon h\sqrt{d}\big], \qquad r = \frac{\sqrt{d}}{k}\,\big[\sqrt{e} + \varepsilon h\sqrt{d}\big].$$

Le fait que ρ, par exemple, soit comme R strictement positif et satisfait à l'égalité $k\rho - \varepsilon hR = e$ suffit à justifier l'existence de ces tangentes ; pour chaque branche, il existe deux telles tangentes, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

De plus les calculs ci-dessus montrent immédiatement que, pour $\varepsilon = -1$, l'inégalité $y^2 < (x - \nu)(e - x)$, qui équivaut au fait que l'angle en M du triangle VMH est obtus, équivaut par conséquent aussi à l'inégalité $R < \sqrt{de}$. Cela correspond au fait que H et V sont de part et d'autre de la tangente en M.

g) Les égalités

$$0 = (k\,\rho - e)^2 - R^2h^2 = (k\,\rho - e)^2 - cdh^2 = k\,(k\rho^2 - 2e\,\rho + kec)$$

impliquent

$$2ke\,x = k\,(\rho^2 + e^2 - R^2) = k\,(\rho^2 + ce) = 2e\rho$$

d'où $\rho = kx$ et, en coordonnées polaires de pôle F, $\cos\theta = \dfrac{1}{k}\cdot$ Cette valeur étant indépendante de ε, il en résulte que deux points de contact de tangentes issues de H situés dans le même demi-plan d'arête FGH sont donc alignés avec F.

Les quatre points de contact sont deux à deux distincts sur le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{de}$. Deux de ces points de contact qui sont non symétriques et non alignés avec F le sont avec G ; en effet l'inversion de pôle G et de puissance $-ce$ échange les deux branches, et les tangentes en deux points inverses forment des triangles isocèles avec la droite qui les joint.

Cercles bitangents à une Ovale

a) Une Ovale de Descartes admet six familles de cercles bitangents. Les plus simples sont les cercles dits *focaux*, déjà connus de Descartes, de centre $(\nu, 0)$ qui enveloppent la branche associée à ε. Pour les étudier, il est assez commode de prendre la paramétrisation en t de la page 394. Les calculs sont élémentaires mais assez lourds. En voici la synthèse, qui commence par le calcul de

$$\nu = \frac{\varepsilon h\rho}{\varepsilon h\rho - r}\,c = -\,\varepsilon h\,\frac{k + \varepsilon ht}{(1 - \varepsilon h)(k + [1 + \varepsilon h]t)}\,c.$$

On notera que ces égalités définissent ν comme fonction homographique de t ; lorsque t décrit le segment $[-1, 1]$, son image $\nu(t)$ décrit donc également un segment si ν est défini en tout point, et sinon la réunion de deux demi-droites alignées fermées disjointes.

Les valeurs extrêmes de ν sont

$$\varepsilon h \, \frac{k - \varepsilon h}{(1 - \varepsilon h)(1 + \varepsilon h - k)} \, c$$

si $t = -1$ et

$$-\, \varepsilon h \, \frac{k + \varepsilon h}{(1 - \varepsilon h)(1 + \varepsilon h + k)} \, c$$

si $t = 1$. Pour chacun de ces cas, la différence $\nu - x$ mesurant la position relative du pied de la normale (c'est-à-dire, dans ce cas, le centre du cercle surosculateur) par rapport au sommet considéré, vaut $\dfrac{(k-1)(k-\varepsilon h)}{(1-\varepsilon h)(1+\varepsilon h - k)} \, c$ pour l'une et $\dfrac{(k+1)(k+\varepsilon h)}{(1-\varepsilon h)(1+\varepsilon h + k)} \, c$ pour l'autre. On dispose donc ainsi des rayons de courbure en chacun des deux sommets de la branche (ne pas oublier de prendre les valeurs absolues).

Des calculs purement mécaniques, toujours basés sur cette représentation paramétrique en t, permettent de montrer que

[**i**] Pour la branche intérieure, les centres de ces cercles (c'est-à-dire les pieds des normales) décrivent un segment strictement inclus entre F et G, donc intérieur à cette branche.

[**ii**] Si l'autre branche n'est pas cordiforme mais oviforme, c'est-à-dire si $k \geqslant 1 + h$, l'ensemble des centres est également un segment, formé de points d'abscisses strictement inférieures à celle de F, pouvant même être inférieures à celles des sommets de l'Ovale et être aussi proche que l'on veut de $-\infty$ pour des valeurs adéquates de k et h.

[**iii**] Pour une branche cordiforme, le réel ν n'existe pas pour les points à tangente parallèle à l'axe des ordonnées (c'est-à-dire le sommet dans le cas $1 + h = k$) ; les centres décrivent alors une réunion de deux demi-droites fermées disjointes dont les abscisses des extrémités sont respectivement comprise entre celles du sommet et de F pour la première, et strictement supérieure à celle de H pour la seconde.

Dans chacun de ces trois cas, on peut vérifier qu'aucun des trois pôles ne peut être pied de normale, ce que l'expression de ν permet d'ailleurs de vérifier facilement [79].

b) Les quatre autres familles ont leurs centres situés sur trois cercles de centre le foyer singulier Ω de coordonnées $(\omega, 0)$ avec $\omega = -\dfrac{h^2}{1-h^2}\,c$ (les cercles principaux rencontrés plus haut sont des cas particuliers de deux d'entre elles).

Nous allons d'abord étudier la famille associée au foyer F. Pour un nombre θ donné, nous noterons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'} = \dfrac{d}{d\theta}\,\overrightarrow{u}$ les vecteurs unitaires orthogonaux de coordonnées respectives $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ et $(\sin\theta, -\cos\theta)$. La droite d'angle polaire θ avec F comme pôle coupe l'Ovale en deux points M_1 et M_2 définis par les nombres strictement positifs ρ_1 et ρ_2 solutions de l'équation en ρ de la page 395

$$\rho^2 - 2A\,\rho + B = 0$$

avec $A = \dfrac{k - h^2\cos\theta}{1-h^2}\,c$ et $B = \dfrac{k^2-h^2}{1-h^2}\,c^2 = ce$. Par définition, on dispose des égalités $\overrightarrow{FM_i} = \rho_i\,\overrightarrow{u}$. Soit L le milieu du segment $[M_1M_2]$, vérifiant donc les égalités

$$\overrightarrow{M_1L} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FM_2} - \overrightarrow{FM_1}\right) = \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\,\overrightarrow{u} = (\rho_1 - A)\,\overrightarrow{u}, \qquad \overrightarrow{FL} = -A\,\overrightarrow{u}.$$

Les deux racines de l'équation $\rho^2 - 2A\,\rho + B = 0$ peuvent être indexées de façon à ce que chacune d'entre elles définisse une fonction dérivable de θ. Soit donc $\rho(\theta)$ l'une de ces fonctions, par exemple ρ_1. La dérivation étant toujours effectuée par rapport à θ, on dispose alors de l'égalité $\dfrac{\rho'}{\rho} = \dfrac{A'}{\rho - A}$ qui découle de la forme de l'équation puisque $B' = 0$.

79. Les valeurs 0, c et e de ν seraient respectivement obtenues pour les valeurs $-\varepsilon\,\dfrac{k}{h}$, $-k$ et $-\dfrac{\varepsilon k^2 + h}{k(h+\varepsilon)}$ de t, qui n'appartiennent pas au segment $[-1, 1]$.

Soit m le point d'intersection de la normale en M et de la perpendiculaire en L à la droite d'angle polaire θ (le calcul suivant prouvera son existence). Si $\overrightarrow{Lm} = \ell\,\overrightarrow{u'}$, le scalaire ℓ est défini par les relations

$$0 = \left(\overrightarrow{Mm}\middle|\overrightarrow{dM}\right) = \left(\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{Lm}\middle|\overrightarrow{dM}\right) = (\rho - A)\left(\overrightarrow{u}\middle|\overrightarrow{dM}\right) + \ell\left(\overrightarrow{u'}\middle|\overrightarrow{dM}\right)$$

$$= -(\rho - A)\,d\rho + \ell\left(\overrightarrow{u'}\middle| -d\rho\,\overrightarrow{u} - \rho\,\overrightarrow{du}\right) = (A - \rho)\,d\rho - \ell\,\rho\,d\theta.$$

Par suite le quatrième sommet μ du rectangle $(FLm\mu)$ vérifie les égalités

$$\overrightarrow{F\mu} = \overrightarrow{Lm} = \ell\,\overrightarrow{u'} = \frac{A-\rho}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\theta}\,\overrightarrow{u'} = -A'\,\overrightarrow{u'}.$$

Finalement le point m est le même pour ρ_1 et pour ρ_2, et les normales en M_1 et M_2 forment des angles opposées avec la droite M_1M_2 : c'est d'ailleurs une conséquence immédiate du fait que ces deux points sont inverses l'un de l'autre dans l'inversion de pôle F dont la puissance vaut $\rho_1\rho_2 = B = ce$. De plus, si la parallèle à M_1M_2 issue de m coupe l'axe en un point Ω défini par $\overrightarrow{F\Omega} = \omega\,\overrightarrow{\imath}$, alors

$$-\frac{h^2\sin\theta}{1-h^2}\,c = -A' = \left(\overrightarrow{F\mu}\middle|\overrightarrow{u'}\right) = \omega\left(\overrightarrow{\imath}\middle|\overrightarrow{u'}\right) = \omega\,\sin\theta$$

d'où $\omega = -\dfrac{h^2}{1-h^2}\,c$, au moins pour $\sin\theta \neq 0$. Le point Ω est donc fixe ; le cas exceptionnel $\sin\theta = 0$ est celui pour lequel le rectangle $(FLm\mu)$ est aplati, et l'axe n'est pas sécant à la droite $F\mu$, ce qui rend Ω non défini.

Reste à prouver que la longueur Ωm est constante ; en effet, si $\overrightarrow{\Omega\mu} = \pi\,\overrightarrow{u}$, on dispose des relations

$$\pi = \left(\overrightarrow{\Omega\mu}\middle|\overrightarrow{u}\right) = \left(\overrightarrow{F\mu} - \omega\,\overrightarrow{\imath}\middle|\overrightarrow{u}\right) = -\omega\left(\overrightarrow{\imath}\middle|\overrightarrow{u}\right) = \omega\,\cos\theta,$$

$$\overrightarrow{\Omega m} = \overrightarrow{\Omega\mu} + \overrightarrow{\mu m} = \overrightarrow{\Omega\mu} + \overrightarrow{FL} = (\pi - A)\,\overrightarrow{u} = -\frac{kc}{1-h^2}\,\overrightarrow{u}$$

ce qui montre finalement que m est situé sur le cercle de centre Ω et de rayon $\chi = \dfrac{kc}{1-h^2}\cdot$

On peut remarquer que la tangente en m à ce cercle contient L, qui appartient donc à sa podaire relative à F (qui est un limaçon de Pascal).

Sachant que la puissance de F par rapport à ce cercle est ce, on peut déduire de ce fait une construction point par point de l'Ovale de Descartes, qui est aussi l'enveloppe de cette famille de cercles bitangents.

Le point m jouit de plus d'une propriété intéressante. En effet, toujours sous l'hypothèse $\sin\theta \neq 0$, le cercle Γ' circonscrit au triangle (mGH) et le cercle Γ'' circonscrit au triangle (mM_1M_2) sont égaux.

Ils sont tous deux centrés en effet sur la médiatrice mL de $[M_1M_2]$. C'est clair pour Γ'' ; pour Γ' cela résulte des égalités

$$\big(\overrightarrow{\Omega G}\big|\overrightarrow{\Omega H}\big) = (c-\omega)\,(e-\omega) = \Big(\frac{ck}{1-h^2}\Big)^2 = \Omega m^2$$

qui montrent que la droite Ωm est la tangente en m à Γ'. Par suite, si l'on note N_1 et N_2 les intersections de M_1M_2 avec Γ', alors

$$\big(\overrightarrow{FM_1}\big|\overrightarrow{FM_2}\big) = ce = \big(\overrightarrow{FG}\big|\overrightarrow{FH}\big) = \big(\overrightarrow{FN_1}\big|\overrightarrow{FN_2}\big).$$

Comme les segments $[M_1M_2]$ et $[N_1N_2]$ ont même milieu L, les paires $\{M_1, M_2\}$ et $\{N_1, N_2\}$ sont identiques et M_1 et M_2 sont sur Γ''.

c) Changer le texte ci-dessus en remplaçant le premier foyer F par le troisième G est sans problème. Pour ces deux familles de cercles bitangents à l'Ovale, on peut montrer sans difficulté que les lieux de leurs centres m sont les cercles de centre Ω et de rayons respectifs $\dfrac{kc}{1-h^2} = \sqrt{\Omega G \cdot \Omega H}$ et $\dfrac{khc}{1-h^2} = \sqrt{\Omega H \cdot \Omega F}$; tous leurs points conviennent.

Les deux dernières familles de cercles bitangents sont associées au troisième foyer H. Il y a deux différences d'avec les précédentes. Tout d'abord ces cercles sont bitangents à la même composante connexe de l'Ovale (d'où une famille pour $\varepsilon = 1$, et une autre pour $\varepsilon = -1$). Ensuite, le nombre θ ne pouvant prendre toutes les valeurs entre 0 et 2π, le lieu des m est formé de deux arcs séparés (mais situés sur le même cercle). Sans détailler les calculs, on trouve que le rayon de ce cercle unique est $\dfrac{hc}{1-h^2} = \sqrt{\Omega F \cdot \Omega G}$. Enfin les points limites des arcs décrits par m sont les centres des cercles surosculateurs en les quatre points de contact des tangentes issues de H à l'Ovale ; ils sont deux à deux alignés avec F, ou avec G, ou enfin situés sur une perpendiculaire à FG qui est un axe de symétrie pour la figure qu'ils forment.

d) Les trois cercles de centre Ω ainsi déterminés peuvent recevoir une autre définition, apollonienne, très intéressante. En effet, celui qui est associé à F n'est autre que le lieu des points m vérifiant la relation $\dfrac{R}{r} = k$. Tout repose sur l'égalité $\left(\overrightarrow{\Omega G}\middle|\overrightarrow{\Omega H}\right) = \Omega m^2$ qui implique la similitude des triangles $(\Omega m G)$ et $(\Omega H m)$ puis $\Omega m = \dfrac{kc}{1-h^2}$, $\Omega H = e - \omega = \dfrac{ck^2}{1-h^2}$, d'où les relations

$$\frac{R}{r} = \frac{mH}{Gm} = \frac{\Omega H}{\Omega m} = \frac{ck^2}{1-h^2}\,\frac{1-h^2}{kc} = k.$$

De même le cercle associé à G peut-il être défini par $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{h}{k}$ et celui associé à H par $\dfrac{\rho}{R} = k$.

Le calcul de la puissance ce de F relative au cercle de centre m montre que le carré de ce rayon vaut $\rho^2 - ce$. Or la remarquable *relation de Stewart* $c\,R^2 + d\,\rho^2 - e\,r^2 = cde$ ainsi que l'égalité $e = ck^2 + dh^2$, déjà rencontrées, montrent que ce carré est égal à

$$\frac{er^2 - cR^2}{d} = (e - ck^2)\,\frac{r^2}{d} = h^2 r^2 = \frac{h^2 R^2}{k^2}\,\cdot$$

Il en résulte que le rayon de ce cercle vérifie les égalités remarquables

$$mM_1 = mM_2 = hr = h\,mG = \frac{h}{k}\,R = \frac{h}{k}\,mH.$$

Elles permettent naturellement des constructions très simples de ces cercles, et donc de l'Ovale puisque M_1 et M_2 en sont les intersections d'avec la parallèle à Ωm issue de F. Bien entendu, on peut trouver des relations analogues pour les autres cercles bitangents non focaux.

e) Reste à justifier le nom de *foyer singulier* donné à Ω. D'après la définition plückerienne, un foyer est un point dont les isotropes sont tangentes à la courbe considérée. Pour les points F, G et H, les calculs sont plutôt triviaux (par exemple l'équation cartésienne avec origine en F donne $P(x,ix) = [2h^3cx + (k^2 - h^2)c^2]^2$). Par contre, le foyer Ω est nettement plus difficile à traiter. En effet, les isotropes de Ω sont bien tangentes à l'Ovale, mais aux points cycliques eux-mêmes, points de rebroussement de l'Ovale, ayant justement pour tangentes les isotropes de Ω.

Pour le prouver, il faut naturellement passer en coordonnées projectives (X, Y, Z) d'origine F par exemple. Soit donc I le point cyclique de coordonnées $(1, i, 0)$; notant $\Pi(X, Y, Z) = Z^4 P\Big(\dfrac{X}{Z}, \dfrac{Y}{Z}\Big)$, on constate que les trois dérivées premières Π'_X, Π'_Y et Π'_Z s'annulent en I : il faut donc passer au terme suivant dans le développement de Taylor. Tous calculs faits, il vient que la somme $\sum \big[X^2\Pi''_{X_0^2} + 2\,Y Z\,\Pi''_{Y_0 Z_0}\big]$ est un carré parfait, à savoir $8\,([h^2-1]\,[X+iY] - ch^2 Z)^2$; la tangente double en I a donc pour équation $x + iy = \dfrac{ch^2}{h^2-1} = \omega$, celle d'une des deux isotropes de Ω.

Il résulte de ce point que six tangentes à l'Ovale passent par I : la droite de l'infini - de manière abusive : en fait elle ne peut être considérée comme tangente que parce qu'elle réunit deux points de rebroussement -, la droite $I\Omega$ qui doit être comptée comme double, et les trois droites IF, IG et IH. Cela peut d'ailleurs pratiquement se visualiser par une homographie complexe appropriée.

D'une manière générale d'ailleurs, l'Ovale est de sixième classe, c'est-à-dire que d'un point du plan on peut tracer six tangentes - réelles ou non, distinctes ou non, à distance finie ou non - à l'Ovale. Cela peut se prouver grâce à un logiciel de calcul formel. Sous *Mathematica* par exemple, un usage judicieux de l'instruction `Resultant` conduit à une équation tangentielle de la forme

$$4096\,c^6(-1+h^2)^2k^4(u^2+v^2)^3\Phi(u,v,w) = 0$$

avec

$$\Phi(u,v,w) = c^6h^4u^6 + \cdots + 4h^8w^6,$$

polynôme homogène de degré six en (u, v, w) (coefficients d'une droite arbitraire d'équation $ux + vy + w = 0$), comportant 173 termes, dont un avec 108 comme coefficient !

f) On peut d'ailleurs vérifier l'égalité $\Phi(1-h^2,(1-h^2)c, ch^2) = 0$. Ces calculs reposent sur la fonction `EqTgt` définie sous *Mathematica* par

```
EqTgt[f_,{x_,y_},{u_,v_,w_}] :=
      Block[{g,mgp},g=f/.y->m*x+p;
      g=Resultant[g,D[g,x],x]/Coefficient[g,x,Exponent[g,x]];
      g/.{m->-u/v,p->-w/v}//Together//Numerator//Factor]
```

Le nombre r de points de rebroussement étant égal à deux, sans qu'il n'y ait d'autre point multiple, la formule de Plücker donne d'ailleurs comme classe de l'Ovale $n(n-1) - 3r = 12 - 6 = 6$, ce qui est confirmé par le résultat ci-dessus, le terme parasite $(u^2+v^2)^3$ provenant du calcul du résultant et de la réduction à la forme polynomiale de la fraction rationnelle obtenue.

Le centre d'une Ovale

a) L'introduction du centre Ω présente encore un intérêt particulier. En effet le transport de l'origine des coordonnées en ce point, au lieu de F par exemple, correspond au simple emplacement de x par $x+\omega$. Sachant que $\omega = -\dfrac{h^2}{1-h^2}\,c$, cela donne

$$0 = (1-h^2)^2 P(x+\omega, y) = \mathcal{A}\rho^4 + \mathcal{B}\rho^2 + \mathcal{C}x + \mathcal{D}$$

où $\rho = \Omega M = \sqrt{x^2+y^2}$ [notation à distinguer de l'égalité précédente $\rho = FM$],

$$\mathcal{A} = (1-h^2)^4, \quad \mathcal{B} = -2\,(1-h^2)^2\,(h^2k^2+h^2+k^2)\,c^2, \quad \mathcal{C} = 8\,h^2k^2(1-h^2)\,c^3,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= [(1-h^2)k^4 - 2h^2(1+h^2)k^2 + h^4]\,c^4\\ &= (hk+h+k)\,(hk+h-k)\,(hk-h+k)\,(hk-h-k)\,c^4.\end{aligned}$$

Sous cette forme, le fait que les isotropes de Ω sont tangentes de rebroussement de première espèce aux points cycliques est clair : en coordonnées projectives, pour $Y = iX$, on dispose de l'équation $0 = Z^3(\mathcal{C}X + \mathcal{D}Z)$ puisque ρ^2 divise les termes de degré 4 et 2 alors que ceux du troisième degré sont nuls.

Il existe un triplet $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ tel qu'une équation polaire de l'Ovale avec le pôle en Ω s'écrive

$$\cos\theta = \mathcal{P}\,\rho^3 + \mathcal{Q}\,\rho + \frac{\mathcal{R}}{\rho}\cdot$$

On en déduit qu'un cercle de centre Ω ne rencontre l'Ovale qu'en deux points au plus, alors nécessairement symétriques par rapport à l'axe.

Il en résulte aussi une nouvelle représentation paramétrique, semi-rationnelle et des plus commodes, à savoir

$$x = \mathcal{P}\,\ell^2 + \mathcal{Q}\,\ell + \mathcal{R}, \qquad y^2 = \ell - x^2.$$

Inversement, de telles équations ne représentent pas nécessairement une Ovale : on s'en persuadera en étudiant la courbe définie par $\rho^4 = \rho^2 + x + 1$, soit en paramétriques $\left(\ell^2 - \ell - 1, \pm\sqrt{\ell - (\ell^2 - \ell - 1)^2}\right)$ pour ℓ variant entre 1 et l'unique racine réelle de $\ell^3 - \ell^2 - 2\ell - 1 = 0$ (voisine de $2,148$), qui n'a qu'une seule composante connexe au lieu de deux. On en déduit *a fortiori* qu'une quartique bicirculaire n'est pas nécessairement une Ovale.

b) La considération du centre Ω conduit enfin à deux propriétés étonnantes concernant tout quadruplet (M_1, M_2, M_3, M_4) de points alignés de l'Ovale. En éliminant θ entre l'équation $\cos\theta = \mathcal{P}\,\rho^3 + \mathcal{Q}\,\rho + \dfrac{\mathcal{R}}{\rho}$ et celle du support des quatre points, du type $\rho\,(\xi\,\cos\theta + \eta\,\sin\theta) = \zeta$, on obtient une équation paire du huitième degré en ρ, dont les premiers termes d'écrivent sous la forme $[\xi^2 + \eta^2]\,[\mathcal{P}^2\rho^8 + 2\,\mathcal{P}\mathcal{Q}\,\rho^6 + \cdots] = 0$. En résultent les égalités suivantes, où ρ_i est la distance ΩM_i

$$\sum \Omega M_i^2 = \sum \rho_i^2 = -2\,\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{P}} = -2\,\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = 4\,\frac{h^2k^2 + h^2 + k^2}{(1-h^2)^2}\,c^2.$$

Cette somme est constante. Par suite l'égalité $\rho^2 - 2\omega\,x - 2\chi\,\rho + ce = 0$, où cette fois-ci $\rho_i = FM_i$, conduit aux égalités

$$2\chi \sum \rho_i = 4\omega^2 - 4ce - \sum \Omega M_i^2 = \frac{8k^2c^2}{(1-h^2)^2}$$

soit enfin à $FM_1 + FM_2 + FM_3 + FM_4 = \sum \rho_i = 4\,\chi$.

Les équations polaires respectivement relatives aux foyers G et H permettent un travail analogue, mais la somme jouant le rôle de $\sum \rho_i$ n'est plus nécessairement une somme de quatre nombres positifs : il se peut que, suivant les cas, on ait à prendre par exemple deux des GM_i avec le signe $+$ (pour les points sur la branche extérieure), et les autres avec le signe $-$ (la branche intérieure).

Applications des Ovales à l'optique

Nous devons nous intéresser ici à la construction du tableau donnant les index (N, T) décidant de l'application optique éventuelle d'une partie d'Ovale selon le sommet et le genre.

L'affirmation essentielle - géométriquement évidente et immédiate à justifier par calcul - a été donnée plus haut, en page 351 : pour qu'il y ait stigmatisme absolu entre deux points A et B, il est nécessaire que A et B soient tous les deux de part et d'autre de la tangente et de la normale. Il existe d'autres caractérisations tout aussi claires, notamment regroupées dans la page 374 et les suivantes.

Rappelons que $(N, T) = (\pm, \pm)$ avec, par exemple, $N = +$ (*resp.* $T = +$) si, et seulement si, les deux foyers considérés sont du même côté de la normale (*resp.* tangente). L'outil essentiel est celui de la continuité au sens de l'analyse moderne : les formules nous disent que les parties de l'axe décrites par les pieds des normales forment un segment ou deux demi-droites fermées pour une branche extérieure cordiforme (pour laquelle il existe deux points symétriques par rapport à l'axe pour lesquels la normale est parallèle à l'axe et distincte de lui). Un foyer donné peut-il être tantôt à droite et tantôt à gauche d'une normale variable ?

Les pieds des normales

Pour répondre à cette question, l'essentiel est évidemment *le fait qu'un foyer n'appartient à aucune normale*[80].

En effet des calculs, très ennuyeux mais faciles, menés à partir de la formule de la page 403, montrent que

a) Pour une branche intérieure, le lieu du pied de la normale est un segment strictement inclus dans l'intervalle FG ayant pour extrémités les deux premiers foyers[81].

b) Pour une branche extérieure oviforme, le lieu du pied de la normale est un segment strictement inclus dans l'intervalle formé des points d'abscisse strictement inférieure à celle du premier foyer F.

c) Pour une branche extérieure cordiforme, le lieu du pied de la normale est la réunion de deux demi-droites fermées strictement incluses, l'une dans l'intervalle formé des points d'abscisse strictement inférieure à celle du premier foyer F et l'autre formé des points d'abscisse strictement supérieure à celle du troisième foyer H.

Par suite, pour savoir si lorsqu'un point M se déplace sur l'Ovale un foyer donné peut passer d'un côté de sa normale à l'autre, la réponse est négative ; la valeur de N est donc une constante immédiate à déterminer sur un cas particulier.

Les pieds des tangentes

Il reste maintenant à montrer comment calculer T. Ici les pieds des tangentes ne peuvent jamais coïncider avec l'un des deux premiers foyers, comme le montre la page 395. L'outil de la preuve est ici la représentation polaire de

80. Voir page 405. Sauf évidemment pour les quatre sommets mais, même dans ce cas, on peut montrer qu'il n'est pas centre de courbure.

81. La situation est un peu analogue à celle des ellipses, où les points extrêmes du lieu sont les points de rebroussement de leur développée affine d'astroïde.

l'Ovale dans chacun des cas où le pôle est l'un des deux premiers foyers en employant la découverte de Descartes lui-même, selon laquelle une tangente correspond exactement à une racine multiple dans une équation. Par contre nous savons (page 402) que du troisième foyer H on peut tracer quatre tangentes, deux à la branche intérieure, deux à la branche extérieure. Ces tangentes délimitent sur chacune d'elles des parties à l'intérieur, parfaitement connues, auxquelles il suffit de limiter les positions possibles des points voisins des sommets de droite pour que la valeur de T reste constante, et déterminable en un point bien choisi.

Il n'est donc pas nécessaire de décrire avec précision les lieux divers engendrés par les pieds des tangentes sur l'axe et **les indications données ci-dessus suffisent donc à justifier entièrement le tableau de la page** 375.

Le but final : associer deux ovales

Nous touchons maintenant au zénith des ambitions cartésiennes : construire grâce à deux ovales accolées des instruments d'optique de forte puissance. Il en présente deux : une lentille en forme de ménisque et une autre biconvexe. Leur combinaison assure le stigmatisme absolu entre deux points G et F[82]. L'idée est très simple : pour chacune des deux Ovales il est effectué un choix de deux foyers parmi les trois possibles, et il existe un point qui est foyer de chacune d'elles. Dans ce qui suit, nous avons scrupuleusement gardé les notations cartésiennes. Le mécanisme est fort élémentaire : dans les deux cas, un faisceau de rayons issus d'un point G se réfracte une première fois en entrant dans un milieu plus réfringent comme du verre ; il est transformé en un faisceau tendant à reconverger vers H (*cf.* la page 379), lui même encore réfracté en sortant du verre pour terminer par une nouvelle convergence en F. Par suite (G, H) est le couple de foyers associé à la première Ovale, et (H, F) le couple de foyers associé à la seconde.

Les figures suivantes, qui parlent d'elles-mêmes, ne sont pas complètement correctes : elles ont été construites de manière simplifiée afin d'en permettre

82. Comme il y a davantage de paramètres, la qualité de cet effet peut être grandement améliorée par rapport au simple stigmatisme assuré par le premier genre, et surtout ces deux points sont tous deux dans l'air ce qui n'était pas encore le cas jusqu'ici.

une lecture plus immédiate, notamment au niveau du parcours dans le morceau de verre découpé par les surfaces des deux ovales utilisées par Descartes[83].

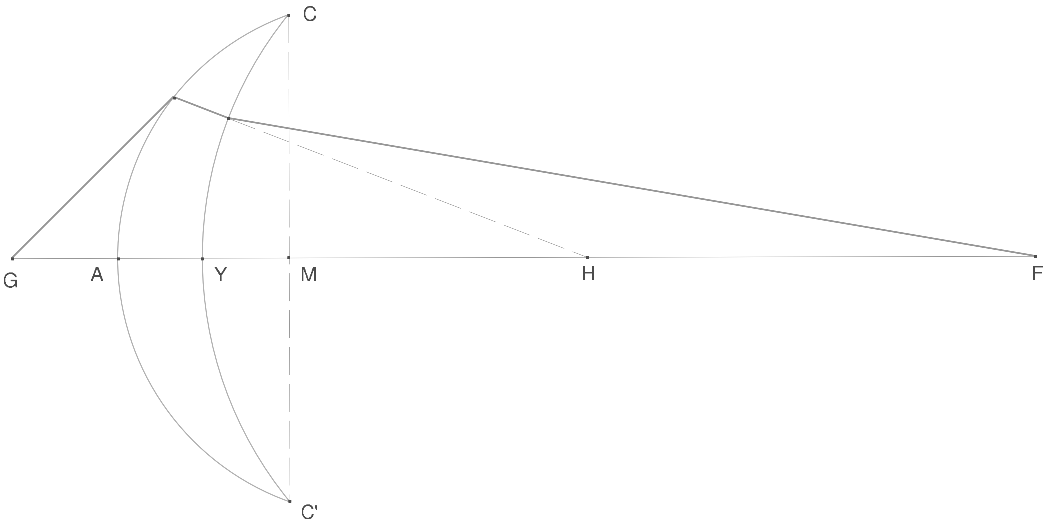


Figure 8.15 – *Le premier cas : lentille en forme de ménisque*

La première Ovale du premier cas est très simple : elle est de genre I et il s'agit du sommet A de droite d'une branche intérieure dont G et H sont respectivement le troisième et le premier foyer.

La seconde, qui réalise un effet loupe, peut présenter bien davantage de formes, empruntées aux genres II_a (branche intérieure), II_b, II_c et III (branche extérieure), ce dernier genre pouvant être présent sous deux formes différentes si elle est cordiforme. Dans ces quatre cas, le sommet choisi Y doit être celui de gauche, mais dans le cinquième cas (éventuel) il est à droite, et la figure cartésienne ne convient plus complètement. Enfin les numéros des foyers H et F varient très largement : tous peuvent être premier ou second foyer, mais F ne peut être le troisième ; nous laisserons le lecteur de les déterminer lui-même par des petits calculs sans difficulté aucune.

83. Respecter des dimensions strictement convenables aurait rendu le parcours dans le milieu réfringent beaucoup trop court et peu visible.

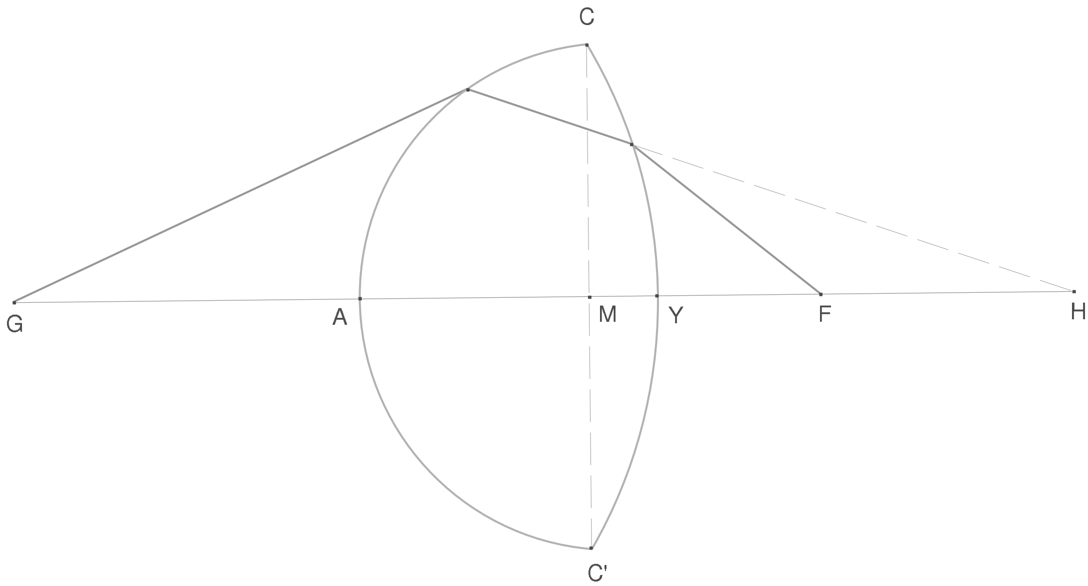


FIGURE 8.16 – *Le deuxième cas : lentille biconvexe*

Le second cas est plus simple : la première Ovale est la même que ci-dessus, la seconde étant d'un genre unique (III) au voisinage de son sommet de droite Y ; H est nécessairement le premier foyer et F le second.

Ce qui est intéressant, c'est que la seconde Ovale doit être cordiforme : Descartes le savait, qui a maladroitement essayé de le montrer par un dessin plutôt raté où le point Y est censé être un sommet de forme compliquée.

Dans chacun de ces deux cas, Descartes procède à l'ajustement des paramètres des deux Ovales par des calculs rationnels très simples : les décrypter est facile et laissé au lecteur.

Les Ovales vues par Newton

Newton parle des Ovales dans son œuvre à au moins trois reprises : d'abord dans les *Principia Mathematica* de 1687, livre I, proposition XCVII, p. 240

de la traduction française de 1756 par la Marquise du Châtelet[84] ; dans les *Séries et fluxions* de 1671, p. 58 de la traduction de Buffon de 1740 ; et enfin dans ses *Lectiones Opticæ* (à ne pas confondre avec son *Opticks*) rédigées entre 1669 et 1674 (publiées en 1729), I, prop. 34, cité par Montucla, Volume II, pp. 129, 260, 266.

Bien entendu Newton fut capable de montrer, grâce à son calcul différentiel, que les Ovales étaient de façon nécessaire et suffisante les solutions du problème de l'astigmatisme, en montrant qu'une certaine expression analogue à $\rho + mr$ devait être constante, mais il trouva à partir de cette équation en coordonnées bipolaires une autre application géométrique de ces courbes.

Étudiant dans les *Principia* le problème consistant à trouve le lieu d'un point M dont le rapport des distances à deux cercles donnés de centres et rayons respectifs (A, a) et (B, b) est une constante connue m, il prouva aussitôt que ce lieu pouvait être défini par l'égalité

$$|MA - a| = m\,|MB - b|$$

équivalente à la réunion de deux égalités de la forme

$$MA - m\,MB = a - mb, \qquad MA + m\,MB = a + mb.$$

On reconnaît là les équations de deux branches, l'une intérieure et l'autre extérieure, empruntées à deux Ovales distinctes, bien qu'admettant toutes deux A et B comme foyers. Cela constitue l'énoncé du *théorème de Newton sur les Ovales de Descartes*[85].

Les Ovales vues par Quételet

En 1825, le mathématicien belge Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796-1874), géomètre, astronome et statisticien, créa à Gand la revue *Correspondance mathématique et physique*. C'est dans son tome V de 1829, p. 112,

84. Signalons à ce propos une erreur dans l'article du *Traité des courbes remarquables planes et gauches* de Francisco Gomes Texeira, qui écrit CXVII au lieu de XCVII à la page 219 de son volume I de 1908.

85. Le fait que dans le texte original les deux cercles soient tangents est sans importance quant au résultat lui-même.

qu'il publie un théorème célèbre selon lequel la projection horizontale de l'intersection de deux cônes de révolution d'axes verticaux est en général une Ovale de Descartes avec les cas de dégénérescence connus (notamment des limaçons de Pascal autres que la cardioïde).

Un tel cône a une équation de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2\,(z-c)^2$. Avec des notations évidentes, déterminer la projection sur le plan d'équation $z=0$ d'un couple de tels cônes dont les axes sont supposés distincts revient à éliminer la variable z entre deux égalités de la forme

$$\rho=\delta p\,(z-u), \qquad r=\varepsilon\delta q\,(z-v)$$

(avec notamment $\varepsilon^2=\delta^2=1$) où p et q sont deux nombres strictement positifs. Cette élimination est immédiate et donne

$$\varepsilon q\rho-pr=\varepsilon\delta pq\,(v-u)$$

soit encore $\rho-\varepsilon hr=\delta kc$ où c est la distance des pieds des deux axes, $h=\dfrac{p}{q}$ et $k=\dfrac{p}{c}\,(v-u)$.

L'inclusion de cette projection dans une courbe d'équation $P_{k,h,c}(x,y)=0$ est maintenant claire. La réciproque est facile $\left(\text{poser } z=u+\dfrac{\delta}{p}\,\rho\right)$. Il reste à examiner les conditions pour obtenir une véritable Ovale. Que l'on ait $h>0$ est évident. Pour que l'on ait $k>0$, il faut et suffit que $u\neq v$; pour que l'on ait $h\neq 1$, il faut, et suffit, que $p\neq q$ (c'est-à-dire que les cônes ne soient pas translatés l'un de l'autre) ; enfin les cas $k=1$ (limaçon de Pascal à tangentes distinctes réelles) et $k=h$ (limaçon de Pascal à point double isolé) sont respectivement écartés si l'on suppose que $p\,(v-u)\neq c$ et $q\,(v-u)\neq c$.

Il en résulte qu'une Ovale est également la projection de l'intersection d'un cône de révolution et d'une certaine sphère (et plus généralement d'une quadrique appartenant au faisceau défini par les deux cônes) ; mais une telle intersection n'engendre pas nécessairement une Ovale de Descartes [86].

86. Quételet a également démontré, dans le Tome III des *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, que les caustiques secondaires produites par réflexion et réfraction dans un cercle éclairé par un point lumineux sont aussi des Ovales de Descartes.

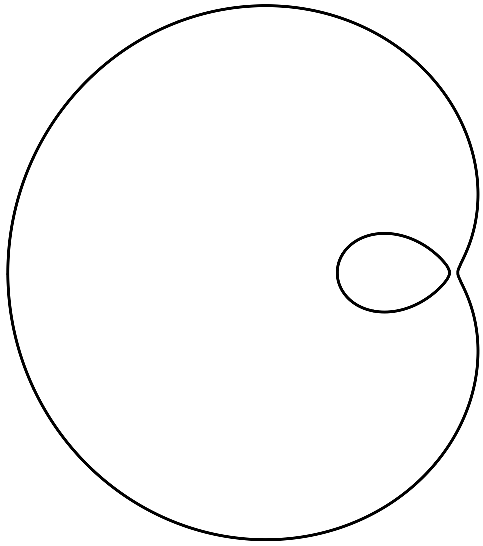


FIGURE 8.17 – *Ovale proche d'un limaçon de Pascal ($k = 21/20$, $h = 3/5$)*

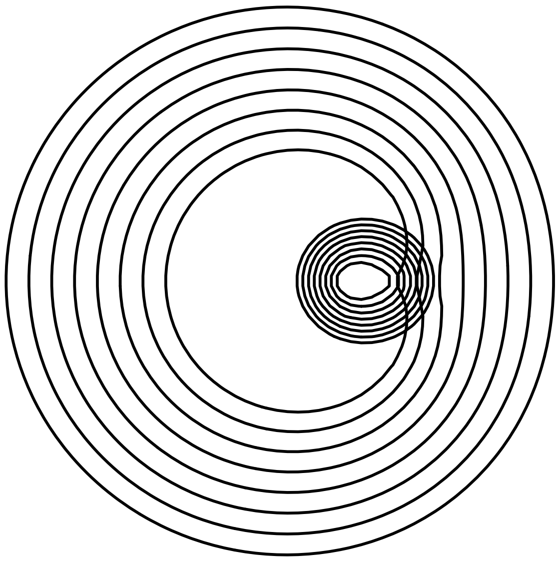


FIGURE 8.18 – *Une famille de huit Ovales ayant mêmes c et h*

Calculs particuliers d'abscisses de pieds de normales

Nous abordons ici quelques restitutions possibles de calculs sur des coniques à centre qui auraient pu conduire Descartes à la définition bipolaire de ses Ovales (voir page 382).

En premier, nous nous intéresserons aux foyers images par réflexion sur un miroir des foyers associés ; dans un deuxième temps (page 434) nous étudierons le cas des foyers images par réfraction des points à l'infini situés sur l'axe focal. Les formules que nous allons établir sont celles qui ont été utilisées dans la discussion de la possible origine de ces courbes, clairement pensées comme généralisations de coniques.

Pieds de normales et réflexion

Pour des questions de cohérence et de meilleure lisibilité, dans les figures et le calcul ci-dessous on pose x et y pour l'abscisse et l'ordonnée du point courant M dans le repère d'origine A, puis $AF = f$ (là où Descartes posait $AF = c$), $AH = h$ (au lieu de $GA = b$), $AV = v$ ($PA = v$), $MF = \rho$ et $MH = R$, tous ces nombres étant positifs par définition [87].

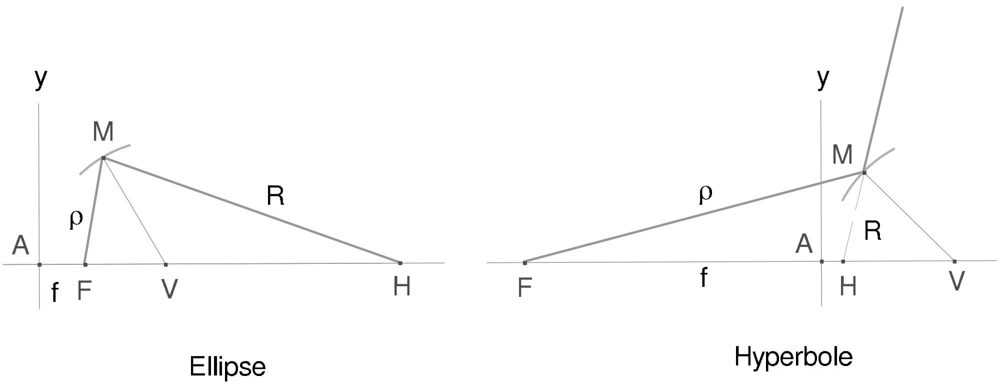


FIGURE 8.19 – *Pieds de normales à une conique à centre et réflexion*

87. Il aurait évidemment été plus court d'utiliser librement les nombres réels modernes, pouvant être négatifs, mais il fallait tester le fait de pouvoir se passer d'eux, à la mode de Descartes lui-même dans la plupart des calculs qu'il nous a laissés.

Nous nous plaçons ici dans l'hypothèse de rayons lumineux émis du foyer F. Dans le cas elliptique, ils frappent l'intérieur de la frontière elliptique supposée former un miroir courbe, et vont se réfléchir en le second foyer H ; dans le cas hyperbolique, ils frappent l'extérieur de cette frontière, supposée former aussi un miroir courbe, et se réfléchissent sur lui en semblant provenir du second foyer. Les calculs ci-dessous valent pour les deux situations. Nous utiliserons ici un paramètre z, bien entendu lui-même aussi positif, en suivant une démarche très analogue à celle de Descartes à la page 344 (AT VI page 416). Nous poserons $z = MF - AF$, ce qui donne $\rho = f + z$, ainsi que $R = h \mp z$, le signe $-$ étant pour l'ellipse, pour laquelle $\rho + R = 2a$, et l'autre pour l'hyperbole[88], pour laquelle $\rho - R = 2a$. Dans les deux cas, on a donc $f \pm h = \rho \pm R = 2a$. Nous avons ainsi traduit que la courbe mise en œuvre est une conique à centre.

Les égalités

$$f^2 - h^2 + 2x\,(h \mp f) = (x \mp f)^2 - (x-h)^2 = \rho^2 - R^2 = (f+z)^2 - (h \mp z)^2$$

impliquent la relation[89] $x = \dfrac{f \pm h}{h \mp f}\,z$. Reportant cette valeur dans l'égalité

$$(y^2 =)\ \rho^2 - (x \mp f)^2 = s^2 - (x-v)^2,$$

il vient l'équation du second degré en z

$$(h \mp f)\,z^2 - 2\big((f \pm h)\,v - 2fh\big)\,z + v^2 - s^2 = 0$$

qui doit avoir une racine au moins double d'après la méthode cartésienne de définir la normale à une courbe. Or une telle racine d'une équation de la forme $az^2 - 2bz + c = 0$ ne peut être que $\dfrac{b}{a}\cdot$ Par suite[90]

$$z = \frac{(f \pm h)\,v - 2fh}{h \mp f} = \frac{2a\,v - 2fh}{h \mp f}, \qquad 2a\,v = (h \mp f)\,z + 2fh = fR + h\rho$$

ce qu'il fallait démontrer[91].

88. Ou, pour être plus précis, une branche d'hyperbole.

89. La définition bien connue des coniques par foyer et directrice montre facilement qu'il est normal que z soit proportionnel à x car $\rho - \mathbf{e}\,x$ est constant sur la courbe. Un calcul immédiat montre d'ailleurs que $f \pm h$ est la distance des deux sommets de l'axe focal et $h \mp f$ celle des deux foyers, d'où effectivement $z = \mathbf{e}\,x$.

90. Si l'on ne voit pas ce raccourci, la technique cartésienne des coefficients indéterminés fonctionne aussi très bien.

91. Il est tout à fait possible que le calculateur rompu à toutes les transformations algébriques qu'était Descartes ait remarqué un jour que toute forme affine $ax + by + c$ en

Rappel sur l'anaclastique

Rappelons que, pour Descartes, le problème théorique essentiel de l'optique est celui du stigmatisme absolu : partant d'un faisceau lumineux issu d'un point (peut-être à l'infini, comme dans le cas des mesures astronomiques), est-il possible de le contraindre à se transformer en un autre faisceau allant converger vers un autre point (lui aussi éventuellement à l'infini) ? Ou qui paraisse issu d'un tel autre point virtuel, comme dans l'utilisation d'une loupe ou d'un microscope comme celui de Hans et Zacharias Janssen en 1595 ?

Dans le cas où ces deux points sont à distance finie, la solution de ce problème passe par l'invention très technique des Ovales cartésiennes, dont la première apparition dans un livre date de 1637 ; juste évoquées dans *La Dioptrique*, mais qui forment toute la fin du Livre Second de *La Géométrie*. Cet *Essai* marque en fait la fin d'une longue période commencée avant la rédaction des *Regulæ*.

Mais lorsque l'un de ces deux points est à l'infini, on parle alors d'*anaclastique*, et le problème est bien plus simple. Dans son brouillon [92] datant très probablement de 1629, Descartes laisse clairement et orgueilleusement entendre qu'il l'a résolu : « *un homme, qui n'a pas étudié la Mathématique seulement* [...] *cherchera, selon quelle raison, le rayon pénètre à travers tout le diaphane ; et ainsi il poursuivra selon l'ordre toutes les choses restantes, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à l'anaclastique elle-même* ». Il ajoute : « *Encore que beaucoup l'aient en vain jusqu'à ce jour cherchée, je ne vois rien pourtant rien qui puisse empêcher celui, qui userait parfaitement de notre méthode, de la connaître avec évidence* » (trad. de Jean-Luc Marion, Martinus Nijhoff, La Haye 1977, pp. 27-28).

Dans un chapitre consacré aux *Regulæ*, il faut développer très largement la solution cartésienne (et partiellement beeckmanienne) du problème de l'anaclastique. Donnons ici l'essentiel des formules mises alors au point, afin de

deux variables x et y liées par une relation du premier degré comme $y = px + q$ pouvait s'exprimer comme une combinaison linéaire de x et de y, à savoir $\left(a - \dfrac{p}{q}\, c\right) x + \left(b + \dfrac{c}{q}\right) y$, en tout cas dès que $q \neq 0$. Ainsi aurait-il connu que $v = \lambda z + \mu = \lambda\,(\rho - f) + \mu$ pouvait s'écrire comme une élégante combinaison linéaire de R et de ρ puisque ces deux distances sont liées par l'égalité $R = \pm\rho + (h \pm f)$.

92. La recherche des courbes anaclastiques sous-tend toute une partie de la Règle VIII [AT X, p. 393].

mieux comprendre comment Descartes a pu s'inspirer de ces cas particuliers - qu'il ne rejette d'ailleurs nullement, comme le montrent les phrases de sa *Géométrie* comme ≪ *les rayons qui viennent du point* G, *ou bien qui sont paralléles* à GA ≫[93] - pour tenter de résoudre le problème plus général de stigmatisme absolu entre deux points à distance finie ; le lecteur est donc prié de ce reporter, en cas de besoin, à une telle étude détaillée.

Six textes sur l'anaclastique

Nous disposons de six textes techniques concernant l'anaclastique : un seul est de Beeckman (le second, sur l'hyperbole), les cinq autres de Descartes. Le premier de tous concerne l'ellipse, et date - comme le premier cité - du tournant 1628/1629. Le troisième et le quatrième[94] forment l'essentiel du *Discours Huitième* de *La Dioptrique* de 1637 (pages 92 et 103 des *Essais* du *Discours*, et AT VI, pages 163 et 178). Les deux derniers, qui ne sont que légères modifications des précédents, nous sont connus par une lettre à Mersenne de Noël 1639. Tous ces textes sont à étudier avec soin, ce qui constitue le but des pages ci-dessous. Dans l'œuvre cartésienne, il est remarquable qu'ils ne constituent que des preuves purement géométriques, sans intrusion de raisonnements issus de l'optique, où le rôle du calcul reste modéré[95] et où la géométrie analytique n'a pas sa part, à la différence du calcul sur les Ovales figurant dans *La Géométrie*.

Rappelons les consignes que Descartes se donne à lui-même pour résoudre de tels problèmes, comme il les expose lui-même avec grande précision dans une lettre à Elisabeth de novembre 1643 (CCCXXV, AT IV p. 38)

≪ *J'observe toujours, en cherchant une question de géométrie, que les lignes, dont je me sers pour la trouver, soient parallèles, ou s'entrecoupent à angles droits, le plus qu'il est possible ; et je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que les côtés des triangles semblables ont semblable proportion entr'eux, et que, dans les triangles rectangles, le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés*[96]. *Et je ne crains point de supposer plusieurs quantités inconnues, pour réduire la question à tels termes, qu'elle ne dépende*

93. Page 363, AT VI page 434 ; voir aussi page 365, AT VI page 437.
94. Très voisin du précédent.
95. Et ne dépasse pas, par exemple, les usages euclidien ou apollonien.
96. Pour simplifier à l'extrême, puisque les triangles semblables utilisés par Descartes sont très souvent homothétiques, on peut donc dire que ses outils essentiels sont **les**

que de ces deux théorèmes ; au contraire, j'aime mieux en supposer plus que moins. Car, par ce moyen, je vois plus clairement tout ce que je fais, et en les démêlant je trouve mieux les plus courts chemins, et m'exempte de multiplications superflues ; au lieu que, si l'on tire d'autres lignes, et qu'on se serve d'autres théorèmes, bien qu'il puisse arriver, par hasard, que le chemin qu'on trouvera soit plus court que le mien, toutefois il arrive quasi toujours le contraire. Et on ne voit point si bien ce qu'on fait, si ce n'est qu'on ait la démonstration du théorème dont on se sert fort présente en l'esprit ; et en ce cas on trouve, quasi toujours, qu'il dépend de la considération de quelques triangles, qui sont ou rectangles, ou semblables entr'eux, et ainsi on retombe dans le chemin que je tiens. »

Le double théorème qui y est démontré est le suivant : **si l'on admet la loi de Descartes sur la réfraction, tout faisceau de rayons parallèles à son axe tombant sur la partie droite d'une ellipse (resp. hyperbole) d'excentricité convenable se réfracte en passant par le foyer le plus éloigné de la zone de contact de la lumière**[97].

En d'autres termes, débarrassés de tout contexte physique : **les normales à une conique à centre font avec, d'une part, la direction de l'axe focal, et d'autre part avec chacun des rayons vecteurs**[98]**, des angles dont les sinus sont dans un rapport constant**.

L'héritage keplerien

Les livres d'optique remontent à l'Antiquité : ainsi Euclide, par exemple. Sans donner d'indications précises et complètes des approches sur la réfraction

théorèmes de Thalès et de Pythagore, auxquels il faut bien entendu ajouter - notamment pour des recherches inspirées par l'optique - la proportionnalité des sinus d'un triangle à ses côtés, qui découle aussitôt de la considération des trois hauteurs.

97. Dans l'exposé de la Règle VIII, Descartes dit explicitement : « *Cette ligne, qu'on nomme en Dioptrique anaclastique, à savoir celle où les rayons parallèles se rétractent, en sorte qu'après la réfraction ils se recoupent tous en un seul point* » (trad. Jean-Luc Marion, 1977, Martinus Nijhoff p. 27, et AT X, p. 393). Finalement, l'anaclastique est donc un profil de dioptre susceptible de convertir un faisceau lumineux cylindrique en un faisceau conique. Une réponse tout à fait précise est alors la suivante : si l'on veut que le point de concours de la lumière soit dans le milieu le plus réfringent, prendre une demi-ellipse ; sinon, une demi-hyperbole (une branche), et il n'y en a pas d'autres.

98. Les droites joignant le point courant aux foyers, à la fois symétriques par rapport à sa tangente et à sa normale.

depuis cette époque, on ne peut cependant pas oublier de noter au passage le nom d'Ibn Sahl et le septième livre de *Opticæ thesaurus Alhazeni* d'Ibn al-Haytham (= Alhazen). Mais le principal et décisif prédécesseur de Descartes sur le problème de l'anaclastique mériterait une étude approfondie, dont nous donnerons juste quelques aperçus : il s'agit bien entendu du grand Johan Kepler (1571-1630), son aîné mais aussi son contemporain. L'essentiel de son œuvre se trouve dans son grand livre *Ad Vitellionem Paralipomena*[99] *quibus astronomia pars optica traditor*, paru en 1604 à Francfort, dont le contenu a été maîtrisé par Descartes, sans doute vers les années 1626, lors de ses rencontres à Paris avec Mersenne, Mydorge, Cornier *etc.* très engagés dans des travaux expérimentaux.

Nous disposons heureusement d'une lettre très précieuse concernant les rapports de Descartes avec Kepler au sujet de l'anaclastique, la CXIX, à Mersenne, en date du 31 mars 1638 (AT II, p. 85) où il écrit

« *Celui qui m'accuse d'avoir emprunté de Kepler les ellipses et les hyperboles de ma Dioptrique, doit être ignorant ou malicieux ; car pour l'ellipse, je n'ai pas de mémoire que Kepler en parle, ou s'il en parle, c'est assurément pour dire qu'elle n'est pas l'anaclastique qu'il cherche ; et pour l'hyperbole, je me souviens fort bien qu'il prétend démontrer expressément qu'elle ne l'est pas, bien qu'il dise qu'elle n'en est pas beaucoup différente. Or je vous laisse à penser, si je dois avoir emprunté une chose d'un homme qui a tâché de prouver qu'elle était fausse. Cela n'empêche pas que je n'avoue que Kepler a été mon 1er maître en optique, et que je crois qu'il a été celui de tous qui en a le plus su par ci-devant.* »

De manière précise, dans la cinquième partie du chapitre IV[100], plus précisément dans les deux dernières pages, Kepler pose dans un texte - il est vrai assez obscur - l'hypothèse selon laquelle l'anaclastique cherchée est une partie d'hyperbole[101], étudie si cela est compatible avec les tables angu-

99. Littéralement : compléments à Witelo (alias Vitellio), philosophe et savant polonais du treizième siècle. Actuellement, sont disponibles (au moins en bibliothèque) deux traductions de ce travail : la plus ancienne est due à Catherine Chevalley et a été publiée chez *Vrin* en 1980 ; la seconde - en anglais - est de William H. Donahue et a été publiée aux *Green Lion Press* de Santa Fe en 2000.

100. *De la mesure des réfractions*, p. 96-109 de l'édition originale, 225-241 de la trad. Chevalley et 110-123 de celle de Donahue.

101. Il se limite au cas où le faisceau lumineux est émis dans l'air et se réfracte dans un milieu plus dense.

laires de Witelo, et finit par conclure que si l'hyperbole est très proche de la courbe cherchée, il n'y a cependant pas coïncidence absolue entre les deux, ce qui justifie les termes de Descartes[102].

La croyance en l'apparition presque miraculeuse des sections coniques dans cette affaire a été préparée dans la quatrième partie du IV, qui précède donc exactement ce fragment cité, dans laquelle elles ont été largement étudiées. Avant l'invention cartésienne de la multiplication potentielle à l'infini des courbes disponibles pour la recherche, celles que les anciens avaient laissé étaient en très petit nombre : Descartes a eu beaucoup de chance de pouvoir montrer que l'héritage antique lui suffirait pour résoudre son problème. Il devra naturellement aller plus loin (avec les Ovales) pour pouvoir s'attaquer à la question autrement difficile du stigmatisme rigoureux entre deux points.

Quelques calculs géométriques concernant l'anaclastique

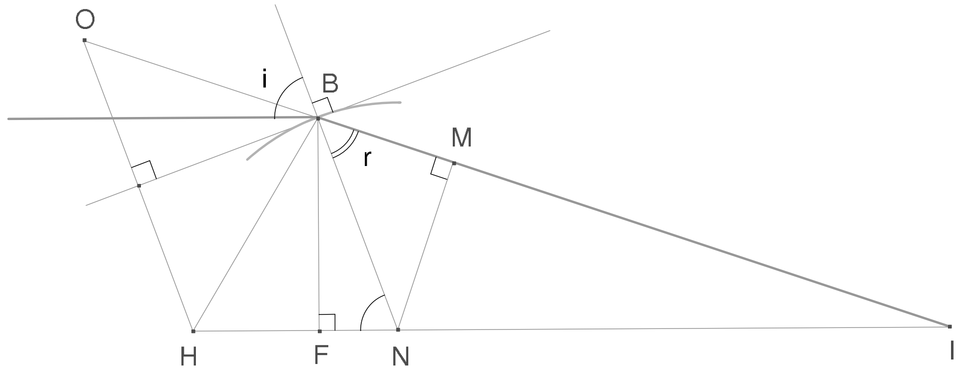


FIGURE 8.20 – *Anaclastique elliptique*

Voici tout d'abord, présentée de façon moderne, la démonstration cartésienne exposée dans *La Dioptrique* d'après celle que nous a conservée Beeckman, valable pour les deux types de coniques, resserrée en la débarrassant de la considération d'un rapport inutile (voir une note en page 428)

$$\frac{\sin\hat{\imath}}{\sin\hat{r}} = \frac{BF}{BN}\frac{NB}{NM} = \frac{BF}{NM} = \frac{BI}{NI} = \frac{OI}{HI} = \frac{BI \pm BO}{2c} = \frac{BI \pm BH}{2c} = \frac{2a}{2c} = \frac{1}{\mathbf{e}}$$

102. Parlant de l'anaclastique comparée à une hyperbole, Kepler écrit « *La Méchanique montre qu'elle ne ressemble à aucune autre davantage, mais qu'aux environs du sommet elle est pourtant un peu plus aiguë* » (trad. Chevalley, p. 241).

(cette suite d'égalités utilise successivement les définitions du sinus dans les triangles rectangles BFN et NMB, la similitude - inverse - liant les triangles $\begin{bmatrix} BIF \\ NIM \end{bmatrix}$, l'homothétie liant les triangles $\begin{bmatrix} BIN \\ OIH \end{bmatrix}$, la symétrie axiale changeant H en O et la définition bifocale de la conique à centre considérée).

Dans l'item *ELLIPSI IN QUA OMNES RADIJ PARALLELI CONCURRENT IN PUNCTO MEDIJ DENSIORIS* numéroté (VI) en page 339 de AT X d'après le recto du folio 338 du *Journal de Beeckman*, datant probablement de la fin 1628 [103], nous trouvons ce qui est certainement la recopie fidèle d'un tout premier texte de Descartes sur sa découverte de l'*anaclastique*, dans lequel - aux notations près - on trouve pour le seul cas de l'ellipse pratiquement les mêmes calculs mais moins argumentés [104], dans lesquels l'inverse de l'excentricité est noté α

$$\frac{\sin \hat{r}}{\sin \hat{\imath}} = \frac{NM}{BF} = \frac{NI}{BI} = \frac{HI}{HB + BI} = \frac{2c}{2a} = \frac{1}{\alpha} \quad (= \mathbf{e}).$$

Notons au passage l'égalité $NI = \mathbf{e}\, BI = \mathbf{e}\, \rho$, qui donne en prime la position du pied N de la normale sur l'axe focal. **Nous possédons donc ici une preuve décisive que, dès la fin de 1628, Descartes avait déjà déterminé le pied de la normale en un point d'une courbe par une égalité numérique**. Il est donc très vraisemblable que ce premier calcul de ce qu'il notera plus tard v est à l'origine de sa technique de détermination des normales et tangentes qui paraît si mystérieuse et si « hors sujet » à de nombreux commentateurs.

Assez bizarrement, une variante [105] de la démonstration initiale telle que pu-

103. En tout cas avant le 1er février 1629, date d'un autre texte analogue sur l'hyperbole, et daté celui-là. Dans le tome IV de son édition de 1953 par De Waard, le texte cartésien est reproduit page 135, avec une datation approximative entre le 15 décembre 1628 et ce 1er février.

104. Avec le vocabulaire de l'époque : ainsi une longueur *cd* y est appelée le *sinus droit* de l'angle d'incidence, noté *dec* sur la figure, sous la condition que *ce* en soit le *sinus total* (verbatim : *Cujus anguli* cd *est sinus rectus, si* ce *sit sinus totus*) ; cela signifie simplement que notre sinus moderne est le rapport de ces deux nombres, ce qui résulte du fait que le triangle *cde* est rectangle en *d*. On retrouve ici un souci constant de l'époque de la révolution cartésienne : une longueur n'est un nombre que si elle est rapportée à une autre longueur, que nous appellerions unité.

105. D'ailleurs préférée à la version originale par de nombreux éditeurs, y compris Adam et Tannery.

bliée dans *La Dioptrique* fut proposée par Descartes dans la lettre à Mersenne du 25 décembre 1639 (lettre CLXXIX, AT II p. 637), censée corriger « *une faute* » de son auteur qui se devait de toujours « *chercher la voie de l'analyse* » la plus simple ; il la destinait à une seconde édition à venir [106] alors qu'elle n'est pas réellement meilleure que l'autre. En la débroussaillant quelque peu, on peut certes oublier les points F et M par rapport à la précédente, mais il faut en revanche introduire un point A sur le rayon entrant [107] puis les projections L et G de A et de I sur la normale : il obtient ainsi deux triangles $\begin{bmatrix} ALB \\ IGN \end{bmatrix}$ homothétiques (par égalité d'angles) et écrit

$$\frac{\sin \hat{\imath}}{\sin \hat{r}} = \frac{AL}{AB}\frac{BI}{IG} = \frac{AL}{IG}\frac{BI}{AB} = \frac{AB}{IN}\frac{BI}{AB} = \frac{BI}{IN} = \cdots$$

(la suite sans changements) [108].

106. On sait qu'il n'y en eut pas d'autre de son vivant. C'est aussi dans cette lettre que l'on trouve la fameuse affirmation concernant l'anaclastique : *cette propriété n'ayant jamais été trouvée par aucun autre que par moi, et étant la plus importante qui se sache touchant ces figures.*

107. Descartes suppose que $BA = BI$, pour se rapprocher de la figure circulaire de *La Dioptrique* (page 21 du *Discours Second*, repris en page 101 de AT VI) où il énonce la loi des sinus, voire celle du fragment *ANGULIS REFRACTIONIS A DES CARTES EXPLORATES* (III) du verso du folio 333 du journal de Beeckman, en page 336 de AT X, mais elle est en fait inutile pour son propos.

108. C'est effectivement une légère amélioration de la suite initiale des calculs de *La Dioptrique* qui équivaut essentiellement - avant nettoyage - aux égalités

$$\frac{\sin \hat{\imath}}{\sin \hat{r}} = \frac{AL}{AB}\frac{BI}{IG} = \frac{BF}{BN}\frac{BN}{NM} = \frac{BF}{NM} = \frac{BI}{NI} = \cdots$$

qui font intervenir les deux couples de triangles semblables $\begin{bmatrix} ALB \\ BFN \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} IGB \\ NMB \end{bmatrix}$, mais dont la première est parfaitement inutile et a donc été considérée plus haut comme telle. Il est dommage que Descartes n'ait pas plutôt aperçu le gain qu'il aurait eu en se débarrassant du triplet (A, L, G) au lieu d'expulser le couple (M, N).

Il est à noter par ailleurs qu'un hasard malencontreux ayant voulu que la figure du *Discours de la méthode* accompagnant l'anaclastique elliptique place le point O à très peu de distance du segment AL, plusieurs éditeurs ou commentateurs, comme par exemple Joseph Frederick Scott (p. 52), ont placé délibérément ce point sur ce segment, ce qui n'a aucune raison d'être.

Le problème de l'anaclastique aujourd'hui

Voici enfin une preuve actuellement acceptable et rapide du théorème de l'anaclastique, écrite avec les notations usuelles en matière de coordonnées polaires où V désigne l'angle du rayon vecteur OF et de la tangente en M. Nous noterons classiquement $\rho = \dfrac{\varepsilon p}{1 - \mathbf{e}\cos\theta}$ l'équation polaire de la conique à centre étudiée, avec $\varepsilon = 1$ pour l'ellipse, et -1 pour l'hyperbole. L'angle de réfraction $\hat{r}$ vaut $V - \dfrac{\pi}{2}$, celui d'incidence $\hat{\imath}$ est égal à $\theta + V - \dfrac{\pi}{2}$, d'où l'on déduit celui de l'axe polaire avec la tangente au point M de la courbe : $\hat{\imath} - \pi = \theta + V + \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Sachant que

$$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\mathbf{e}\cos\theta - 1}{\mathbf{e}\sin\theta},$$

il en résulte que

$$\frac{\sin\hat{\imath}}{\sin\hat{r}} = \frac{\cos(\theta + V)}{\cos V} = \cos\theta - \sin\theta\,\tan V = \frac{1}{\mathbf{e}}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cela dit, pour compléter le travail cartésien, il reste à démontrer que les coniques à centre fournissent **la seule solution au problème de l'anaclastique**, ce qu'il supposait très certainement mais ne pouvait très certainement pas démontrer. Avec les notations ci-dessus, trouver une anaclastique revient à résoudre l'équation [109] $\cos(\theta + V) = \alpha\cos V$, équivalente aux suivantes

$$\alpha - \cos\theta = -(\sin\theta)\,\tan V, \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \alpha},$$

dont la solution générale s'écrit $\rho = \dfrac{C}{\cos\theta - \alpha} = \dfrac{D}{1 - \mathbf{e}\cos\theta}$ avec $\mathbf{e} = \dfrac{1}{\alpha}\cdot$

La solution hyperbolique d'Isaac Beeckman

On sait qu'à la fin de 1628 Descartes n'avait pas encore vérifié que sa technique valait aussi pour l'hyperbole, et avait confié ce problème [110] à son ami

109. Différentielle, même si cela n'est pas apparent sous cette forme.
110. Peut-être lors de leur rencontre du 8 octobre.

le Recteur du Collège de Dordrecht [111] : celui-ci trouva une solution, correcte mais nettement plus lourde que celle qu'il aurait pu mettre en œuvre en changeant seulement un signe dans la solution elliptique qui lui avait été communiquée. On peut la lire à la page 341 de AT X, sous le titre *HYPERBOLA PER QUAM OMNES RADIJ PARALLELI IN UNUM PUNCTUM EXACTE INCIDENT DEMONSTRATA*, d'après le verso du folio 338 de son *Journal*.

Pour décrire cette preuve en quelques mots, qui au passage démontre la stature de mathématicien de Descartes par rapport à celle des techniciens de son temps, il suffit de dire que Beeckman atteint, lui aussi, les égalités $\dfrac{\sin\hat{\imath}}{\sin\hat{r}} = \dfrac{BI}{NI} = \dfrac{OI}{HI}$ de manière plus laborieuse que pour le cas elliptique mais quand même assez proche, et se montre beaucoup plus besogneux dans la preuve de l'invariance de OI : on peut lire là toute la différence entre un cours magistral et une copie d'élève.

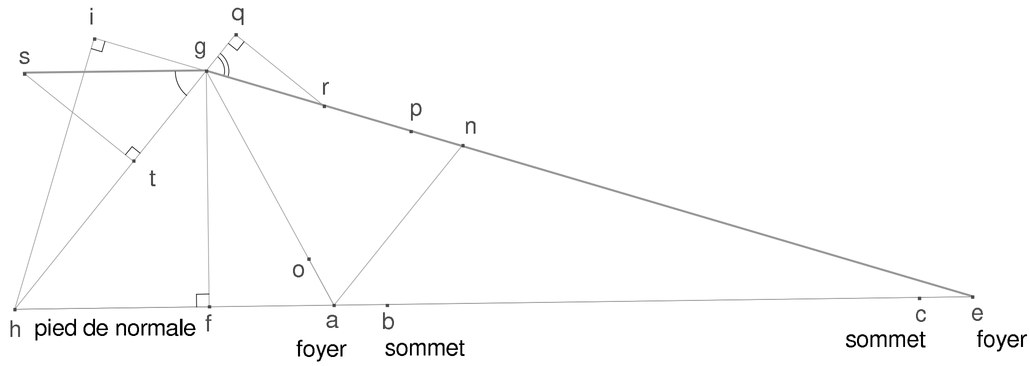


FIGURE 8.21 – *L'anaclastique hyperbolique vue par Beeckman*

De manière plus précise, suivant cette fois-ci les notations de la figure du *Journal* sur laquelle $gn = ga$, $ao = np = ab = ec$ où b et c sont les sommets de l'hyperbole, il écrit

$$\frac{\sin\hat{\imath}}{\sin\hat{r}} = \frac{st}{sg}\,\frac{rg}{rq} = \frac{st}{rq}\,\frac{rg}{sg} = \frac{st}{gf}\,\frac{gf}{hi}\,\frac{hi}{rq}\,\frac{rg}{sg} = \frac{sg}{gh}\,\frac{ge}{he}\,\frac{hg}{rg}\,\frac{rg}{sg} = \frac{ge}{he} = \frac{ne}{ae}$$

111. Aujourd'hui lycée Johan de Witt, le plus ancien des Pays-Bas car datant de 1253.

en utilisant les couples de triangles semblables $\begin{bmatrix} stg \\ gfh \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} gfe \\ hie \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} hig \\ rqg \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} geh \\ nea \end{bmatrix}$. En quelques lignes, il déroule ensuite les égalités

$$bc = ge - ga = gp - go + pe - oa = pe - oa = pe - ce,$$

d'où $pe = bc + ce = be$, le fait [112] que les cercles de centres a et e de rayons respectifs ao et ep sont tangents extérieurement en b, puis l'inutilement longue suite des relations

$$ne = pe - pn = be - ea \Big(= ae - 2\,ba = ae - ab - ec \Big) = be - ec = bc,$$

distance des deux sommets de l'axe, ce qu'il fallait démontrer [113].

Il se termine par des indications sur un exemple numérique, que nous avons d'ailleurs suivi pour la reconstruction de l'illustration de Beeckman figurant ci-dessus [115] : on y a $bc = 10$ (longueur de l'axe focal), $ae = 12$ (double de la distance focale), $ge = 15$ (rayon vecteur ρ), d'où découlent le reste, notamment $ga = 5$, $fa = \dfrac{7}{3}$, $fg = \dfrac{4\sqrt{11}}{3}$, $he = 18$ et $gh = 33$. Bien que ce ne soit pas explicitement indiqué, Beeckman a sûrement vérifié les relations $\sin\hat{\imath} = \dfrac{gf}{gh} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$, $\sin\hat{r} = \dfrac{hi}{hg} = \dfrac{8}{5\sqrt{3}}$ et ainsi retrouvé l'excentricité de l'hyperbole $\mathbf{e} = \dfrac{6}{5}\cdot$

Sur la datation des Regulæ

Terminons cette brève présentation du problème de l'anaclastique par une remarque pouvant aider à placer la datation définitive des *Regulæ* en 1629

112. Exact, mais sans intérêt, et d'ailleurs non utilisé par la suite.
113. Lire ce texte latin est assez difficile : dans la même phrase, l'expression « ab & ec » signifie successivement ab et ec (au sens « np égale ab et ec »), puis $ab + ec$! De plus, si Adam et Tannery ont à juste titre corrigé en $pe = be$ une erreur du manuscrit qui indiquait faussement $pe = ae$, comme Cornelius de Waard [114] ils ont été moins heureux dans la note suivante, car la relation $ne = bc$ est exacte et corriger bc en be est infondé. Ces détails typographiques suffisent à prouver que la solution de Beeckman, outre ses lourdeurs techniques, était pour le moins mal écrite.
115. Ces valeurs ne correspondent d'ailleurs qu'assez approximativement à l'illustration placée dans le *Journal* et reprise dans Adam et Tannery.

plutôt qu'en 1628 [116]. Dans celles-ci, Descartes laisse clairement et orgueilleusement entendre qu'il a résolu ce problème : « *un homme, qui n'a pas étudié la Mathématique seulement* [...] *cherchera, selon quelle raison, le rayon pénètre à travers tout le diaphane ; et ainsi il poursuivra selon l'ordre toutes les choses restantes, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à l'anaclastique elle-même* ». Il ajoutera : « *Encore que beaucoup l'aient en vain jusqu'à ce jour cherchée, je ne vois rien pourtant qui puisse empêcher celui, qui userait parfaitement de notre méthode, de la connaître avec évidence* » (trad. de Jean-Luc Marion, pp. 27-8). Telle est du moins, à notre avis, l'interprétation la plus naturelle que l'on peut faire de ces quelques lignes qui auraient été bien imprudentes dans le cas de manque de toute preuve technique [117]. Au moment du bouclage des *Regulæ*, Descartes connaissait donc sans doute au mieux la première des deux solutions, celle de l'ellipse. Or, s'il l'avait obtenue par exemple au milieu de l'année 1628, il aurait très facilement pu en déduire la seconde solution (hyperbolique) [118] avant sa rencontre d'octobre avec son ami : au lieu de cela, il en a demandé l'examen par Beeckman, qui y est parvenu en janvier 1629 [119]. Dès lors, à moins de ne pas lire la Règle VIII comme un communiqué de victoire, s'impose l'impossibilité d'une rédaction des *Regulæ* qui ne déborderait pas sur quelques mois de 1629.

116. Les commentateurs sont loin d'être d'accord entre eux, surtout à propos d'un texte qui est sans doute une sorte de compilation de différentes partie écrites au fil du temps depuis 1620.

117. Certes, il existe bien au moins un cas où Descartes s'est vanté d'avoir obtenu un résultat dont nous savons aujourd'hui qu'il était hors de sa portée (voir la fin de notre étude sur la *Propositio demonstrata*), mais il ne s'agissait alors que d'un simple élargissement d'un calcul précis et bien mené à son terme.

118. D'ailleurs, dans sa *Dioptrique*, les deux versants de l'anaclastique sont quasiment identiques, nous dirions aujourd'hui obtenus par copier/ coller.

119. Dans l'annexe IV que Pierre Costabel a donné à la traduction des *Regulæ*, il indique (p. 315) que le 8 octobre 1628, Descartes n'avait pas de preuve pour le cas hyperbolique ; p. 317, il ajoute : « *En écrivant à la fin de la seconde partie de son exposé de la Règle VIII qu'il ne voit ce qui peut empêcher d'aboutir, Descartes révèle qu'il écrit à un moment où il n'a pas encore mesuré la nature mathématique de la difficulté* ». Et plus loin : « *Cela situe encore une fois, nous semble-t-il, à la fin de l'hiver 1628-1629 ou peu après* ». On peut ne pas souscrire totalement à un tel pessimisme sans doute excessif, mais la tonalité générale - Descartes est encore en recherche à cette époque - est peu discutable.

Pieds de normales et stigmatisme à l'infini

Dans les figures et le calcul ci-dessous on pose x et y pour l'abscisse et l'ordonnée du point courant M dans le repère d'origine A, puis $AF = f$, $AH = h$, $AV = v$ et $MF = \rho$, tous ces nombres étant positifs par définition.

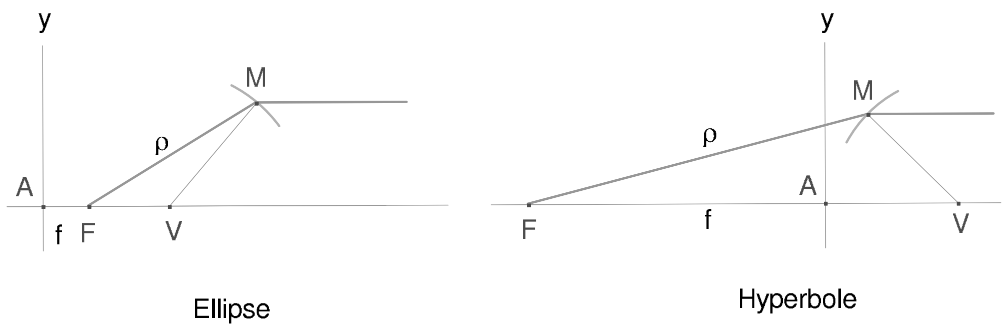


FIGURE 8.22 – *Pieds de normales à une conique à centre et réfraction*

Par rapport aux figures précédentes, oublions le second foyer H et la longueur $MH = R$, ici sans intérêt. D'autre part le paramètre auxiliaire z est inutile dans ce calcul, car x convient parfaitement.

Nous nous plaçons ici dans l'hypothèse de rayons lumineux émis du foyer F. Dans le cas elliptique, ils frappent l'intérieur de la demi-ellipse située autour de l'autre foyer ; dans le cas hyperbolique, ils frappent la branche la plus éloignée de F ; dans les deux cas, les rayons se réfractent et deviennent parallèles à l'axe focal de la demi-conique concernée. Les calculs ci-dessous valent pour les deux situations.

La clef est ici la définition d'une conique par *foyer et directrice*[120] : on dispose d'une égalité[121] de la forme $MF = \mathbf{e}\, d(M, \Delta)$, ce qui implique la constance

120. Nous savons grâce à Pappus qu'elle était très probablement connue d'Euclide, peut-être même exposée dans ses *Lieux à la surface* et dans les *Lieux solides* d'Aristée : voir par exemple la page 119 du second volume de *A History of Greek Mathematics* par Sir Thomas Heath.

121. Où $\mathbf{e}$ est l'excentricité de la conique, strictement inférieure à 1 pour l'ellipse et strictement supérieure à 1 pour l'hyperbole.

de l'expression $\rho - \mathbf{e}\,x$, et finalement l'égalité $\rho = f + \mathbf{e}\,x$. Nous avons ainsi traduit que la courbe mise en œuvre est une conique à centre [122].

Les égalités

$$(y^2 =) \quad s^2 - (x-v)^2 = \rho^2 - (x \mp f)^2 = (f + \mathbf{e}\,x)^2 - (x \mp f)^2$$

donnent l'équation du second degré en x

$$\mathbf{e}^2 x^2 - 2x\,(v - \mathbf{e}\,f \mp f) + v^2 - s^2 = 0$$

qui doit avoir une racine au moins double.

Or une telle racine d'une équation $ax^2 - 2bx + c = 0$ ne peut être que $\dfrac{b}{a}\cdot$ Par suite

$$x = \frac{v - \mathbf{e}\,f \mp f}{\mathbf{e}^2}, \qquad v = \mathbf{e}^2 x + f\,(\mathbf{e} \pm 1) = \mathbf{e}\,\rho \pm f = (\mathbf{e} \pm 1)\,\rho \mp \mathbf{e}\,x$$

ce qu'il fallait démontrer [123].

Construction d'Ovales par logiciel de géométrie

Nous supposerons que nous disposons un logiciel de construction géométrique dynamique (tel que *Cabri-Géomètre* par exemple).

La construction de Descartes est bien entendu la plus naturelle, mais repose sur l'intersection de deux cercles ; aux voisinages de points de l'axe, ces cercles

122. Dont, comme dit plus haut, on n'utilise qu'une demi-part.

123. L'égalité cartésienne de la page 347 (AT VI page 419) donnant v pour le cas d'une conique d'équation apollonienne $x^2 = ry - \dfrac{r}{q}\,yy$, à savoir $v = y - \dfrac{r}{q}\,y + \dfrac{1}{2}\,r$, aurait également permis à Descartes de justifier directement les deux calculs précédents, ce qui rend plus plausible que jamais qu'il ait considéré ces quatre cas voisins de son problème de stigmatisme. Avec les notations usuelles d'aujourd'hui, échangeant notamment les deux coordonnées, pour la conique générale d'équation $y^2 = 2p\,x + (\mathbf{e}^2 - 1)\,x^2$, avec $p = \dfrac{b^2}{a}$ la formule ci-dessus devient plus simple encore puisqu'alors $v = p + \mathbf{e}^2 x$: nos relations respectives $2a\,v = fR + h\rho$ et $v = (\mathbf{e} \pm 1)\,\rho \mp \mathbf{e}\,x$ peuvent également être retrouvées très simplement à partir de cette égalité.

sont tangents et la précision est très médiocre : le logiciel s'interrompt et laisse en blanc les parties de l'Ovale proches de l'axe.

Il existe au contraire une technique meilleure en ce sens qu'elle consiste à couper un cercle par une une droite (plus précisément par un segment ou une demi-droite selon ce que l'on désire : toute la courbe ou seulement une branche). Partant de F et G tels que $FG = c$, il convient de construire une longueur $\ell = kc$, puis le cercle Γ de centre F et de rayon ℓ.

Prenant un point N au hasard sur Γ, on trace alors le segment FN (si l'on se limite à l'arc défini par $\rho - hr = kc$) ou la demi-droite se sommet F passant par N (si l'on désire toute l'Ovale définie par $\rho - \varepsilon hr = kc$), ou enfin la demi-droite d'origine N incluse dans la précédente (si l'on veut l'autre branche) : cela définit un objet rectiligne ω.

Il reste alors à construire le cercle γ défini par les points M tels que $\dfrac{MN}{MG} = h$. Il suffit par exemple de porter à partir de G une longueur égale à 1 sur la perpendiculaire issue de G à NG, ce qui donne un point U, et de porter à partir de N deux longueurs égales à h sur la perpendiculaire issue de N à NG, ce qui donne deux points V et W. Les points d'intersection de la droite NG et des segments UV et VW forment un diamètre de γ, que l'on trace [124].

Si l'on note M un point commun à ω et à γ, il ne reste plus qu'à lancer la commande *Lieu*, et à cliquer dans l'ordre sur M puis sur N : l'affichage de la courbe est dès lors quasi-immédiat.

Cette technique est finalement très simple à mettre en œuvre. L'étude de tels types de logiciels de géométrie dynamique est, théoriquement, très poussée dans les établissement secondaires d'éducation modernes : il faudrait davantage développer leur utilisation pour traiter de questions vraiment non triviales, comme celle-ci ; leur prestige de « nouveaux outils culturels » pourrait s'en trouver amélioré.

124. Bien entendu, pour deux points N et N' convenables, la similitude de centre G qui transforme N en N' transforme γ en γ', ce qui engendre une variante possible pour la construction, un peu comme Descartes déduisant le point générique 1 de la première Ovale de l'une de ses positions particulières déterminée lors de la phase initiale de l'algorithme qu'il décrit.

En voici un exemple de mise en œuvre, cette fois-ci pour $h = 1/2$

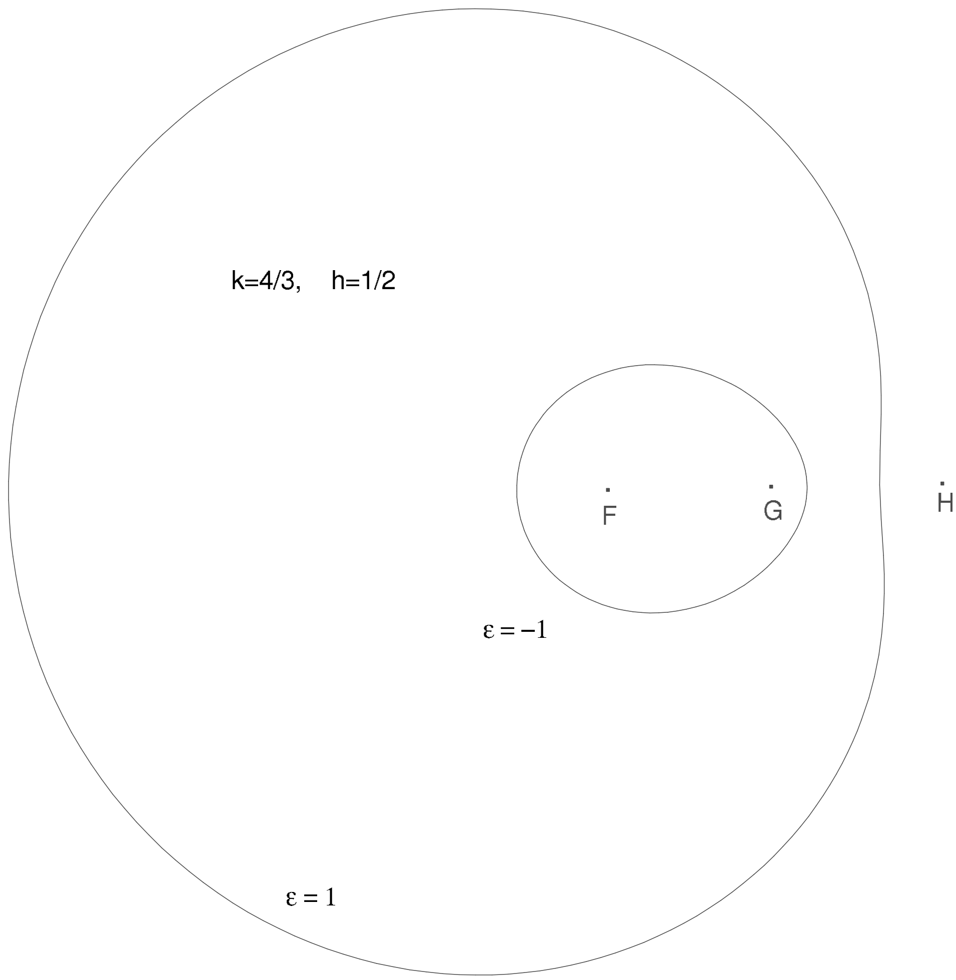


FIGURE 8.23 – *Une autre Ovale cordiforme*

En guise de conclusion

À côté de Newton et Quételet, on pourrait citer plusieurs mathématiciens importants qui se sont penchés, à la suite de Descartes, sur ces courbes étonnantes. Parmi eux nous n'indiquerons que van Schooten [125] et Rabuel [126], mais surtout Roberval, dans les pages 146-164 de la première publication de 1693 sous le titre *De Geometricâ planarum & cubicorum æquationium resolutione, duodecimo exemplo*, ou aux pages 157-194 des *Divers ouvrages...* du Tome VI des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, édités en 1693, et naturellement Michel Chasles dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* de 1837 déjà cité, note XXI, page 350. La liste pourrait être allongée.

Mais il faut terminer cette recension abrégée de quelques unes des propriétés mathématiques des Ovales de Descartes, adaptées à notre temps : citons donc cette phrase d'Henri Lebesgue, à la page 114 de son livre posthume de 1942 *Les Coniques*

L'étude des Ovales est donc
à recommander aux aspirants professeurs

qui ne pourrait malheureusement plus être considérée aujourd'hui que comme un vœu bien pieux !

125. Voir notamment la page 270 de ses *Commentaires* accompagnant sa traduction latine de 1649.
126. Voir notamment les pages 302, 313, 341, 374 et 393 de ses *Commentaires* de 1730.

Chapitre 9

Des équations algébriques

Soulignons la ressemblance (limitée) des vingt pages [1] ouvrant le Livre Troisième d'avec les chapitres VII et XVII de l'*Ars Magna* [2]. Cela dit, l'originalité de Descartes est très grande, même s'il a été sans doute inspiré par ce texte de 1545, ainsi parfois que par Viète [3], presque son contemporain.

Nous avons déjà signalé que nos deux chapitres précédents auraient pu, au prix d'une perte de lisibilité de la structure de *La Géométrie*, être rejetés en fin du Livre Troisième. Par contre, celui-ci n'aurait pas pu l'être : il va nous montrer comment utiliser des techniques élémentaires pour translater des racines d'une équation donnée d'une quantité donnée [4], ou les multiplier par un certain facteur, opérations dont la connaissance est absolument nécessaire pour les mises en forme préparatoires au traitement graphique de leur résolution. Donc la place, *a priori* bizarre, de cette étude se justifie-t-elle parfaitement.

Par exemple, un premier coup d'œil sur les pages 372 à 387 des *Essais* (444 à 461 de AT VI) est vraiment déconcertant : on y lit une dizaine d'équations, les unes avec x comme inconnue qui devient z ou y dans d'autres, le tout dans une joyeuse accumulation apparemment sans fils directeurs. Notre travail a

1. Que l'on pourrait intituler également *Mini-traité sur les manipulations* - ou préparations - *d'équations*.
2. *Sur la transformation d'équations*, page 56, puis 121 et *sq.* (où Cardan annule des deuxièmes coefficients d'équations cubiques), dans la traduction Witmer de chez Dover.
3. Par exemple en page 239 de la traduction de chez Dover, également due à Witmer.
4. Et donc, par exemple, s'arranger pour qu'elles deviennent toutes positives.

donc été d'essayer d'en dégager quelques-uns, et aussi de comprendre les très curieuses trois premières pages du Livre Troisième, qui semblent *a priori* un peu décalées par rapport aux suivantes, mais paraissent plus rationnelles si l'on accepte une hypothèse placée en fin de ce chapitre.

Agir sur des racines sans les connaître

Essayons de regrouper les exemples de Descartes.

Augmenter ou diminuer le nombre de racines

En utilisant les rapports entre racines et factorisations d'un polynôme, ajouter ou enlever des racines

- $(x-2)\,(x-3) = x^2 - 5\,x + 6$ (page 372 des *Essais*, 444 dans AT VI)
- $(x^2 - 5\,x + 6)\,(x-4) = x^3 - 9\,x^2 + 26\,x - 24$ (page 372 des *Essais*, 445 dans AT VI), équation reprise plus bas (i)
- $(x^3 - 9\,x^2 + 26\,x - 24)\,(x+5) = x^4 - 4\,x^3 - 19\,x^2 + 106\,x - 120$ (page 372-373 des *Essais*, 445 dans AT VI), équation reprise plus bas (ii).

Translater les racines d'une même quantité

En posant $x = y - h$, les racines x_i deviennent $y_i = x_i + h$ (remplacer « diminuant » par « augmentant » à la ligne 13 de la page 448 de AT VI)

- (iii) $h = 3$, $x^4 + 4\,x^3 - 19\,x^2 - 106\,x - 120$ devenant $y^4 - 8\,y^3 - y^2 + 8\,y$ (page 374 des *Essais*, 447 dans AT VI)
- (iv) $h = -3$, la même équation devenant $y^4 + 16\,y^3 + 71\,y^2 - 4\,y - 420$ (page 376 des *Essais*, 448 dans AT VI), équation reprise plus bas (v)
- $h = 6\,n$, $x^6 + n\,x^5 - 6\,n^2x^4 + 36\,n^3x^3 - 216\,n^4x^2 + 1296\,n^5x - 7776\,n^6$ devenant $y^6 - 35\,n\,y^2 + 504\,n^2y^4 - 3780\,n^3y^3 + 15120\,n^4y^2 - 27216\,n^5y$ (page 378 des *Essais*, 451 dans AT VI), équations sortant du néant, étudiées page 444

- $h = a$, $x^6 - b\,x$ devenant
  $y^6 - 6\,a\,y^5 + 15\,a^2y^4 - 20\,a^3y^3 + 15\,a^4y^2 - (6a^5 + b)\,y + a\,(a^5 + b)$ (page 378 des *Essais*, 452 dans AT VI).

Enlever le second terme d'une équation

En translatant convenablement les racines, on peut annuler le second terme

- (v) $z = y + 4$, $y^4 + 16\,y^3 + 71\,y^2 - 4\,y - 420$ devenant
  $z^4 - 25\,z^2 - 60\,z - 36$ (page 376 des *Essais*, 449 dans AT VI)

- (xii) $z = x - \dfrac{a}{2}$, $x^4 - 2a\,x^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a^3x + a^4$ devenant
  $z^4 + \left(\dfrac{1}{2}\,a^2 - c^2\right)z^2 - a\,(a^2 + c^2)\,z + \dfrac{5}{16}\,a^4 - \dfrac{1}{4}\,a^2c^2$ (page 377 des *Essais*, 450 dans AT VI), équation reprise plus bas (vi et xi).

Multiplier les racines par un même facteur

En posant $x = \dfrac{y}{k}$, *les racines* x_i *deviennent* $y_i = k\,x_i$

- (ii) $k = -1$, $x^4 + 4\,x^3 - 19\,x^2 - 106\,x - 120$ (page 374 des *Essais*, 446 dans AT VI), équation utilisée plus haut (iii et iv)

- (i) $k = \sqrt{3}$, puis $k = 3$, $x^3 - x^2\sqrt{3} + \dfrac{26}{27}\,x - \dfrac{8}{27\sqrt{3}}$ devenant $y^3 - 3\,y^2 + \dfrac{26}{9}\,y - \dfrac{8}{9}$ puis $z^3 - 9\,z^2 + 26\,z - 24 = (z-2)\,(z-3)\,(z-4)$, d'où les racines en z, y puis x (page 379 des *Essais*, 446 dans AT VI)

- $k = \sqrt{\dfrac{b^2}{3a^2}}$, $x^3 - b^2x + c^3$ devenant $y^3 - 3\,a^2y + \dfrac{3a^3c^3}{b^3}\,\sqrt{3}$ (page 380 des *Essais*, 452 dans AT VI).

Résoudre des équations du troisième degré

Dans certains cas, une racine « évidente » permet la résolution

- $x^3 - 6\,x^2 + 13\,x - 10 = (x-2)\,(x^2 - 4\,x + 5)$ (page 380 des *Essais*, 454 dans AT VI), le dernier facteur[5] n'ayant pas de racines réelles, mais deux racines imaginaires $2 \pm \mathbf{i}$

- $y^6 - 8\,y^4 - 124\,y^2 - 64 = (y^2 - 16)\,(y^4 + 8\,y^2 + 4)$ (page 381 des *Essais*, 455 dans AT VI), le dernier facteur n'ayant pas de racines réelles car il ne prend que des valeurs strictement positives ; équation reprise plus bas (vii)

- $y^6 + (a^2 - 2c^2)\,y^4 + (c^4 - a^4)\,y^2 - a^2\,(a^2 + c^2)^2$
$= \big(y^2 - a^2 - c^2\big)\,\big(y^4 + (2a^2 - c^2)\,y^2 + a^2(a^2 + c^2)\big)$ (page 382 des *Essais*, 456 dans AT VI), équation reprise plus bas (viii et xi).

Préparer des équations du quatrième degré

Descartes présente (page 383 des Essais, 457 dans AT VI) comment, à une équation donnée $P(x) = 0$ du quatrième degré, associer une autre $Q(y^2) = 0$, essentiellement du troisième degré, qui en permet la résolution

- (v et vii) $x^4 - 4\,x^2 - 8\,x + 35$, $y^6 - 8\,y^4 - 124\,y^2 - 64$ (page 384 des *Essais*, 458 dans AT VI), équation reprise plus bas (ix)

- $x^4 - 17\,x^2 - 20\,x - 6$, $y^6 - 34\,y^4 + 313\,y^2 - 400$ (page 384 des *Essais*, 458 dans AT VI), équation reprise plus bas (x)

- (vi et viii) $x^4 + \left(\dfrac{1}{2}\,a^2 - c^2\right)x^2 + a\,(a^2 + c^2)\,x + \dfrac{5}{16}\,a^4 - \dfrac{a^2c^2}{4}$,
$y^6 + (a^2 - 2c^2)\,y^4 + (c^4 - a^4)\,y^2 - a^2(a^2 + c^2)^2$ (page 384 des *Essais*, 458 dans AT VI), équation reprise plus bas (xi).

Résoudre des équations du quatrième degré

Descartes explique (page 385 des Essais, 459 dans AT VI) pourquoi résoudre d'abord $Q(y^2) = 0$ permet de résoudre $P(x) = 0$

5. Non explicité par Descartes.

- (x) $x^4 - 17\,x^2 - 20\,x - 6$, $y = 4$, $(x^2 - 4\,x - 3)\,(x^2 + 4\,x + 2)$, d'où les racines $2 \pm \sqrt{7}$ et $-2 \pm \sqrt{2}$ (pages 385-386 des *Essais*, 459-460 dans AT VI) [6]

- (ix) $x^4 - 4x^2 - 8\,x + 35$, $y = 4$, $(x^2 - 4\,x + 5)\,(x^2 + 4\,x + 7)$, d'où 4 racines imaginaires [7] $2 \pm \mathbf{i}$ et $-2 \pm \mathbf{i}\sqrt{3}$ (page 386 des *Essais*, 460 dans AT VI)

- (xi) $z^4 + \left(\frac{1}{2}\,a^2 - c^2\right) z^2 + a\,(a^2 + c^2)\,z + \frac{5}{16}\,a^4 - \frac{1}{4}\,a^2c^2$, $y = \sqrt{a^2 + c^2}$, $\left(z^2 - z\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{3}{4}\,a^2 - \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2 + c^2}\right)\left(z^2 + z\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2 + c^2}\right)$, d'où les racines $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{4}\,c^2 + \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2 + c^2}}$ (pages 386-387 des *Essais*, 461 dans AT VI).

  Puisque cette équation en z provient en fait d'une équation en x (xii) transformée par l'égalité $z = x - \frac{a}{2}$, Descartes explicite (page 387 des *Essais*, 461 dans AT VI) l'une des racines en x (la seule positive, comme on le verra page 474), à savoir

$$x = +\frac{1}{2}\,a + \sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 + \frac{1}{4}\,c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}\,c^2 - \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Préparer la résolution d'un problème de Pappus

La dernière équation ci-dessus est en fait l'un des fils directeurs principaux de toute cette partie ; elle servira à la résolution d'un célèbre problème antique cité ici sous le nom de second problème de Pappus. *Voici, sans autre commentaire, la liste des équations qui lui sont liées, déjà répertoriées ci-dessus*

- $x^4 - 2a\,x^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a^3x + a^4$ (pages 377 et 388 des *Essais*, 450 et 463 dans AT VI)

6. En dehors de ± 4, il y a quatre autres racines en y, à savoir $\pm\sqrt{7} \pm \sqrt{2}$, non exhibées par Descartes. Par ailleurs, dans la version de 1637, le terme $-20\,x$ est doublé par erreur dans la seconde occurrence de l'équation, corrigée dès 1649 (latin) et 1664 (français).

7. Non explicitées par Descartes. À noter le *lapsus* « la racine [...] est derechef 16 ».

- $z^4 + \left(\frac{1}{2}\,a^2 - c^2\right) z^2 - a\,(a^2 + c^2)\,z + \frac{5}{16}\,a^4 - \frac{1}{4}\,a^2c^2$ (pages 377 et 384 des *Essais*, 450 et 458 dans AT VI) [8]
- $y^6 + (a^2 - 2c^2)\,y^4 + (c^4 - a^4)\,y^2 - a^2\,(a^2 + c^2)^2$ (pages 382 et 384 des *Essais*, 456 et 458 dans AT VI)
- $\left(y^2 - a^2 - c^2\right)\left(y^4 + (2a^2 - c^2)\,y^2 + a^2(a^2 + c^2)\right)$ (page 382 des *Essais*, 456 dans AT VI)
- $\left(z^2 - z\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{3}{4}\,a^2 - \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2 + c^2}\right)\left(z^2 + z\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2 + c^2}\right)$ (page 386 des *Essais*, 461 dans AT VI).

Une équation d'origine bien cachée

Page 378 des *Essais* (451 de AT VI), nous avons rencontré une équation assez étrange, sans rapport avec le problème de Pappus, qui arrive sans aucune préparation (juste précédée des mots « *Comme si on a* »)

$$x^6 + n\,x^5 - 6\,n^2\,x^4 + 36\,n^3\,x^3 - 216\,n^4\,x^2 + 1296\,n^5\,x - 7776\,n^6 = 0.$$

Descartes va translater toutes ses racines en posant $x = y - 6\,n$. Il trouve la nouvelle équation

$$y^6 - 35\,n\,y^5 + 504\,n^2\,y^4 - 3780\,n^3\,y^3 + 15120\,n^4\,y^2 - 27216\,n^5\,y = 0.$$

En notant [9] cette égalité sous la forme plus abstraite $y^6 + p\,y^5 + q\,y^4 + \cdots = 0$, il nous dit qu'elle vérifie l'inégalité $4q > p^2$ et indique qu'il n'y a pas de cas où une telle manipulation puisse échouer, puis passe à autre chose.

Voilà bien du Descartes très typique. Ajoutons que cette transformation a eu aussi un autre avantage, dont nous connaissons l'intérêt quant à la positivité de toutes les racines réelles, à savoir que *tous les signes des coefficients sont désormais alternés*, à l'exception du dernier (le terme constant, qui vaut

$$46656\,n^6 - 7776\,n^6 - 7776\,n^6 - 7776\,n^6 - 7776\,n^6 - 7776\,n^6 - 7776\,n^6$$

8. Le signe de 5/16 est fautif dans la page 183 de la traduction de David Eugene Smith et Martha L. Latham d'*Open Court Publishing Co.* [1925] et *Dover* [1954].

9. Cette introduction des abréviations p et q n'est pas dans le texte original, mais simplifie un peu sa lecture.

et est donc nul)[10] : cette particularité sera également recherchée plus tard ; pas plus que l'inégalité $4q > p^2$, elle n'est vérifiée par l'équation en x.

La signification du fait que tous les signes des coefficients soient alternés (sauf le dernier) repose sur sa *règle des signes* (page 460) qui nous apprend que *toutes les racines réelles sont désormais positives ou nulles*[11]. Il indique d'ailleurs, sans preuve, que la translation définie par $y = x + 6\,n$ est la plus modeste possible qui réussisse cet effet, ce qui est exact[12].

Une reconstitution basée sur une racine double

Le sens de l'inégalité $4q > p^2$ est bien plus étrange ; il n'est d'ailleurs pas évident du tout *a priori* que cela soit toujours possible. En fait, ce n'est pas très compliqué à prouver. Notons x_i les racines (complexes comprises). Les relations de Viète entre coefficients et racines[13] montrent que

$$4q - p^2 = 4 \sum_{j<k} x_j x_k - \Big(- \sum_i x_i \Big)^2$$

devient, après translation $y = x + h$,

$$4 \sum_{j<k} (x_j + h)\,(x_k + h) - \Big(- \sum_i (x_i + h) \Big)^2 = 24\,h^2 + 8p\,h + 4q - p^2,$$

quantité positive ou nulle pour h assez grand.

10. Cela signifie que $-6\,n$ est une racine de la première équation, qui n'est donc peut-être pas aussi choisie *au hasard* qu'on n'aurait pu le penser au premier coup d'œil !

11. En effet, le nombre de racines négatives ou nulles est majoré par le nombre de couples de coefficients voisins de même signe : il n'y en pas alors.

12. Toute translation du type $y = x + h$ avec $h < 6\,n$ laisserait au moins une racine fausse ($h - 6n$ bien sûr).

13. Voir les Propositions I à IIII du Chapitre XIIII qui terminent les *Deux traités sur l'examen et la modification des équations* (*De Aequationem Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*) de 1615 - et non de de l'*Introduction à l'Art Analytique* comme il est souvent dit par erreur, même s'il est vrai que son auteur avait sans doute envisagé ses différents traités comme parties d'un seul -, page 310 de la traduction Witmer publiée en 1983 par *The Kent State University Press* et reprise en 2006 par Dover. Viète note d'ailleurs avec satisfaction que cette belle observation marque *la fin et le couronnement* de son travail.

Par ailleurs, nous avons déjà signalé (page 439) sa page 239, au début du second traité, où il annule le deuxième terme d'une équation cubique $A^3 + 3BA^2 + D^pA = Z^s$.

Nous voyons donc que, dans ce court passage, impressionnant par l'explicitation de toutes les étapes de la transformation de x en $y - 6n$, est bien traité par Descartes, qui nous dit quelle technique employer pour aboutir, sur ce cas particulier, à vérifier la relation $4q > p^2$. Mais un problème reste, *a priori* difficile, d'où provient cette équation si complexe ?

Quelques lignes plus bas, l'auteur introduit une équation assez analogue, mais au moins il prend le soin de nous dire son origine : il s'agit en fait de la résolution des équations presque équivalentes $x^5 - b = 0$ et $x^6 - bx = 0$. Un premier réflexe consiste à regarder si la première n'est pas un cas particulier de la seconde, mais il n'en est rien comme on le voit aussitôt.

Le problème reste donc entier. Regardons pourtant quelques indices faciles à repérer. Tout d'abord il y a homogénéité inverse entre x et n, puisque tous les termes sont de la forme $a\,x^k n^{6-k}$. Il est donc utile de poser, par exemple, $x = nu$, pour exploiter cette particularité : le résultat en u sera légèrement plus simple.

Ensuite les différents coefficients numériques à partir de second sont exactement [14] les puissances de 6. Finalement l'idée naturelle est de poser $u = 6t$, d'où $x = 6nt$. Voilà ce que tout cela donne

$$7776\,n^6\,(6\,t^6 + t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1) = 0.$$

Cette fois, l'allure de l'équation est bien plus sympathique (rappelons que $7776 = 6^5$). On pourrait naturellement être tenté d'en rester là. Sous cette forme, il est bien évident que $t = -1$ est une racine de cette équation, et donc que $y = x + 6n = 6n\,(t+1)$ est racine de l'équation de départ.

Toutefois, un œil un peu averti reconnaît dans les derniers termes l'opposée de la somme d'une certaine progression géométrique de raison $(-t)$. Une rapide transformation conduit enfin, pour $t \neq -1$, à la forme définitive

$$6^5 n^6\,\frac{6\,t^7 + 7\,t^6 - 1}{t+1} = 0.$$

À cette vue, il est clair que Descartes est parti d'*une tentative de résolution de l'équation*

$$6\,t^7 + 7\,t^6 = 1$$

14. Au signe près bien sûr.

qu'il a amendée en posant $x = 6nt$ pour compliquer un peu les choses (et laisser du travail de déchiffrage à ses neveux). Mais qu'a-t-elle de si particulier pour lui avoir attiré l'œil ?

Descartes nous a appris que la division par $x + 6n = 6n\,(t + 1)$ tombait « juste », donc que $6\,t^7 + 7\,t^6 - 1$ était divisible par $(t+1)^2$. Donc son équation possède une racine double[15], et le quotient par $(t + 1)^2$ est assez élégant, puisqu'égal à $6^5 n^6(-6\,t^5 + 5\,t^4 - 4\,t^3 + 3\,t^2 - 2\,t + 1)$.

L'équation $6\,t^7 + 7\,t^6 - 1 = 0$

Jusqu'à présent, notre essai de reconstitution de l'origine de cette équation dans les brouillons cartésiens était quasiment imparable. À partir d'ici, il devient plus problématique mais nous tentons quand même de le poursuivre.

Toute la fin du Livre Second a été consacrée au problème des racines doubles, et à leurs applications aux déterminations de normales en un point donné à une courbe donnée. Nous savons que Descartes, en 1638 par exemple[16], connaissait certaines *paraboles généralisées* d'équation $x^\alpha y^\beta = a$. Il n'est pas invraisemblable qu'il les ait fréquentées quelques années plus tôt. En tout cas, chacun peut vérifier que, si l'on pose $F(x, y) = 6\,x^2 y^5 + 1$, la recherche de la normale par la méthode cartésienne au point d'ordonnée $y = -1$ conduit exactement à l'équation

$$R(y, v, s) = 6\,(2v\,y - y^2 - p)\,y^5 + 1 = 1 - 7\,y^6 - 6\,y^7 = (y + 1)^2 Q(y)$$

pour les valeurs $v = -\dfrac{7}{12}$ et $p = 0$ $(s = -v)$. Il est donc tout à fait possible que Descartes, ayant testé sa technique sur différentes paraboles généralisées, ait ainsi disposé d'un stock important d'équations ayant des racines doubles, dont celle-là qu'il se soit amusé à déguiser pour couvrir les traces de ses démarches.

Voici une autre piste possible. Nous avons déjà signalé que le tout premier chapitre de l'*Ars Magna* de Cardan donnait une règle pour déterminer une

15. C'est évident pour un moderne, car -1 est clairement racine à la fois de cette équation et de sa dérivée $42\,(t^6 + t^5) = 0$.

16. Voir par exemple la lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, CXXX p. 248 de AT II.

famille d'équations admettant une racine double : $x^3+2q = 3p\,x$ avec $p^3 = q^2$ (exemple : $p = 4$, $q = 8$). La plus simple est évidemment $x^3+2 = 3\,x$. Si l'on y pose $x = -\dfrac{1}{t}$, on obtient

$$2\,t^3 + 3\,t^2 = 1$$

avec $t = -1$ comme racine double. Un observateur très attentif peut essayer de trouver d'autres équations analogues de degrés plus élevés : $4\,t^5 + 5\,t^4 = 1$ s'impose, et la vérification par la méthode de Descartes fonctionne assez rapidement. Dès lors, avec sa vision un peu optimiste de la récurrence, il a du penser que

$$(2n)\,t^{2n+1} + (2n+1)\,t^{2n} = 1$$

définissait toujours -1 comme racine double, par exemple pour $n = 3$, ce qui redonne le numérateur ci-dessus $6\,t^7 + 7\,t^6 - 1$. Dans tous les cas, il semble vraisemblable qu'il existe un lien bien réel, et bien caché, entre la très lourde équation de départ du sixième degré et la technique de déterminations des normales par le biais du concept de racine double d'une équation.

Pour être tout à fait complet sur cette affaire, il est bon d'aller consulter les deux plus importants commentateurs de *La Géométrie*, à savoir Frans Van Schooten dans ses traductions latines de 1649 et 1659, et le R.P. Claude Rabuel dans ses *Commentaires* posthumes de 1730. Le premier recopie sans indications supplémentaires le texte cartésien (pp. 74 et 294). Le second fait de même pour l'essentiel [17] p. 439, à un point près bizarre : il remplace par mégarde le coefficient 1296 (6^4) par 46656 (6^6), présent en fin de la troisième ligne de la p. 378 des *Essais* (451 de AT VI), et s'offre le luxe de signaler que les éditions de 1637, 1649, 1659 et 1705 sont donc fautives ! Tous deux font référence au géomètre D. Gothofridus van Haestrecht [18] qui a traité de la technique conduisant à $4q > p^2$ et est cité dans une lettre de Descartes à Schooten supposée datée de septembre 1639 [19]. Aucun des deux ne se pose

17. La première page 439, car une faute de l'imprimeur fait qu'il y en a deux, ainsi que pour la 440.

18. Godefroy de Haestrecht (1592-1659), chanoine d'Utrecht ami de Descartes, l'un des premiers à briser les sept sceaux de *La Géométrie* à laquelle il aurait consacré un petit commentaire à ajouter à l'édition latine de 1649.

19. CLXXI AT II page 577. Rabuel indique par erreur qu'elle est la lettre 86 du troisième tome de Clerselier, alors qu'elle y porte en fait le numéro 82 (p. 471). Elle a fait l'objet d'un article de Sébastien Maronne, qui la renverrait à mars ou avril 1648 (voir la *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13(1), 2007).

de questions sur l'origine de cette équation, et ne peuvent donc nous être d'aucune utilité pour essayer d'en découvrir les obscurités.

Le compas cartésien

Lisons maintenant les pages 369-371 des *Essais* (442-444 de AT VI). L'auteur y affirme essentiellement que, lors de la recherche de résolution (graphique, dite « *construction* ») d'un problème, résolution qui pour lui se résume toujours en l'intersection de quelque courbes, il ne faut pas se contenter d'une réponse qui serait tombée par hasard entre les mains du mathématicien, mais qu'il faut toujours s'assurer que cela serait impossible avec des courbes de degré moindre

« *il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple, par laquelle il soit plus simple de le résoudre* ».

Il va le prouver sur un exemple très important depuis l'Antiquité : *déterminer n moyennes proportionnelles entre deux nombres a et b*, c'est-à-dire exhiber des réels $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ tels que

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{x_1} = \cdots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{b}{x_n}$$

c'est-à-dire tels que $x_k = a\,q^k$ pour un certain nombre q (appelé la raison de la suite) déterminé par l'équation $b = a\,q^{n+1}$. Trouver quatre moyennes proportionnelles revient donc à résoudre une équation de degré cinq, et ainsi de suite à l'infini.

La recherche de deux moyennes proportionnelles est un problème antique célèbre, puisqu'admettant, comme cas particulier, la célèbre question de l'autel de Délos, encore appelée *duplication du cube*.

Résoudre une telle équation d'après Descartes est toujours possible en coupant un cercle par une courbe de degré inférieur ou égal à $(n+2)/2$ (voir la fin de son livre). Il va pourtant exhiber un appareil très simple qui fait ce travail [20], mais au prix de l'utilisation de courbes de degré supérieur ou

20. Objet d'une forte nostalgie chez l'auteur : ce compas figure deux fois dans *La Géométrie*, aux pages 318 et 370 des *Essais*, 391 et 443 dans AT VI.

égal à $2n$: il sera donc rejeté, en dépit de son grand intérêt, en vertu de ce *principe de simplicité maximale* qui était pour lui l'un des principaux piliers de sa méthode.

Pour nous en persuader, il a fait graver la représentation de cet objet très étrange, qui représente en un certain sens une des premières machines à calculer analogiques à avoir été conçues et décrites [21]

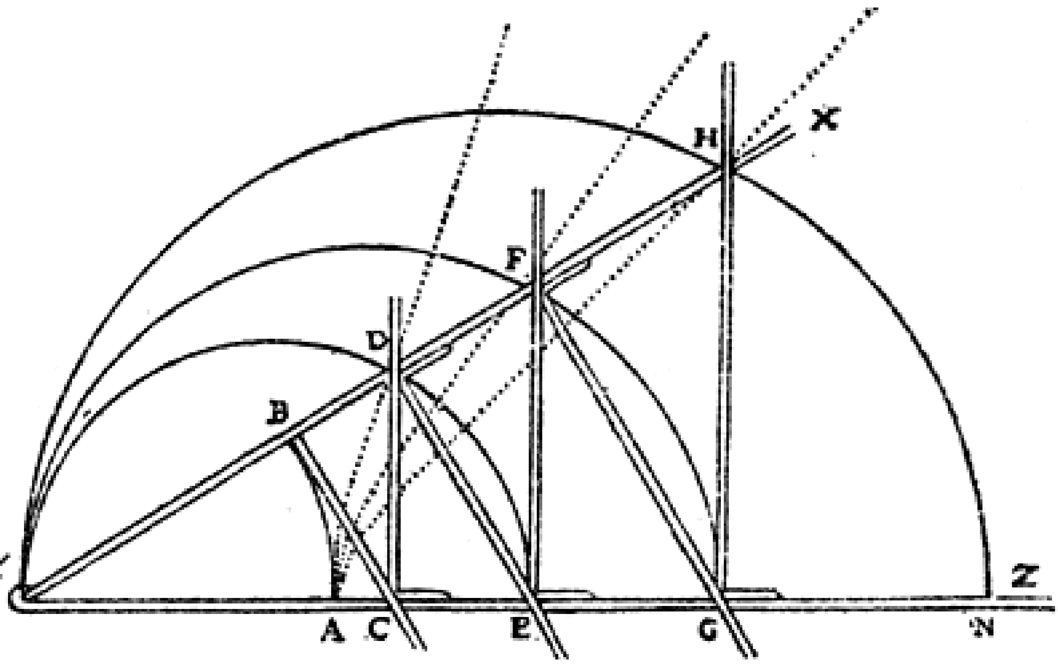


FIGURE 9.1 – *Le compas cartésien dans* La Géométrie

Sur cette figure on voit distinctement un compas formé de deux droites YZ et YX, dont la première est fixe et l'autre libre de tourner autour de Y, deux points A et B fixes sur chacune de ces droites équidistants du pivot Y, la perpendiculaire issue de B à la droite mobile YX, et une famille de cinq équerres avec angles droits en C, D, E, F et G qui, par un processus ingénieux, se poussent les unes les autres si l'on ouvre ou referme l'appareil [22].

21. Et donc très différente de celle de Pascal.
22. Bien entendu le nombre d'équerres est théoriquement illimité. On ignore si Descartes

Les courbes attachées au compas

Lors de ces différents mouvements, les trois points D, F et H décrivent trois courbes en pointillés [23]. Elles ont été assez bien représentées par l'illustrateur de Descartes (Frans Van Schooten, qui n'avait pas nos moyens modernes de tracé !), dont voici des équations, polaire, mixte et algébrique, pour n variant de 1 à 3, dans un repère de sommet A et d'axe AZ

$$\rho = \frac{a}{\cos^{2n}\theta}, \qquad x^{2n} = a\,\rho^{2n-1}, \qquad x^{4n} = a^2(x^2+y^2)^{2n-1}.$$

Elles passent toutes par A, avec une tangente verticale [24]. La première de ces courbes (« *la courbe* AD », dite *kampyle d'Eudoxe* [25] par Tannery) est une quartique (« *du second genre* ») intéressante, d'équation $x^4 = a^2(x^2+y^2)$.

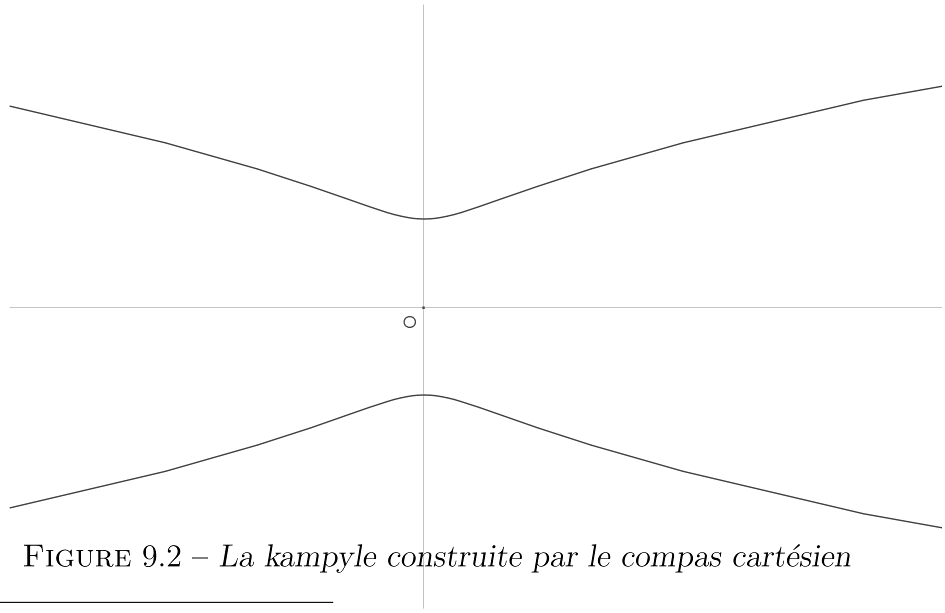


FIGURE 9.2 – *La kampyle construite par le compas cartésien*

a jamais construit un tel mécanisme qui, d'ailleurs, ne pourrait jamais être exactement refermé à cause des petits côtés des équerres...

23. Elles sont limitées à leur partie haute, par raison de symétrie évidente relative à YZ. Dans la figure de la page 90 de son *Descartes la « Géométrie » de 1637* [PUF (Paris) 1996], Vincent Jullien essaie, assez difficilement, de les différencier de demi-droites.

24. En effet le cosinus d'un angle est le rapport de projection d'un côté sur l'autre, et l'abscisse en coordonnées polaires vaut $x = \rho\cos\theta$. Sans doute ces courbes inconnues des Grecs ont-elles été les premières inventées par Descartes, et ce sans géométrie analytique.

25. Tournée ici d'un angle droit sur la figure pour des raisons typographiques.

C'est sa seule apparition « officielle » dans *La Géométrie* mais des commentateurs persuadés que Descartes maîtrisait les *mouvements plan sur plan*[26] pourraient penser, en cherchant à décrire un tel mouvement pour obtenir la normale en une point d'une Conchoïde de Nicomède, à en calculer la *Base* - une parabole ordinaire - et la *Roulante*, qui est justement cette quartique[27].

Introduisons d'abord brièvement les deux manières suivant lesquelles Descartes pouvait résoudre le problème de trouver n moyennes proportionnelles entre deux deux grandeurs données, qui sera étudiée page suivante. Nous avons dit que cela revenait à résoudre une équation de la forme

$$x^{n+1} = h.$$

Par l'intermédiaire de son compas, que n soit pair ou impair, il faut utiliser un compas ordinaire et la p-ième courbe étudiée ici, de degré $4\,p$, avec (tous calculs faits) $p = 4\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ (la technique précise sera étudiée un peu plus bas).

Par sa méthode fondamentale qui sera développée dans le Livre Troisième, qui lui paraissait d'ailleurs le couronnement de ses recherches mathématiques[28], il doit couper un cercle par une courbe de degré $\left\lfloor \dfrac{n+2}{2} \right\rfloor$, soit approximativement un rapport de quatre entre ces deux degrés : un souci de « simplicité » maximale le poussera donc à abandonner la première technique au profit de la seconde.

Bien entendu cela repose sur une interprétation très particulière à Descartes de la « simplicité » d'une solution d'un problème géométrique : minimiser tant que faire se peut les degrés des courbes algébriques à employer. Ce point de vue peut conduire à des situations étranges, et lui sera reproché (par exemple par Newton).

---

26. S'appuyant pour cela sur l'étonnante lettre CXXXVIII de Descartes à Mersenne du 23 août 1638, page 308 de AT II.

27. Base et Roulante sont les lieux du *centre instantané de rotation*, respectivement dans le plan fixe et dans le plan mobile. Nous pensons que cette seconde apparition éventuelle, très cachée et hautement improbable, de cette courbe ne pourrait être qu'une coïncidence amusante mais sans signification.

28. Et peut-être même celui de toute cette science qu'il a pu croire avoir poussée dans ses ultimes retranchements.

Voici une représentation plus épurée du même compas, et de quelques unes des courbes qu'il engendre

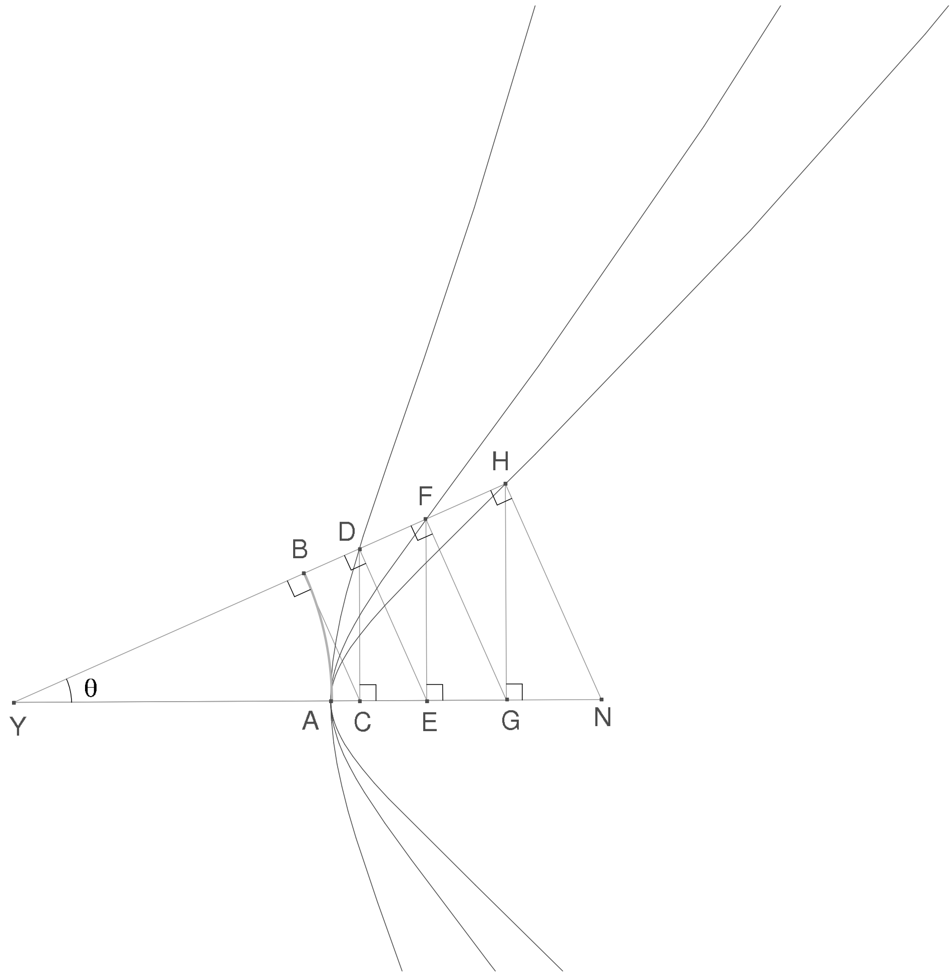


FIGURE 9.3 – *Un schéma mathématique du compas cartésien*

Compas et moyennes proportionnelles

Descartes nous annonce que cet appareil permet de calculer des listes de moyennes proportionnelles, au nombre de deux, quatre, six et ainsi de suite. Voici en effet comment procéder. Nous avons indiqué que c'était un outil efficace, reste à le montrer de manière plus précise (nous laissons le lecteur le soin de vérifier les formules mathématiques données plus haut).

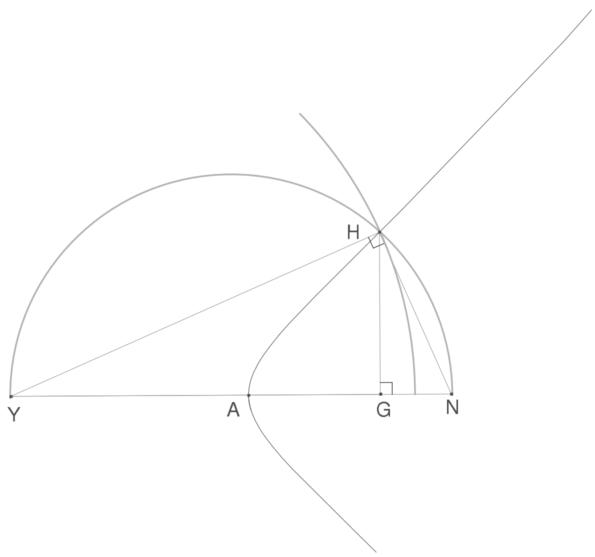


FIGURE 9.4 – *Calculer des moyennes proportionnelles*

Sur la figure ci-dessus, extraite pour l'essentiel de celle de Descartes, $YA = a$ et, si $q = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $YG = aq^5$, $YH = aq^6$ et $YN = aq^7$. Il en résulte par exemple que les six moyennes proportionnelles entre $YA = YB$ et $YN = b$ sont les six longueurs (YC, YD, YE, YF, YG, YH) comme l'annonce d'ailleurs Descartes ; elles sont obtenues en coupant la troisième courbe auxiliaire [29] par le cercle de diamètre YN ce qui donne le point H. De même pour toute recherche d'un nombre pair de moyennes proportionnelles.

Ce que ne dit pas explicitement Descartes, c'est qu'une légère variante donne aussi les moyennes proportionnelles en nombre impair. En effet les cinq moyennes entre $YA = YB$ et $YH = c$ sont les cinq longueurs (YC, YD, YE, YF, YG) obtenues en coupant la même courbe par le cercle de centre Y et de rayon c ce qui donne encore le point H.

29. D'équations $\rho = \dfrac{a}{\cos^6\theta}$ ou $x^{12} = a^2(x^2 + y^2)^5$.

Il en résulte que ce compas cartésien est une excellente machine à calculer les racines n-ièmes réelles des nombres réels ! Aurait-il permis de tracer les racines troisièmes des nombres complexes, que cet instrument aurait offert sur un plateau la résolution graphique de toutes les équations du troisième, puis du quatrième degré : on peut comprendre que Descartes y ait rêvé un instant dans sa jeunesse.

L'une des raisons de la persistance dans l'œuvre définitive de ces premiers paragraphes, assez peu adaptés à la fin de *La Géométrie* qui repose sur de toutes autres bases que ce compas, sera donnée, sous forme de conjecture raisonnable, en fin de ce chapitre.

Racines et factorisation

Extrayons respectivement des pages 372, 373 et 380 des *Essais* (444, 445 et 453 dans AT VI) les quatre phrases suivantes

« *Scachés donc qu'en chaque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y avoir de diverses racines, c'est a dire de valeurs de cete quantité.* »

« *Et on voit evidemment de cecy*[30]*, que la somme d'une equation, qui contient plusieurs racines, peut tousiours être divisée par un binóme composé de la quantité inconnuë, moins la valeur de l'une des vrayes racines, laquelle que ce soit ; ou plus la valeur de l'une des faussés*[31]*.* »

« *Et reciproquement que si la somme d'une equation ne peut être divisée par un binóme composé de la quantité inconnue + ou − quelque autre quantité, cela tesmoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines.* »

« *Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toujours reelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est a dire qu'on peut bien tousiours en imaginer autant que iai dit en chasque Equation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine.* »

30. Remarquer l'insistance sur le sens de la vue, si frappant déjà dans les préceptes solennels du *Discours*.
31. Rappelons qu'une racine *réelle* d'une équation est, à cette époque, dite « vraie » si elle est positive, et « fausse » dans le cas contraire.

Traduisons en langage moderne

- Une équation de degré n ne peut avoir qu'au plus n racines.
- Si a est une racine d'une équation $P(x) = 0$, alors $x - a$ divise $P(x)$.
- Si le binôme $x - a$ ne divise pas $P(x)$, alors a n'est pas racine de l'équation $P(x) = 0$.
- Toute équation de degré n possède n racines, éventuellement répétées, réelles ou imaginaires.

Le statut de ces quatre affirmations - toutes sans preuve naturellement - est très différent selon les cas.

- La première résulte de la suivante, si l'on admet les notions de racines multiples (en particulier doubles) ainsi que le fait qu'être divisible par $(x - a)^\alpha$ et $(x - b)^\beta$ avec $a \neq b$ implique le fait d'être divisible par le produit $(x - a)^\alpha (x - b)^\beta$. Elle est donc moins immédiate qu'il n'y paraît [32]. Toutefois on doit noter que la règle des signes exposée page 460 majore le nombre de racines positives par le nombre v de variations et celui des racines négatives par le nombre p de permanences, dont la somme est justement $v + p = n$ (voir page 460).
- La seconde affirmation est essentielle : sans doute Descartes l'a-t-il démontrée en remarquant que $x - a$ divise $x^n - a^n$.
- Contrairement à ce qu'affirme Descartes, *la troisième n'est nullement une réciproque de la seconde, mais lui est logiquement équivalente* [33] ! Ce genre de confusion entre *réciproque* et *contraposée* n'était pas rare au dix-septième siècle. La véritable réciproque, « si $x - a$ divise $P(x)$, alors a est racine de $P(x) = 0$ », est triviale.
- Si notre interprétation est correcte [34], la dernière est évidemment très es-

32. D'ailleurs elle serait inexacte si l'on travaillait par exemple avec le corps des quaternions d'Hamilton au lieu des nombres réels ou complexes.

33. Puisque $p \Longrightarrow q$ a même valeur de vérité que (non q) $\Longrightarrow$ (non p). Voir par exemple l'article de Bruno Gagneux dans *Mathématiciens français du XVII^e siècle*, p. 131.

34. La quasi-totalité des historiens des mathématiques semble d'accord sur ce point, mais la formulation cartésienne est relativement ambiguë : les mots « autant que j'ai dit » pourraient se rapporter au fait que le nombre de racines est au plus égal au degré, et pas forcément égal au degré. Toutefois, une ligne plus loin, il affirme qu'une certaine équation du troisième degré possède effectivement trois racines, dont deux imaginaires, ce qui infirme au moins partiellement notre doute « de précaution ».

sentielle, mais hors de portée dans ce siècle. Le mot « imaginaire » est de Descartes. Il faudra attendre pour que Gauß publie en 1799 une démonstration acceptable de ce que l'on a longtemps appelé le *théorème fondamental de l'algèbre*, déjà énoncé en 1629 à Amsterdam sous la forme « *Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre* » dans l'*Invention nouvelle en l'Algèbre* d'Albert Girard (1595-1632), où ce dernier parlait de nombres « inexplicables » ou « impossibles ».

En résumé, il semble bien que Descartes ait eu l'intuition que tout polynôme P pouvait s'écrire sous la forme

$$P(x) = k\,(x - a_1)\,(x - a_2)\,\ldots\,(x - a_n)$$

où les a_i sont les différentes racines de P. Viète en avait peut-être conscience, comme le montre par exemple la Proposition III du chapitre XIIII de son livre *Deux traités sur l'examen et la modification des équations* [35]

$$A\,(BDG + BDH + BGH + DGH) - A^2(BD + BG + BH + DG + DH + GH)$$
$$+A^3(B + D + G + H) - A^4 = BDGH$$

où « *A est explicable par l'un des quatre B, D, G ou H* », qui n'a pas pu être écrite sans recourir à une expression telle que $(A-B)\,(A-D)\,(A-G)\,(A-H)$. Mais il est resté très discret sur ce point.

Cela dit, même la forme maintenant usuelle d'un simple produit tel que $(a - b)\,(c - d)$ est absente du texte cartésien, qui préfère chaque fois utiliser une description verbale telle que « *en multipliant ces deux équations $x-2 = 0$ et $x - 3 = 0$, l'une par l'autre, on aura $xx - 5\,x + 6 = 0$* » en page 372 des *Essais* (444 dans AT VI). De même, dans la recherche du pied d'une normale, avait-il utilisé le développement $yy-2e\,y+ee$ plutôt que $(y-e)^2$ (page 347 des *Essais*, 419 de AT VI). Cela n'est naturellement pas étranger à l'impression de difficulté de lecture de *La Géométrie* [36].

Ne serait-ce que pour ces quelques énoncés, le mini-traité étudié dans ce chapitre méritait donc d'être lu avec très grand soin.

35. Page 310 de la traduction Witmer : voir la page 445.

36. Dans certaines égalités toutefois, comme par exemple page 325 des *Essais* (398 dans AT VI), une accolade est utilisée comme substitut de parenthèse pour délimiter une somme coefficient d'un polynôme.

La division euclidienne de Descartes

Dans le tableau de la pages 381 des *Essais* (455 de AT VI), Descartes considère une équation du troisième degré $E(x) = x^3 - 8x^2 - 124x - 64 = 0$, avec $x = y^2$, dont il « devine » une racine $y^2 = 16$ (c'est un diviseur du terme constant, dont les formules de Viète disent qu'il est le produit de toutes les racines). Pour le vérifier, il lui suffirait de tester l'égalité $E(16) = 0$, qui est exacte ; mais il désire connaître le quotient $Q(x)$, défini par l'une des deux égalités équivalentes

$$E(x) = (x - 16)\,Q(x), \qquad \frac{E(x) - x\,Q(x)}{-16} = Q(x).$$

Pour ce faire, il utilise une sorte de feuille de tableur où les inconnues comme [[**7**]] sont calculées l'une après l'autre de façon que la première ligne soit $E = 0$, la seconde $-x\,Q$, la troisième $E - x\,Q$, la quatrième une case vide suivie de $(-16, -16, -16)$ et enfin la dernière $Q = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
+x^3 & -8\,x^2 & -124\,x & -64 & = & 0 \\
-x^3 & [[\mathbf{5}]] & [[\mathbf{2}]] & & & \\
\cline{2-3}
0 & [[\mathbf{6}]] & [[\mathbf{3}]] & & & \\
\cline{2-4}
 & -16 & -16 & -16 & & \\
\hline
 & [[\mathbf{7}]] & [[\mathbf{4}]] & [[\mathbf{1}]] & = & 0.
\end{array}$$

C'est ici encore une application de la *méthode des coefficients indéterminés* (introduite par lui-même comme on l'a vu). Il s'agit des trois coefficients de Q, dont le premier doit être égal à 1, ce test étant la clef du calcul de Q, et donc de la confirmation de la « divination » de Descartes.

La première inconnue [[**1**]] vaut $\dfrac{-64}{-16} = 4$, terme constant de Q. Par suite [[**2**]] vaut [[**1**]] $x = -4\,x$, et [[**3**]] est égal à $-124\,x-$[[**2**]], soit $-128\,x$, d'où enfin [[**4**]]=[[**3**]]/$-\,16 = 8\,x$ et ainsi de suite jusqu'à [[**7**]], qui vaut effectivement 1.

Cette détermination du dernier coefficient d'abord est un peu maladroite, le calcul dans l'ordre inverse (commencer par écrire [[**3**]]= 1, puis en déduire [[**3**]] *etc.*) aurait été un peu plus rapide : remplacer une division par −16 par une multiplication...), mais c'est sans importance.

Après ces calculs, et revenant à $x = y^2$, cela donne bien le tableau cartésien, à quelques détails typographiques près

$$\begin{array}{ccccccc}
+y^6 & -8y^4 & -124yy & -64 & = & 0 \\[2ex]
-1y^6 & -8y^4 & -4yy & & & \\
 & \overline{} & \overline{} & & & \\
0 & -16y^4 & -128yy & & & \\
 & \overline{} & \overline{} & \overline{} & & \\
 & -16 & -16 & -16 & & \\
\hline
 & +y^4 & +8yy & +4 & = & 0.
\end{array}$$

À la page 382 des *Essais* (456 de AT VI), Descartes donne un autre exemple de sa méthode de division euclidienne par un binôme, cette fois-ci sur une équation avec paramètres

$$\begin{array}{ccccccc}
+y^6 & +(+aa-2cc)\,y^4 & +(-a^4+c^4)\,yy & -a^6-2a^4cc-a^2c^4 & = & 0, \\[2ex]
-y^6 & +(-2aa+cc)\,y^4 & +(-a^4-aacc)\,yy & & & \\
\overline{} & & & & & \\
0 & & & & & \\
 & \overline{} & \overline{} & \overline{} & & \\
 & -aa-cc & -aa-cc & -aa-cc & & \\
\hline
 & +y^4 & +(2aa-cc)\,yy & +a^4+aacc & = & 0.
\end{array}$$

La technique est évidemment la même (mais la troisième ligne n'est pas bien remplie). Tout cela est évidemment généralisable à une équation polynomiale quelconque, avec le même test (coefficients de degré maximal égaux dans E et Q). En regardant la forme générale de Q qui se construit petit à petit, on peut penser que nous avons ici une sorte de *schéma de Horner*, bien connu des informaticiens (mais allant de droite à gauche, et non l'inverse).

La règle des signes

La page 373 des *Essais* (446 dans AT VI) contient le paragraphe très important ci-dessous [37] précédé en marge du titre *Combien il peut y avoir de vrayes racines en chaque Equation.*

« *On connaît aussy de cecy combien il peut y avoir de vrayes racines, & combien de fausses en chaque Equation. A sçavoir il y en peut avoir autant de vrayes, que les signes* $+$ *et* $-$ *s'y trouvent de fois être changés ; & autant de fausses qu'ils s'y trouve de fois deux signes* $+$, *ou deux signes* $-$ *qui s'entresuivent. Comme en la dernière, a cause qu'aprés* $+x^4$ *il y a* $-4\,x^3$, *qui est un changement du signe* $+$ *en* $-$, *& aprés* $-19\,xx$ *il y a* $+106\,x$, *& après* $+106\,x$ *il y a* -120 *qui sont encore deux autres changemens, on connaist qu'il y a trois vrayes racines ; & une fausse, a cause que les deux signes* $-$, *de* $4\,x^3$, *&* $19\,xx$, *s'entresuivent.* »

Chose rare chez Descartes, nous avons ici presque un énoncé moderne de théorème [38]. Toutefois, pour pouvoir bien interpréter ce texte assez obscur à première vue, il nous faut poser quelques définitions. Tout d'abord un polynôme (une équation) est complet(ète) s'il (si elle) n'admet aucun coefficient nul. Pour expliciter les mots « changement » et « entresuivent », il suffit de quelques mots. Le travail consiste à considérer tous les couples de coefficients de deux puissances voisines comme x^{n+1} et x^n, qui sont réputés s'« entresuivre ». Il y a « changement » si, et seulement si, ces deux coefficients sont de signes différents.

Nous disons pour notre part *variation* pour changement, et *permanence* dans le cas contraire. Par exemple le polynôme

$$P(x) = 2\,x^7 + x^6 + 3\,x^5 - x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 + 4\,x + 3$$

est complet et possède deux variations : $(3,-1)$ et $(-2,4)$, et cinq permanences : $(2,1)$, $(1,3)$, $(-1,-2)$, $(4,4)$ et $(4,3)$.

Nous pouvons maintenant donner un énoncé moderne de la **règle des signes** telle que décrite par Descartes

37. Il s'agit de l'équation $(x-2)\,(x-3)\,(x-4)\,(x+5) = x^4 - 4\,x^3 - 19\,x^2 + 106\,x - 120 = 0$.
38. Toujours sans démonstration naturellement. Voir la lettre à Carcavi du 17 août 1649 (DLXV, page 397 dans AT V) et la réponse inexacte du 24 septembre (DLXX, page 416).

Le nombre des racines positives d'un polynôme complet est inférieur ou égal à celui de ses variations ; celui de ses racines négatives est inférieur ou égal à celui de ses permanences.

L'exemple du polynôme précédent confirme bien cette règle : on peut montrer qu'il ne possède aucune racine positive et une seule racine négative [39] égale au nombre -1.

Une preuve suggérée par un exemple

Donner ici une démonstration précise de la règle des signes serait alourdir ce texte car il faut pour cela utiliser des notations générales un peu lourdes [40]. Toutefois l'exemple ci-dessous montre bien le mécanisme de la preuve, et nous nous en contenterons.

Soit $P = A - B + C$ le polynôme déjà introduit où $A = 2\,x^7 + x^6 + 3\,x^5$, $B = x^4 + 2\,x^3$ et $C = 4\,x^2 + 4\,x + 3$ avec ses deux variations : $(3, -1)$ et $(-2, 4)$. Multiplions-le par $x - a$, où $a > 0$. Le calcul donne

$$(x - a)\,P = [2\,x^8 + \cdots - 3a\,x^5] + [-x^5 + \cdots + 2a\,x^3] + [4\,x^3 + \cdots - 3a]$$

$$= 2\,x^8 + \cdots - (3a + 1)\,x^5 + \cdots + (2a + 4)\,x^3 + \cdots - 3a.$$

Puisque les coefficients de x^8, x^5, x^3 et x^0 sont de signes alternativement $+$ et $-$, il en résulte que le nombre de variations de $(x - a)\,P$ est maintenant supérieur ou égal à trois, c'est-à-dire qu'il a augmenté d'au moins une unité en passant de P à son produit par $x - a$. La méthode étant visiblement générale, la première partie de la règle de Descartes s'ensuit aussitôt. Quand à la seconde, il suffit de la déduire de la première en changeant x en $-x$.

Indiquons qu'en 1685, John Wallis (1616-1703), farouche anticartésien, publia dans son *Treatise of Algebra* une diatribe au sujet de la paternité de la règle des signes, qu'il prétend lire dans les pages 79 à 82 de l'*Artis Analyticæ*

39. Et donc en outre six racines complexes non réelles deux à deux conjuguées.

40. C'est Gauß qui, le premier, a donné une démonstration générale décisive, comportant aussi l'étude des cas délicats où certains coefficients sont manquants (c'est-à-dire nuls), aux pages 1 à 4 du premier cahier du volume III du *Journal für die reine und gewandte Mathematik* [Crelle] de 1828. Il y prouve en outre que le nombre de racines positives et celui des variations diffèrent d'un nombre pair.

Praxis de Thomas Harriot (1560-1621) édité de manière posthume en 1631. Évaluer la pertinence de ce déchiffrage n'est pas encore aujourd'hui chose claire chez les historiens des mathématiques ; en tout cas le fait qu'Harriot ignore les racines négatives dans son livre incite à certaines réserves au sujet de cette dispute d'antériorité.

Pourquoi Descartes a-t-il besoin de la règle des signes ?

Sa réponse figure quatre pages plus loin (377 des *Essais*, 450 dans AT VI). Il explique qu'en ajoutant un nombre convenablement grand à toutes les racines, celles d'entr'elles qui sont réelles deviennent toutes positives [41], « *elles deviennent toutes vrayes, en sorte qu'il n'y ait point deux signes* $+$, *ou deux signes* $-$ *qui s'entresuivent* ».

Ce n'est pourtant pas là une véritable application de sa règle, ce qui ne manque pas de laisser le lecteur perplexe. Cette dernière dit que, *si le nombre de variations est* n ou, ce qui revient au même, *si le nombre de permanences est nul*, alors *il ne peut y avoir de racines négatives*, mais rien ne prouve que, si aucune d'elles n'est négative, il n'y a que des variations [42] ! Descartes a donc commis ici une seconde faute de logique.

Il s'était sans doute implicitement limité aux équations n'ayant que des racines réelles. Ou peut-être avait-il voulu dire que, s'il n'y a que des variations, alors sa règle implique que toutes les racines réelles sont strictement positives, puisque le nombre des racines strictement négatives est alors inférieur ou égal à 0 (c'est trivial puisque $P(-x)$, qui a tous ses coefficients strictement de même signe, ne peut visiblement pas s'annuler pour un nombre $x > 0$) ! Ce passage, très connu, conduit toutefois à une impression de doute.

Signalons néanmoins que l'affirmation de Descartes, bien qu'elle ne découle pas de sa règle des signes, est quand même exacte si on l'étend aux racines complexes et, surtout, si l'on connaît le *théorème fondamental de l'algèbre*, dont une variante dit que tout polynôme est produit de trinômes de la forme $(x - u_j - \mathbf{i}\, v_j)\,(x - u_j + \mathbf{i}\, v_j) = (x - u_j)^2 + v_j^2$ et de binômes de la forme $x - a_k$.

41. Il ne le dit pas, mais il est très facile de démontrer que, par exemple, toute racine de $x^4 = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ vérifie $\Re x > -\,(1 + |a| + |b| + |c| + |d|)$ (étudier d'abord $|x| < 1$).
42. Voir l'exemple $x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1)\,(x^2 + 2\,x + 2)$.

Sachant cela, si l'on ajoute à toutes les racines de $P(x)$ un nombre assez grand pour que ses racines réelles deviennent toutes positives *et aussi que ses racines complexes voient toutes leurs parties réelles également devenues positives*[43], alors $a_k > 0$, $u_j > 0$ et

$$P(-x) = C\left[\prod_k (x+a_k)\right]\left[\prod_j \left((x+u_j)^2+v_j^2\right)\right]$$

a tous ses coefficients de même signe, donc ne possède que des permanences, et $P(x)$ n'a que des variations, ce qui est l'annonce cartésienne. Nous ne pouvons être certains qu'il ait été capable de deviner avec précision tout cela, mais en tout cas il a pu comprendre ce qui se passait lorsque toutes les racines étaient réelles[44], et espérer que son résultat puisse facilement s'étendre au cas général (ce qui ne sera clarifié qu'en 1799).

Résoudre algébriquement les équations de degré quatre

La Règle II du chapitre XXXIX de l'*Ars Magna*[45] est l'une de celles qui permettent d'en trouver une racine « *par étapes successives* ». Cardan en attribue la paternité à son élève Lodovico Ferrari (1522-1565) qui l'aurait mise au point en 1540.

Voici sa technique. Voulant résoudre

$$P(x) = x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$$

il se donne un paramètre inconnu z et en déduit un trinôme $T_z(x)$ par l'égalité

$$T_z(x) = \left(x^2 + \frac{a}{2}\,x + z\right)^2 - P(x) = u\,x^2 + v\,x + w.$$

43. Condition signifiant que les parties réelles de *toutes* les racines sont strictement positives, suffisante mais non nécessaire : *cf.* $x^3 - x^2 + x - 6 = (x-2)\,(x^2+x+3)$.

44. Sans doute pouvait-il s'expliquer la raison pour laquelle les racines réelles de x^2+x+3 sont *toutes négatives* (aucune variation), et aussi *toutes positives* car également racines de $x^3 - x^2 + x - 6$ (aucune permanence) : l'ensemble en est vide ! Wallis donne l'exemple analogue $x^5 - 12\,x^4 + 3\,x^3 - 5\,x^2 + 4\,x - 645804 = (x-18)\,(x^4 + 6\,x^3 + 111\,x^2 + 1993\,x + 35878)$ à la page 138 de son *Algebra*, [*cf.* Scott, page 141 de *The scientific work of René Descartes*].

45. Page 237 de la traduction Witmer.

En annulant le discriminant $\Delta = v^2 - 4\,uw$, ce qui permet de considérer $T_z(x)$ comme le carré[46] d'un binôme $p\,x + q$, Ferrari obtient une équation du troisième degré en z. Le traité de Cardan contient, comme on le sait, l'algorithme de Scipion del Ferro permettant la résolution algébrique d'une telle équation[47] ; reportant l'une des trois racines z dans la définition de T_z, on peut alors écrire l'équation en x sous la forme

$$0 = \Big(x^2+\frac{a}{2}\,x+z\Big)^2-(p\,x+q)^2 = \Big(x^2+\frac{a}{2}\,x+z+p\,x+q\Big)\,\Big(x^2+\frac{a}{2}\,x+z-p\,x-q\Big)$$

ce qui ramène la résolution de $P(x) = 0$ à celle de deux banales équations du second degré.

Donnons un exemple simple de la méthode de Ferrari

$$P(x) = (x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4) = x^4 - 10\,x^3 + 35\,x^2 - 50\,x + 24,$$

$$T_z(x) = (x^2 - 5\,x + z)^2 - P(x) = 2\,(z-5)\,x^2 + 10\,(5-z)\,x + z^2 - 24.$$

Le discriminant réduit $\Delta' = \dfrac{\Delta}{4}$ de T_z est

$$25\,(5-z)^2-2\,(z-5)\,(z^2-24) = (z-5)\,(-2\,z^2+25\,z-77) = (z-5)\,(z-7)\,(11-2z)$$

d'où, en choisissant par exemple $z = 5$ d'où $T_5(x) = 1$, le système des deux équations

$$0 = (x^2-5\,x+5)^2-1 = (x^2-5\,x+4)\,(x^2-5x+6) = (x-1)\,(x-4)\,(x-2)\,(x-3).$$

D'une manière générale, si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont les quatre racines de P, celles de Δ sont $z = \dfrac{1}{2}\,(\alpha\beta+\gamma\delta)$ et les deux autres nombres analogues ; ici par exemple $5 = \dfrac{1}{2}\,(1.4 + 2.3)$.

Descartes contre Ferrari

Puisque Descartes explicite dans *La Géométrie* la formule dite « *la règle de Cardan*[48] » pour le degré 3, il disposait quelques années avant 1637 de l'*Ars*

46. En recourant s'il le faut aux nombres complexes.
47. Page 96 de la traduction Witmer.
48. Page 400 des *Essais* et 471 de AT VI.

Magna, donc de la méthode de Ferrari. On peut toutefois penser que, sans avoir encore eu la possibilité d'en connaître le contenu, lors de ses travaux de jeunesse portant notamment sur la résolution des équations du troisième degré, il ait pu imaginer un lien algébrique entr'elles et leurs sœurs du quatrième degré qu'il va exposer dans le début de ce Livre Troisième. Quoi qu'il en soit, il a fait œuvre très originale sur ce point, et il en était certainement fier à juste titre.

Voici sa technique, bizarrement présentée comme toujours, en deux parties, pages 383 et 385 des *Essais* (457 et 459 de AT VI). Dans un premier temps, il explique sans justification aucune comment associer à l'équation $P(x) = 0$ de degré 4 en x une équation $Q(y) = 0$ de degré 6 en une autre inconnue y, mais ne possédant que des termes pairs (donc en fait une équation de degré 3 en y^2). Puis il montre comment la résolution de cette dernière lui permet de revenir à l'inconnue initiale x, ce qui justifie l'algorithme *a posteriori*.

Il appliquera cette méthode à trois exemples, tous en page 384 des *Essais* (456 de AT VI), à savoir

$$(x^4 - 4\,x^2 - 8\,x + 35, \quad y^6 - 8\,y^4 - 124\,y^2 - 64),$$
$$(x^4 - 17\,x^2 - 20\,x - 6, \quad y^6 - 34\,y^4 + 313\,y^2 - 400),$$
$$\Big(x^4 + \Big(\frac{a^2}{2} - c^2\Big)\,x^2 - a\,(a^2 + c^2)\,x + \frac{5}{16}\,a^4 - \frac{a^2c^2}{4},$$
$$y^6 + (a^2 - 2c^2)\,y^4 + (c^4 - a^4)\,y^2 - a^2(a^2 + c^2)^2\Big).$$

Quelques remarques d'abord sur les trois équations en x. Elles sont toutes sans terme du troisième degré, ce qui n'est pas grave puisque nous avons vu que toute équation pouvait, par une translation convenable, être mise sous cette forme. Par ailleurs seule la troisième a déjà été rencontrée (pages 377 des *Essais* et 450 de AT VI), justement comme exemple de modification d'une équation du quatrième degré dont le terme de degré 3 n'est pas nul [49].

Quant aux équations en y, la première a déjà été examinée [50] page 382 des *Essais* et 454 de AT VI : il y est montré, par un argument arithmétique (les diviseurs de 64), qu'elle se factorise en

$$(y^2 - 16)\,(y^4 + 8\,y^2 + 4)$$

49. À savoir $x^4 - 2a\,x^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a\,x + a^4$.
50. C'est la seule. Voir la page 458.

ce qui montre que, si l'on se borne aux valeurs réelles de y rendant y^2 forcément positif, $y = 4$ et son opposée sont les seules racines exploitables de cette équation en y.

Voici l'idée cartésienne : il ne la développe pas au départ, se contenant de donner un algorithme [51] faisant passer de l'équation en x à celle en y ; ce sera clair aussitôt après, quand il montrera comment la résolution de la seconde permet celle de la première.

Il désire une décomposition de la forme

$$P(x) = x^4 + p\,x^2 + q\,x + r = (x^2 - y\,x + u)\,(x^2 + y\,x + v) = A(x)\,B(x).$$

S'il y parvient, il est alors ramené à deux résolutions d'équations du second degré $A = 0$ et $B = 0$. Pour cela, il se propose d'identifier les deux membres de $P = AB$, c'est-à-dire de résoudre les trois équations en (y, u, v)

$$p = u + v - y^2, \qquad q = (u - v)\,y, \qquad r = uv.$$

Les deux premières donnent $u = \dfrac{1}{2}\left(y^2 + p + \dfrac{q}{y}\right)$ et $v = \dfrac{1}{2}\left(y^2 + p - \dfrac{q}{y}\right)$, d'où par exemple (si $y \neq 0$)

$$0 = Q(y) = y^2(y^2 + p)^2 - 4r\,y^2 - q^2 = y^6 + 2p\,y^4 + (p^2 - 4r)\,y^2 - q^2.$$

Voilà donc l'algorithme tel qu'explicité sans justifications en page 383 des *Essais* (457 dans AT VI). Tout est plus compliqué ici puisque Descartes écrit plutôt

$$Q(y) = y^6 \pm 2p\,y^4 + (p^2 \mp 4r)\,y^2 - q^2$$

pour les raisons données plus haut [52].

Le cahier des charges est clair : résoudre l'équation $Q(y) = 0$ en y^2 (pour cette inconnue elle est de degré 3, en déduire y (au choix, par exemple positive), u et v par les formules données, et enfin résoudre l'équation de départ [53].

51. Que l'obligation de n'employer que des nombres positifs rend fort confus !

52. À noter que le point entre deux monômes, comme dans $+x^4 + *.pxx.qx.r = 0$ indique que les véritables coefficients sont p, q et r précédés selon les cas par un signe $+$ ou un signe $-$; l'astérisque $*$ indique simplement qu'une « place » n'est pas remplie, c'est-à-dire qu'un coefficient est nul ; le résultat s'écrit donc pour lui $+y^6.2p\,y^4 + (pp.4r)\,yy - qq = 0$, et il lui faut un long commentaire (neuf lignes dans la version originale) pour expliciter tout à fait précisément la construction de Q.

53. Si cette dernière possédait un coefficient non nul en x^3, il faut encore effectuer une opération de plus, à savoir une translation sur x pour satisfaire aux conditions initiales.

Puisqu'il a donné trois exemples, il reste à les traiter complètement : cela lui prend quatre pages ! Inutile de suivre les détails, toujours embourbés dans les histoires de signes ; redonnons plutôt les résultats, très faciles à obtenir pour un moderne grâce à l'invention[54] des symboles mathématiques non signés

a) Pour le premier couple[55]

$$P(x) = x^4 - 4\,x^2 - 8\,x + 35, \quad Q(y) = y^6 - 8\,y^4 - 124\,y^2 - 64,$$

une racine $y = 4$ ($y^2 = 16$) est « évidente ». C'est la seule vraiment exploitable, car nous savons depuis la page 381 des *Essais* (455 dans AT VI) que

$$Q(y) = (y^2 - 16)\,(y^4 + 8y^2 + 4).$$

Elle conduit à la factorisation de la page 386 des *Essais* (460 dans AT VI)

$$P(x) = x^4 - 4\,x^2 - 8\,x + 35 = (x^2 - 4\,x + 5)\,(x^2 + 4\,x + 7)$$

et à quatre racines toutes « imaginaires »[56], à savoir $2 \pm \mathbf{i}$ et $-2 \pm \mathbf{i}\sqrt{3}$.

b) Pour le second couple

$$P(x) = x^4 - 17\,x^2 - 20\,x - 6, \quad Q(y) = y^6 - 34\,y^4 + 313\,y^2 - 400,$$

c'est toujours $y = 4$ ($y^2 = 16$), elle aussi « évidente », vérifiant

$$Q(y) = (y^2 - 16)\,(y^4 - 18\,y^2 + 25) = (y^2 - 6)\,(y^2 - 9 + 2\sqrt{14})\,(y^2 - 9 - 2\sqrt{14})$$

et conduisant aux factorisations de la même page 386 des *Essais* (460 dans AT VI)

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 4\,x - 3)\,(x^2 + 4\,x + 2) \\ &= (x - 2 + \sqrt{7})\,(x - 2 - \sqrt{7})\,(x + 2 + \sqrt{2})\,(x + 2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

54. En grande partie due à Descartes !
55. Dans la présentation de l'algorithme, mais bizarrement le second pour la résolution.
56. Non explicitées par Descartes.

c) Pour le troisième couple [57]

$$P(x) = x^4 + \left(\frac{a^2}{2} - c^2\right) x^2 - a\,(a^2 + c^2)\, x + \frac{5}{16} a^4 - \frac{a^2 c^2}{4},$$
$$Q(y) = y^6 + (a^2 - 2c^2)\, y^4 + (c^4 - a^4)\, y^2 - a^2(a^2 + c^2)^2,$$

le nombre $y^2 = a^2 + c^2$ convient, car nous savons depuis la page 382 des *Essais* (456 dans AT VI) que

$$Q(y) = \left(y^2 - a^2 - c^2\right)\left(y^4 + (2a^2 - c^2)\, y^2 + a^2(a^2 + c^2)\right).$$

Il conduit à la factorisation de l'éternelle page 386 des *Essais* (mais cette fois-ci 461 dans AT VI)

$$\left(x^2 - x\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{3}{4}\, a^2 - \frac{1}{2}\, a\sqrt{a^2 + c^2}\right)\left(x^2 + x\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{3}{4}\, a^2 + \frac{1}{2}\, a\sqrt{a^2 + c^2}\right)$$

et aux quatre racines

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{-\frac{1}{2}\, a^2 + \frac{1}{4}\, c^2 + \frac{1}{2}\, a\sqrt{a^2 + c^2}},$$
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{-\frac{1}{2}\, a^2 + \frac{1}{4}\, c^2 + \frac{1}{2}\, a\sqrt{a^2 + c^2}},$$
$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{-\frac{1}{2}\, a^2 + \frac{1}{4}\, c^2 - \frac{1}{2}\, a\sqrt{a^2 + c^2}},$$
$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{-\frac{1}{2}\, a^2 + \frac{1}{4}\, c^2 - \frac{1}{2}\, a\sqrt{a^2 + c^2}}$$

dont Descartes ne cite que les deux premières.

Revenant enfin à l'équation initiale (avant translation) il n'en exhibe en définitive qu'une seule racine, la somme de $\frac{1}{2}\, a$ et de la seconde ci-dessus, qu'il écrit sous la forme à peine différente

$$x = +\frac{1}{2}\, a + \sqrt{\frac{1}{4}\, a^2 + \frac{1}{4}\, c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}\, c^2 - \frac{1}{2}\, a^2 + \frac{1}{2}\, a\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

57. Nous avons, pour des raisons de lisibilité, remplacé ici le z de Descartes par le x habituel. On peut noter que poser $b = \sqrt{a^2 + c^2}$, d'où $c^2 = b^2 - a^2$, simplifierait quelque peu les calculs. Voir aussi la page 458.

Les raisons de ces choix seront expliquées ci-dessous lors de l'étude du second problème de Pappus.

d) Pour l'exemple donné plus haut par la méthode de Ferrari[58], il faut d'abord se ramener par translation $x \to x - 5/2$ à

$$(x-3/2)\,(x-1/2)\,(x+1/2)\,(x+3/2) = x^4 - \frac{5}{2}\,x^2 + \frac{9}{16},$$
$$Q(y) = y^6 - 5\,y^4 + 4\,y^2 = y^2(y^2-1)\,(y^2-4).$$

Le choix $y = 0$ s'impose, et conduit par exemple aux égalités $u = -\dfrac{1}{4}$, $v = -\dfrac{9}{4}$ et aux équations

$$0 = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

d'où finalement (après la translation inverse) les racines 3, 2, 4 et 1 de l'équation de départ.

e) Ajoutons enfin un exemple dû à Thomas Harriot[59] retrouvé dans ses papiers après sa mort. Il considère l'équation

$$P(x) = x^4 - 6\,x^2 + 136\,x - 1155 = 0$$

qu'il résout ainsi : il la met sous la forme $x^4 - 2\,x^2 + 1 = 4\,x^2 - 136\,x + 1156$ soit encore $x^2 - 1 = \pm\,(2\,x - 34)$, ce qui équivaut enfin à la décomposition

$$P(x) = (x^2 - 2\,x + 33)\,(x^2 + 2x - 35)$$

qui donne les racines $1 \pm 4\,\mathbf{i}\sqrt{2}$, 5 et -7. Il ne dit pas si c'est un hasard heureux qui l'a mis sur la piste de cette astuce de calcul, ou si ce n'est pas plutôt la méthode de Ferrari qui lui fournit une racine évidente $z = -1$. Celle de Descartes (qu'évidemment il ne pouvait pas connaître) aurait conduit à $y = 2$ et, bien sûr, à la même factorisation.

Avant de passer à l'étude du second problème de Pappus, il est temps de poser quelques remarques simples

58. Mais non traité par Descartes.
59. Voir la page 461.

- La méthode de Descartes, tout comme celle de Ferrari, est une méthode applicable même aux équations comportant des paramètres, ce que ne sera pas sa méthode graphique exposée plus loin dans ce Livre Troisième.

- Par rapport à celle de Ferrari, elle n'apporte pas grand chose, sauf peut-être une preuve de la virtuosité de calculateur de Descartes. Il aurait pu ne pas la publier dans la mesure où elle ne joue pas de rôle spécial dans son grand algorithme de résolution.

- Comme pour Ferrari, le paramètre y introduit par Descartes possède une interprétation simple en termes de racines $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Chacune des six racines de Q est en effet la somme de deux des racines de P, par exemple [60] $y = \alpha + \beta \left(= -\gamma - \delta = \dfrac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2} \right)$.

- S'il existe une valeur simple pour y (par exemple $y = 4$ comme dans deux des cas précédents), la solution générale de l'équation du quatrième degré initiale s'exprime uniquement à l'aide de racines carrées, alors que dans le cas général des racines cubiques sont incontournables.

- Enfin aucune de ces deux méthodes ne peut s'étendre aux équations de degrés supérieurs à quatre (*cf.* Évariste Galois, en cela élève de Lagrange) : il en résulte la nécessité d'algorithmes très différents, dont justement ceux que Descartes va nous proposer dans les pages finales de son livre. C'était bien pour lui de s'en être persuadé, sans doute vers la fin des années 1620, et de s'être tourné vers une démarche vraiment originale.

Le second problème de Pappus

Voici l'énoncé du second problème de Pappus figurant dans *La Géométrie*, emprunté à Alphonse Louis Maroger [61]

60. La Note X, à partir de la page 223, du livre *De la résolution des équations numériques de tous les degrés* [Duprat (Paris) An VI (1798)] de Joseph-Louis Lagrange, synthèse d'un article antérieur (XIII) des *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1770, les *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, page 203 du troisième tome de ses *Œuvres complètes* [Gauthier-Villars, 1869], et tout particulièrement des paragraphes 26 (page 254) pour Ferrari et 34 (page 271) pour Descartes, donne les détails nécessaires pour pénétrer au cœur de ces deux techniques équivalentes.

61. Élève de la promotion 1895 de l'École normale supérieure, reçu troisième à l'agrégation de mathématiques en 1901, professeur à Marseille, à la page 1 de son livre *Le*

Par un point pris sur la bissectrice d'un angle droit, mener un segment de longueur connue et dont les extrémités soient sur les côtés de l'angle.

Nous le qualifions ici de *second problème* : cela renvoie à son ordre dans le livre de Descartes, mais non bien sûr à sa place dans la « somme » de Pappus. Il s'agit en fait d'un problème typique de *neusis* ($\nu\epsilon\hat{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$, inclinaison) comme ceux déjà rencontrés dans l'étude des tangentes vues par Archimède.

Dans certains textes, l'angle n'est pas nécessairement droit, ce qui rend le problème plus complexe. C'était le cas du problème [62] VIII du traité perdu *Les inclinaisons* d'Apollonius, cité par Pappus dans le Livre VII de la *Collection* à propos de son Lemme VI (Proposition 70, page 603 du volume II de la traduction Ver Eecke).

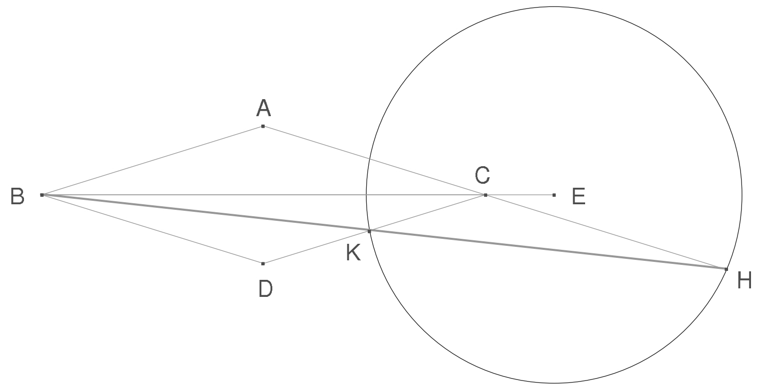


FIGURE 9.5 – *Le second problème de Pappus vu par Apollonius*

Ce problème traitait d'une jolie propriété d'un losange $ABDC$: si le cercle de centre E a un rayon R tel que [63] $EC \cdot EB = R^2$, alors les trois points BKH sont alignés [64].

---

problème de Pappus et ses cent premières solutions (Paris, Vuibert, 1925).

62. Construire à la règle et au compas une droite issue d'un sommet d'un parallélogramme intercepté par ses côtés selon une longueur donnée.

63. C'est-à-dire si C est le pied de la polaire de B relative à ce cercle.

64. Voici les deux étapes principales de la démonstration : prouver que les triangles $\begin{bmatrix} BEK \\ KEC \end{bmatrix}$ sont inversement semblables, puis - par les angles - que $\begin{bmatrix} CBK \\ CHE \end{bmatrix}$ le sont directement, et conclure.

Par suite, connaissant $ABDC$ et $KH = c$, on peut construire K et H car les triangles $\begin{bmatrix} KHE \\ BCA \end{bmatrix}$ sont semblables, d'où $R = EK = KH\,\dfrac{AB}{BC} = c\,\dfrac{AB}{BC}\cdot$ Il ne reste plus alors qu'à déterminer E tel que $EB \cdot EC = R^2$ ce qui résout le problème [65].

Dans ses deux propositions suivantes (VII, 71, p. 605 et VIII ; 72, p. 606) [66], Pappus reprend le problème pour un angle droit et le résout, à la règle et au compas, selon Héraclite d'après ses propres dires. Ses deux figures sont très proches de celle de Descartes, et nous donnerons des indications sur ce texte en suivant les notations de ce dernier.

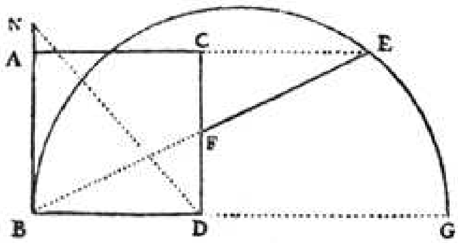


FIGURE 9.6 – *Le second problème de Pappus vu par Descartes*

Voici une variante moderne de cette solution, plus simple mais essentiellement équivalente. Au départ, $AC = CD = DB = BA = a$, $BN = FE = c$, et l'angle $\widehat{BEG}$ est droit. Nous allons montrer que $DN = DG$, ce qui donne une construction du point G connaissant $ABDC$ et c, puis du cercle de diamètre BG et enfin du point E situé à l'intersection de ce cercle et du côté AC, construction explicitée par Pappus et reprise par Descartes page 387 des *Essais* (462 de AT VI).

Il faut commencer par remarquer les similitudes (directes ou indirectes) liant les triangles rectangles GEB, FDB et BAE : on en déduit facilement les égalités $BE \cdot BF = a\,BG$ et $EG = BF$, puis

$$DN^2 - a^2 = c^2 = (BE - BF)^2 = BE^2 + EG^2 - 2a\,BG = (BG - a)^2 - a^2,$$

65. Voir notamment *A history of greek mathematics* de Sir Thomas Little Heath [Oxford University Press 1921, Dover 1981], volume II, pages 190-192.

66. Intitulées respectivement *Lemme utile pour le problème réalisant sur les carrés les mêmes choses que sur les parallélogrammes* - si l'on suit la correction de Ver Eecke par rapport à la traduction Hultsch - et *Le problème à la manière d'Héraclite*.

ce qu'il fallait démontrer puisque $a = BD$.

Après ce rappel, nécessaire pour éclairer la stratégie de Descartes toujours désireux de montrer comment sa méthode simplifiait [67] un travail qui avait coûté beaucoup d'efforts aux Anciens, voici l'entrée de la géométrie analytique [68], enrichie des traitements d'équations qui ont précédé.

D'abord la mise en équation est très classique : les triangles homothétiques $\begin{bmatrix} BFD \\ EFC \end{bmatrix}$ et la définition $x = DF$ donnent, *dans le cas de figure cartésien* [69],

$$\frac{a-x}{c} = \frac{CF}{FE} = \frac{DF}{FB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

soit $(a-x)^2(a^2+x^2) = c^2x^2$ et enfin

$$x^4 - 2a\,x^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$

ce qui est bien l'équation de la page 377 des *Essais* (450 dans AT VI). Nous en connaissons les quatre racines [70]

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(a + \sqrt{a^2+c^2}) - \sqrt{-\frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{4}\,c^2 + \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\beta = \frac{1}{2}\,(a + \sqrt{a^2+c^2}) + \sqrt{-\frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{4}\,c^2 + \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\,(a - \sqrt{a^2+c^2}) - \sqrt{-\frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{4}\,c^2 - \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\delta = \frac{1}{2}\,(a - \sqrt{a^2+c^2}) + \sqrt{-\frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{4}\,c^2 - \frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2+c^2}}$$

67. En l'automatisant en quelque sorte.

68. Ce que nous venons de dire est exact, mais juste sur le fond et non sur la forme (comme souvent chez Descartes) : il n'y a pas officiellement d'origine et d'axes de coordonnées, juste une inconnue nommée x, et on pourrait imaginer que ce calcul ait pu être fait par un Grec ; toutefois ce ne fut pas le cas, et il est incontestable, pensons-nous, que c'est parce que la géométrie analytique avait été inventée que cette technique de résolution du problème de Pappus a pu être mise au point.

69. Correspondant à F entre C et D.

70. On pourra remarquer que l'on passe des deux premières aux deux dernières en changeant a en $-a$ et en multipliant par -1.

(α était la seule racine finalement reçue par Descartes), correspondant à la décomposition

$$x^4 - 2a\,x^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a^3x + a^4 = (x^2 - a\,x + a^2)^2 - (a^2 + c^2)\,x^2$$

$$= (x^2 + (a + \sqrt{a^2 + c^2})\,x + a^2)\,(x^2 + (a - \sqrt{a^2 + c^2})\,x + a^2).$$

On peut noter en particulier les égalités très simples $\alpha\beta = \gamma\delta = a^2$.

Un peu de calcul scolaire montre que $\beta \geqslant \alpha \geqslant 0$, tandis que γ et δ n'existent que si $c \geqslant 2a\sqrt{2}$, et vérifient alors les relations $0 \geqslant \delta \geqslant \gamma$. Cela explique pourquoi Descartes n'avait gardé que la première (α), car c'est la seule qui convienne à sa figure. La seconde (β), plus grande, correspond au second point d'intersection [71] de la droite AC avec le cercle de diamètre BG. Pour bien comprendre le rôle des deux autres racines, imaginaires ou négatives, un détour par un texte intéressant de Lagrange s'impose.

Au paragraphe 115 de la page 418 de son article de 1770 déjà cité (voir la page 470) Joseph-Louis Lagrange s'attaque au problème de Pappus-Descartes, sans le nommer ainsi [72], échangeant A et C, et B et D, notant M pour E et N pour F. Surtout, il introduit trois autres couples de points, (M', N'), (M'', N'') et (M''', N''') tels que $AB = a$, $MN = M'N' = M''N'' = M'''N''' = b$ et $CM = x$. L'équation qu'il obtient s'écrit

$$x^4 + 2a\,x^3 + (2a^2 - b^2)\,x^2 + 2a^3x + a^4 = 0,$$

c'est-à-dire celle de Descartes, aux changements près de c en b et de x en $-x$.

71. Analogue à E, mais non nommé par Descartes.

72. Déjà repris presque mot pour mot par l'Oratorien Bernard Lamy (1640-1714), à la page 350 de la seconde édition de 1695 de son livre *Les éléments de géométrie ou de la mesure du corps* (cité à la page 304 de *La révolution mathématique du XVII^o siècle* d'Évelyne Barbin [ellipses, 2006]) et, surtout, par Newton dans son *Arithmétique universelle*.

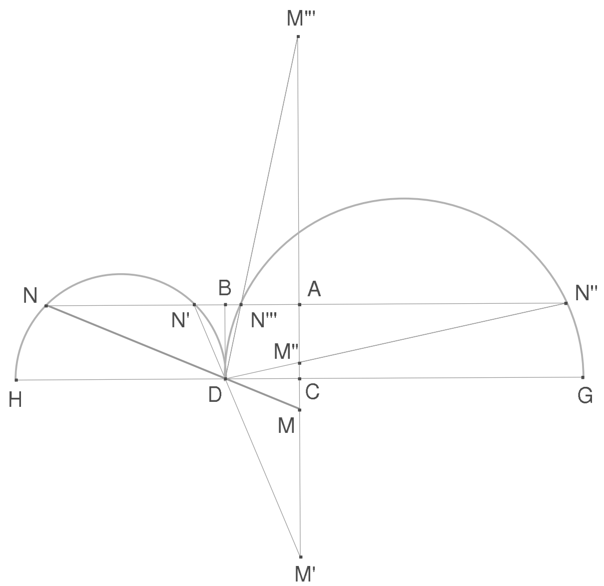


FIGURE 9.7 – *Le second problème de Pappus vu par Lagrange*

Sur la figure ci-dessus (tournée d'un angle droit pour des raisons de mise en page) [73], nous avons ajouté deux demi-cercles pour rester fidèles à la construction cartésienne, et par suite les deux points G et H qui les déterminent, tels que $CG = CH = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dans ce cas de figure, les quatre racines sont bien visibles : deux d'un côté de C, deux de l'autre. On y lit aussi que les deux premières existent toujours, car elles correspondent à des cas où le segment de longueur donné ne contient pas le point pivot [74]. Par contre les deux autres peuvent ne pas être réelles si la droite est trop haute par rapport au cercle.

De manière plus précise, il est bien clair que la longueur du segment intercepté par les côtés de l'angle droit ne peut avoir de valeur trop basse, le minimum étant sans doute obtenu dans le cas où la droite est parallèle à une diagonale du carré. C'est ce que confirme aussitôt le calcul : γ et δ n'existent que

73. Ces demi-cercles mis à part, cette figure est également présente dans le très long commentaire de Frans Van Schooten dans sa traduction latine de *La Géométrie* (pages 311-312). On la retrouvera aussi dans Rabuel, comme figure 229 de la page 490.

74. En effet, il est clair par continuité que la longueur d'un tel segment MN (ou EF) croît de 0 à l'infini en passant par toutes les valeurs possibles, donc par c.

si $c^2 \geqslant 8a^2$, soit $c \geqslant 2a\sqrt{2}$ ce qui confirme notre évidence géométrique conjecturée ci-dessus.

Ce qui est également intéressant c'est que, mise sous cette forme, la figure permet de voir aussitôt que la résolution graphique des deux équations du second degré en lesquelles l'équation se décompose est exactement celle que Descartes a donné, dès son Livre Premier, page 303 des *Essais* (376 dans AT VI), ce qui n'a évidemment rien pour étonner.

Descartes nous invite à regarder d'autres choix possibles pour l'inconnue x. Pour $x = BF$, CE ou BE : on obtient les équations suivantes

$$x^4 + 2c\,x^3 + (c^2 - 2a^2)\,x^2 - 2a^2c\,x - a^2c^2 = 0,$$
$$x^4 - 2c\,x^3 + (c^2 - 2a^2)\,x^2 + 2a^2c\,x - a^2c^2 = 0,$$
$$x^4 + 2a\,x^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2ac^2\,x - a^2c^2 = 0.$$

Dans chacun de ces trois cas, la méthode de Descartes conduit, après translation, à une équation auxiliaire du sixième degré en y dont $y = 0$ est solution. C'est plus simple que pour l'équation en $x = DF$

$$x^4 - 2a\,x^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$

qui conduisait à $y = \sqrt{a^2 + c^2}$. C'est pourquoi Descartes écrit

« *on viendrait derechef à une Equation, en laquelle il y aurait 4 dimensions, mais qui serait plus aysée a démesler, & on y viendrait assés aysement* ».

Mais il ajoute que si l'on posait $x = DG$, l'équation serait alors très simple, mais « *qu'on viendrait beaucoup plus difficilement a l'Equation* », ce qui est bien exact puisque l'on se trouverait alors devant $x^2 = a^2 + c^2$! On pourrait également poser $x = FC$, ou $x = AE$ pour lesquels $y = 0$ ne convient plus, mais où l'on retombe sur $y = \sqrt{a^2 + c^2}$.

Ces suggestions cartésiennes pourraient conduire à l'application de la vieille méthode de Ferrari à toutes ces équations. Une grande surprise nous attend : en effet l'inconnue auxiliaire z de cette méthode peut prendre en particulier la valeur très simple $z = a^2$ pour toutes ces équations [75]. La raison en est, bien entendu, le couple d'égalités déjà remarquées, à savoir $\alpha\beta = \gamma\delta = a^2$, à comparer avec l'égalité $z = \dfrac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}$ à permutation près.

75. À une très légère exception près, pour $x = BF$, où $z = -a^2$.

Comment lire ce mini-traité des équations ?

Le résultat très curieux mettant en évidence cette racine $z = a^2$ nous permet de poser une hypothèse assez vraisemblable : *Descartes aurait construit sa méthode de résolution de l'équation du quatrième degré*[76] *sans avoir lu Cardan*[77]. Une objection immédiate vient à l'esprit : cette technique ne vaut rien si l'on ne connaît pas les formules de Cardan. Une réponse possible est la suivante : la méthode de Descartes, avant qu'il ne découvre l'*Ars Magna*, n'était peut-être pas absolument générale, mais fonctionnait en tout cas lors de la présence de racines « évidentes » en y^2.

Cette réponse défensive est confortée par le fait que, durant cette longue traversée du début du Livre Troisième, on ne trouve effectivement que des cas où une telle racine simple s'impose (par exemple $y = 4$ ou $y = \sqrt{a^2 + c^2}$). Dans l'hypothèse où la variante de Descartes aurait été conçue après la lecture de Cardan, il aurait d'abord essayé la technique de Ferrari sur son équation du second problème de Pappus ; tombant alors sur une racine vraiment très évidente $z = a^2$, il n'aurait pas eu besoin d'autre chose et il serait aussitôt passé à la suite. Nous laissons les lecteurs juger de cette conjecture, à notre connaissance inédite.

Par ailleurs, le compas qui ouvre ce Livre a représenté, aux yeux du jeune Descartes (1619, à une époque où il n'avait pas lu Cardan), un outil - ou le précurseur d'une ligne d'outils - qui aurait dû lui permettre de résoudre toutes les équations du troisième degré ; en tout cas il lui offre sur un plateau toutes les constructions de racines n-ièmes réelles dont on peut avoir besoin, *et donc toutes les résolutions d'équations algébriques qui se ramènent à des suites d'extractions de racines, par exemple celles du quatrième degré du type de celles qu'il nous a longuement énumérées.*

On peut donc imaginer que nous nous trouvions ici devant des restes d'un texte ancien, débutant par la description d'un appareillage mécanique destiné en principe au moins au degré trois, tout de suite complété par l'invention d'une méthode algébrique ramenant le degré quatre à l'échelon immédiatement inférieur, avec en finale une brillante application à un célèbre

76. À partir de celle du troisième.
77. Et donc sans avoir eu connaissance de la méthode de Ferrari.

problème ancien. Ce mélange mécanique/algébrique qui doit, aux yeux d'un moderne, paraître *a priori* assez bizarre, peut donc être lu de façon plus rationnelle. On doit d'ailleurs noter que, dans toutes ces pages, les formules de Cardan n'apparaissent nullement, puisqu'on ne les trouvera pour la première fois qu'en page 398 des *Essais* (472 dans AT VI).

À la lumière de cette hypothèse, on pourrait résumer ainsi cette première contribution de Descartes à la résolution algébrique des équations du quatrième degré : sa méthode permet au moins de résoudre à la règle et au compas toutes celles d'entre elles qui peuvent rationnellement [78] se décomposer en deux équations du second degré, c'est-à-dire encore *celles dont les quatre solutions peuvent s'exprimer à l'aide des seules opérations usuelles augmentées de l'extraction de racines carrées* (les autres faisant apparaître au moins deux racines cubiques).

La suite immédiate du Livre Troisième montre que Descartes a également mis au point, pour les équations numériques de ce degré et quelques autres, une technique graphique tournant complètement le dos à la précédente, qui exige bien entendu toute la puissance de la géométrie analytique qu'il vient d'inventer, puisqu'il lui faut pour cela disposer de courbes de degrés arbitraires. Ce ne sera pas la première fois que, tranchant encore un nœud gordien, il aura su se montrer profondément original et fécond.

Il aurait donc pu se borner à n'exposer de ces vingt pages que le strict nécessaire : par exemple la règle des signes et la technique de translation des racines qui lui serviront plus tard dans son livre. Mais sans doute aurait-il alors regretté de ne pas publier sa découverte de jeunesse, indépendante de Ferrari, *a priori* excellente pour la construction de n moyennes proportionnelles, fameux problème pour l'époque, et surtout sa solution personnelle du second problème de Pappus.

Connaissant Descartes, cette mise à l'écart de résultats dont il était fier était impossible, quitte à donner - comme en de nombreux endroits - une impression désordonnée. Toujours est-il que ces pages peu avenantes ont une place de choix, juste avant l'hallali : il était bon de leur consacrer quelques minutes pour un examen approfondi.

78. Ou à l'aide d'une extraction de racine carrée.

Pour l'histoire des sciences, et des mathématiques en particulier, un lecteur moderne pourrait être tenté de s'arrêter ici dans sa lecture de *La Géométrie*. En effet, dans ce début de Livre, on trouve trace d'une théorie moderne de l'algèbre, voire la plus abstraite : la suite est essentielle pour le projet cartésien, mais elle ne donnera pas de traces dans notre mathématique « moderne ». Ces manipulations sur le thème des équations algébriques peut paraître anodines à quelqu'un de pressé : une réflexion plus approfondie montre pourtant facilement ce qu'elles avaient de prodigieusement neuf (qu'on relise en parallèle, par exemple, l'œuvre - pourtant admirable - de Viète) : sans elles, Newton et Leibniz, exemples fondamentaux, auraient rencontré nettement plus de difficulté à bâtir l'analyse puissante qu'ils nous ont léguée. Quels que soient les sentiments un peu chaotiques que l'on retire de leur examen, les pages décrites dans ce chapitre devraient, à notre avis, être nettement réévaluées dans l'appréciation collective de l'œuvre mathématique de Descartes encore trop centrée sur un seul thème.

Chapitre 10

Les équations de degrés 3 et 4

Nous entrons dans la partie majeure de *La Géométrie* : la présentation par Descartes de sa **méthode de résolution graphique de toutes les équations algébriques**[1]. Il a placé ses techniques personnelles pour le premier et deuxième degré tout en début de traité ; celles qui viennent, d'abord pour les degrés 3 et 4 puis 5 et 6, forment la partie la plus originale de son œuvre (non compris l'invention de la géométrie analytique, bien sûr, mais qui ne fut au départ, pensons-nous, qu'un outil lui permettant de présenter une technique théoriquement valable pour des équations de degrés aussi élevés que désiré). Le cas du degré 4 est très simple, et aidera à comprendre celui du degré 6, autrement complexe.

Avant d'entrer dans le détail[2], regardons une figure[3] illustrant comment lire les quatre racines $(-3, -2, 1, 4)$ de l'équation $z^4 - 15\,z^2 - 10\,z + 24 = 0$, respectivement représentées par les longueurs KG, kg, fl et FL, les deux premières étant comptées négativement (car elles sont « fausses ») et les autres positivement (elles sont « vraies »). On obtient ces quatre distances en coupant la parabole d'équation $x = z^2$ dans un repère cartésien[4] d'origine A où z représente l'abscisse et x l'ordonnée, **supposée tracée une fois pour toutes**, par le cercle de centre E d'équation

$$(z - 5)^2 + (x - 8)^2 = 65.$$

1. Seules les racines réelles sont prises en compte.
2. Exposé en page 390 des *Essais*, 464 dans AT VI, et justifié trois pages plus loin.
3. Très proche de celle de la page 392 des *Essais*, 466 dans AT VI.
4. Comme souvent chez Descartes, il est symétrique par rapport à son origine du repère orthonormé habituel à notre époque.

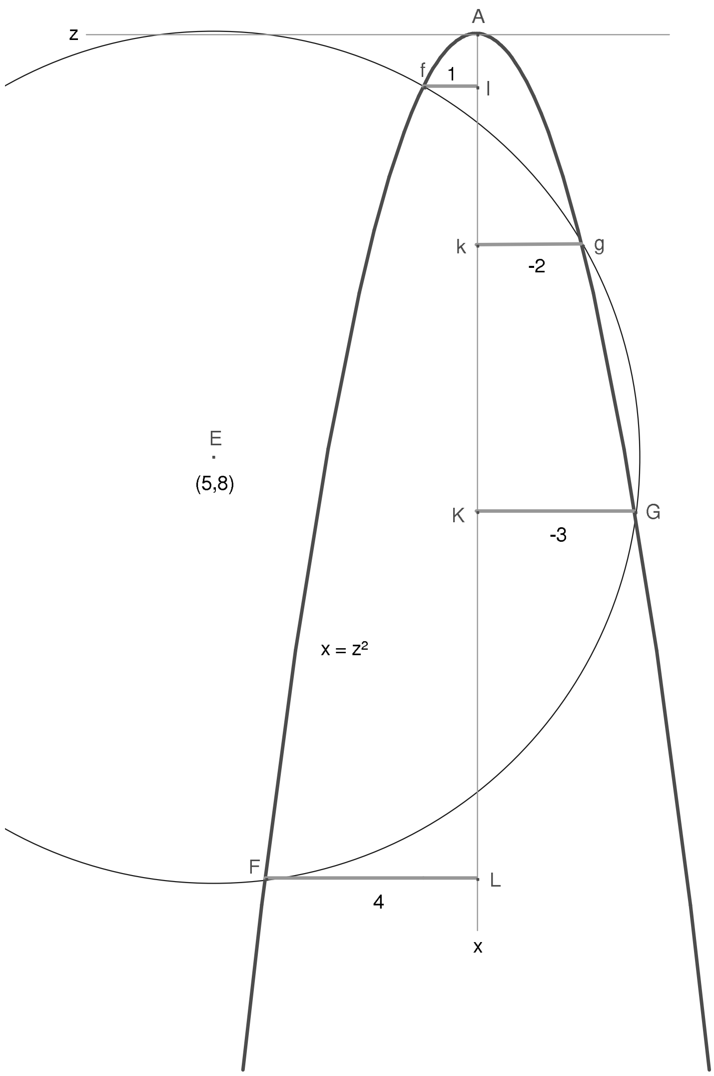


FIGURE 10.1 – *Le cas* $z^4 - 15\,z^2 - 10\,z + 24 = (z-1)\,(z+2)\,(z+3)\,(z-4) = 0$

Les quatre points d'intersection (G, g, f, F) ont pour coordonnées respectives $(-3, 9)$, $(-2, 4)$, $(1, 1)$ et $(2, 4)$[5].

5. On pourrait regrouper les quatre nombres solutions $(-3, -2, 1, 4)$ sur l'axe Az des

Les équations de degré quatre

Le fond de cette résolution graphique de toutes les équations du quatrième degré repose sur la considération des trois égalités suivantes

$$
\begin{array}{ll}
[\,i\,] & z^4 = p\,z^2 + q\,z + r \\
[\,ii\,] & x = z^2 \\
[\,iii\,] & \left(z - \dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(x - \dfrac{p+1}{2}\right)^2 = \dfrac{q^2 + (p+1)^2}{4} + r.
\end{array}
$$

La dernière s'écrivant également sous la forme $x^2 - p\,x - x + z^2 - q\,z = r$, il est évident que, **sous réserve de l'égalité** $[\,ii\,]$ $x = z^2$, les équations $[\,i\,]$ et $[\,iii\,]$ **sont équivalentes**[6].

Traduisons. Si $[\,i\,]$ représente une équation arbitraire du quatrième degré ayant subi l'annulation de son deuxième terme[7], $[\,ii\,]$ peut être lue comme l'appartenance du point de coordonnées (z, x) à $\mathcal{P}$, la parabole usuelle définie par $x = z^2$, et $[\,iii\,]$ comme celle de ce même point à une courbe ayant pour équation celle du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\left(\dfrac{q}{2}, \dfrac{p+1}{2}\right)$ et de rayon $\mathcal{R} = \sqrt{\dfrac{q^2 + (p+1)^2}{4} + r} > 0$, *à condition que l'on ait* $\dfrac{q^2 + (p+1)^2}{4} + r > 0$: sinon nous avons affaire à un point isolé $\{E\}$, voire à l'ensemble vide.

Oubliant un instant cette condition - totalement passée sous silence par Descartes - qui complique un peu le travail, nous pouvons comprendre l'équivalence de $[\,i\,]$ et $[\,iii\,]$ sous la forme géométrique suivante

Le nombre z est racine de l'équation $[\,i\,]$ si, et seulement si, le point de coordonnées (z, z^2) appartient à l'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ et du cercle $\mathcal{C}$.

---

abscisses en projetant orthogonalement sur lui les quatre points précédents, mais Descartes ne le faisant pas, nous l'avons suivi sur ce point. L'axe de symétrie, ici Ax, était alors appelé l'*essieu* de la parabole.

6. Par contre le couple ($[\,i\,]$ et $[\,iii\,]$) n'implique pas nécessairement $x = z^2$, mais seulement ($x = z^2$ ou $x = p + 1 - z^2$).

7. Comme cela a été longuement explicité (après Cardan et Viète) par Descartes dès le début de son Livre Troisième.

Dans la figure qui nous sert d'illustration à sa méthode, $p = 15$, $q = 10$ et $r = -24$, ce qui justifie la construction du cercle connaissant son centre E de coordonnées $(5, 8)$ et de rayon $\sqrt{65}$.

La condition ignorée par Descartes

Reste à reprendre la proposition $\dfrac{q^2 + (p+1)^2}{4} + r > 0$: elle est souvent vérifiée, notamment lorsque $r > 0$, mais ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple $z^4 = z^2 + 6\,z - 11$ où ce nombre vaut -1. Cela signifie que ce polynôme ne possède aucune racine réelle [8], car sinon l'existence d'un tel z impliquerait [9]

$$q^2 + (p+1)^2 + 4\,r = (2z - q)^2 + (2z^2 - p - 1)^2 \geqslant 0.$$

En résumé

- Si l'on a $\dfrac{q^2 + (p+1)^2}{4} + r < 0$, il n'existe pas de cercle $\mathcal{C}$, mais il n'existe pas non plus de racines réelles de l'équation $[\,i\,]$.

- Si l'on a $\dfrac{q^2 + (p+1)^2}{4} + r = 0$, le cercle $\mathcal{C}$ est réduit à son centre E, et l'équation $[\,i\,]$ ne possède généralement pas de racines réelles [10] ou, exceptionnellement, au plus une seule telle racine, nécessairement égale à $s = \dfrac{q}{2}$ et d'ailleurs *double*, à côté de deux racines imaginaires simples $-s \pm \mathbf{i}$ puisqu'alors $p = 2\,s^2 - 1$, $q = 2\,s$ et $r = -\,s^2(s^2+1)$.

- Si l'on a $\dfrac{q^2 + (p+1)^2}{4} + r > 0$, le cercle $\mathcal{C}$ existe ; distinguons selon qu'il coupe la parabole $\mathcal{P}$ en

  a) zéro point (courbes disjointes), auquel cas il n'existe aucune racine réelle $\big($exemples : $z^4 + 2\,z^2 + 1 = (z^2+1)^2$, deux racines imaginaires

8. La réciproque est inexacte, comme le montre l'exemple $z^4 = z^2 + 6\,z - 9$ où ce nombre vaut $+1$, et où le rayon du cercle vaut donc $\sqrt{1} = 1$ bien qu'il n'y ait pas de racines réelles.
9. D'après $[\,iii\,]$.
10. Sauf si $2\,p = q^2 - 2$, auquel cas $16\,r = q^2(q^2+4)$.

doubles, ou $z^4 + 5\,z^2 + 4 = \bigl((z^2+1)\,(z^2+4)\bigr)$ avec quatre racines imaginaires simples [11],

b) un point unique [i] avec exactement une racine réelle, qui est nécessairement double [12], et deux racines, nécessairement simples et non réelles $\bigl($exemple : $z^4 - 7\,z^2 - 4\,z + 20 = (z-2)^2(z^2+4\,z+5)\bigr)$,

c) un point unique [ii] avec exactement une racine réelle, d'ordre quatre et nécessairement nulle [13], et aucune racine non réelle $\bigl($exemple unique : $z^4\bigr)$,

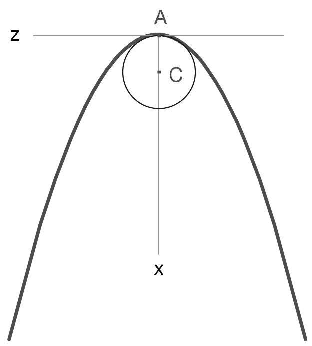


FIGURE 10.2 – *Le cas où cercle et parabole sont surosculateurs au sommet*

d) deux points distincts [i] avec exactement deux racines réelles, toutes simples [14] et deux racines, nécessairement simples et non réelles $\bigl($exemple : $z^4 - 1 = (z-1)\,(z+1)\,(z^2+1)\bigr)$,

e) deux points distincts [ii] avec exactement deux racines réelles, toutes deux doubles [15], nécessairement opposées, et aucune racine non réelle $\bigl($exemple : $z^4 - 2\,z^2 + 1 = (z-1)^2\,(z+1)^2\bigr)$ [16],

11. Le cas d'une seule racine imaginaire double et non réelle ne peut se rencontrer.

12. Dans le langage cartésien, les deux courbes *se touchent* en cet unique point commun.

13. Dans le langage cartésien, les deux courbes se touchent en ce point. Le cercle est dit *surosculateur* à la parabole en son sommet.

14. Dans le langage cartésien, les deux courbes *se coupent* en ces deux points.

15. Dans le langage cartésien, les deux courbes se touchent en chacun de ces deux points. Le cercle est dit *bitangent* à la parabole.

16. Ce cas a visiblement servi de matrice pour la méthode cartésienne de détermination des normales à une courbe (ici une parabole).

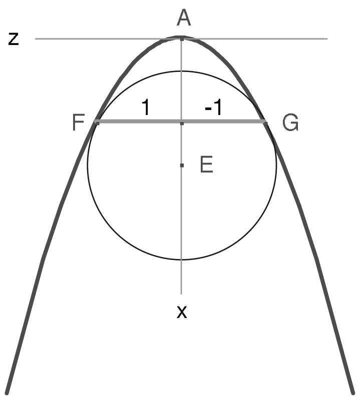


FIGURE 10.3 – *Un cas où cercle et parabole sont bitangents*

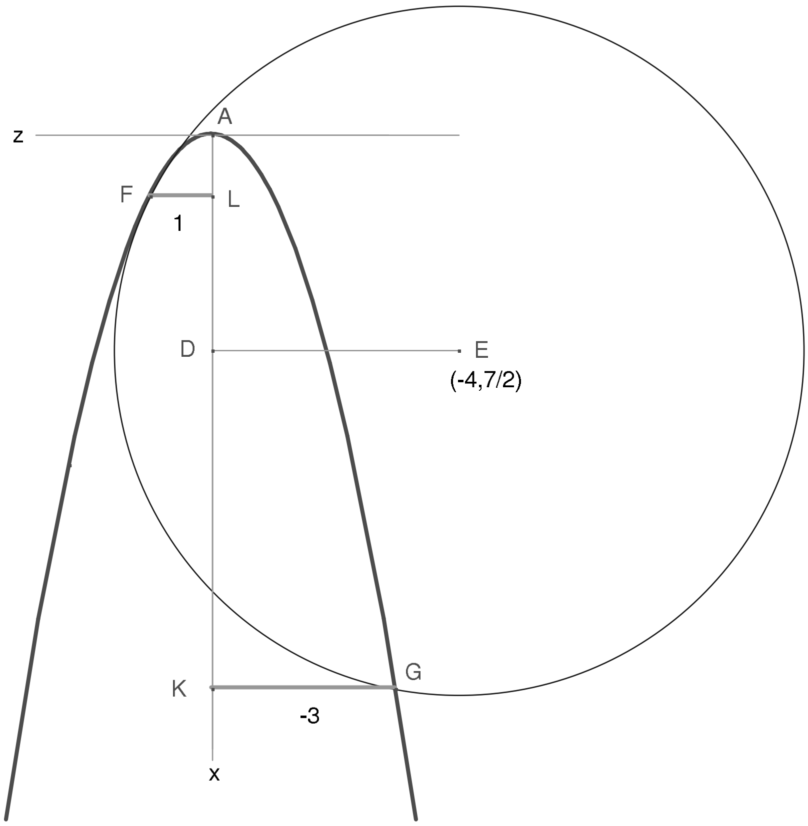


FIGURE 10.4 – *Un cas de cercle osculateur à la parabole*

f) deux points distincts [iii] avec exactement deux racines réelles, l'une étant triple et l'autre simple [17] et aucune racine non réelle (exemple : $z^4 - 6\,z^2 + 8\,z - 3 = (z-1)^3\,(z+3)\big)$,

g) trois points deux à deux distincts, auquel cas il y a exactement trois racines réelles, l'une double [18] et les deux autres simples (exemple : $z^4 - 9\,z^2 + 4\,z + 12 = (z-2)^2(z+1)\,(z+3)\big)$,

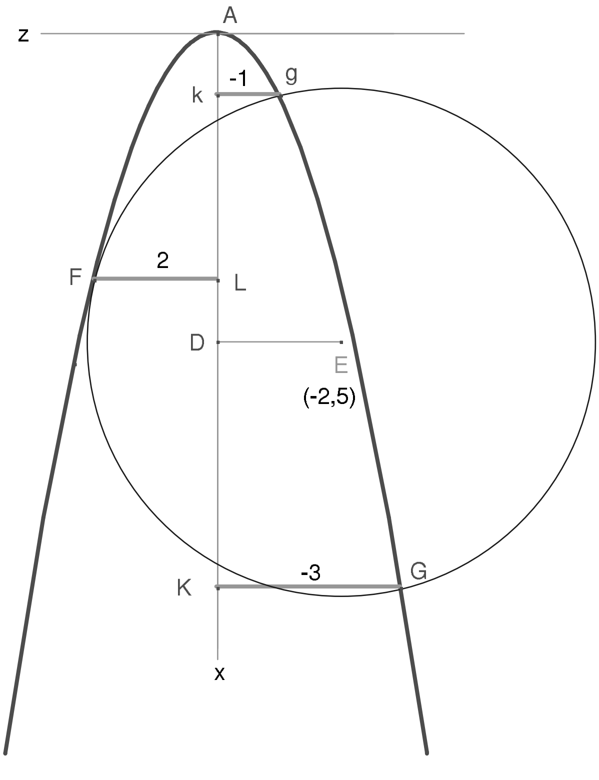


FIGURE 10.5 – *L'équation* $z^4 - 9\,z^2 + 4\,z + 12 = (z-2)^2(z+1)\,(z+3) = 0$

17. Le cercle est *osculateur* à la parabole en le premier de ces deux points. Si Descartes, fidèle à son principe de lister soigneusement tous les cas qui se peuvent rencontrer, avait remarqué cette possibilité, il n'aurait pas laissé à Newton la gloire d'inventer la courbure des courbes planes.

18. Il y a ici un point où les deux courbes se touchent, et deux où elles se coupent.

h) quatre points deux à deux distincts, auquel cas il y a exactement quatre racines réelles, toutes simples $\big($exemple déjà utilisé pour la figure 1 : $z^4 - 15\,z^2 - 10\,z + 24 = (z-1)\,(z+2)\,(z+3)\,(z-4)\big)$.

Le texte cartésien

Descartes introduit [19] comme nous l'équation $z^4 = p\,z^2 + q\,z + r$, écrite sous la forme $z^4 = *.apzz.aaqz.a^3r$, où les points signifient $\pm$ et où a, constante d'homogénéité, est tout de suite rendue égale à 1. Il ne liste pas explicitement tous les cas possibles (et oublie même, comme nous l'avons signalé, d'indiquer que le cercle peut ne pas exister) [20]. Il se contente de nous donner deux figures, l'une pages 390 et 394 des *Essais*, avec deux racines simples réelles, et l'autre page 392 avec quatre racines simples réelles (respectivement 465, 467 et 466 dans AT VI), correspondant donc aux cas d) et h) seulement. Sur ces figures, il indique des constructions géométriques du point E, centre du cercle, et d'un point de ce cercle, noté selon le cas H ou I, en fonction des quatre longueurs $a = 1$, $|p|$, $|q|$ et $|r|$ qui sont représentées au dessus du dessin [21].

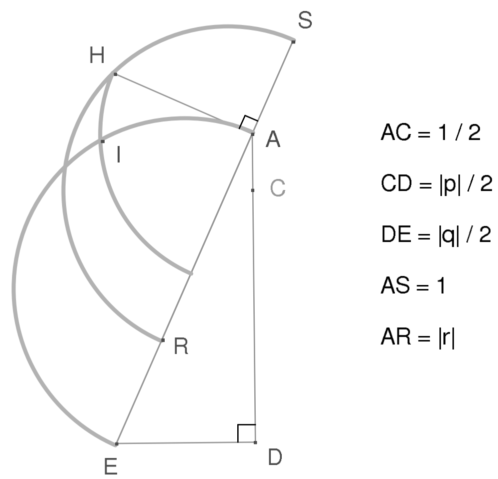


FIGURE 10.6 – *La construction cartésienne du cercle auxiliaire*

19. Page 390 des *Essais*, 464 dans AT VI.
20. Il écrit simplement « *Ce cercle* FG *peut coupper, ou toucher la Parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 points* »(page 393 des *Essais*, 467 dans AT VI).
21. En tout cas en ce qui concerne la première.

Il utilise au moins sept points : A, C tel que $AC = 1/2$, D tel que $CD = |p|/2$ porté dans le sens de A vers C si $p > 0$ et inversement sinon, E tel que $DE = |q|/2$ avec une convention analogue, S sur AE tel que $AS = a = 1$ extérieur au segment AE, R aussi sur AE tel que $AR = |r|$ dans le sens opposé, et enfin H tel que $AH = \sqrt{AS \cdot AR} = \sqrt{1.|r|}$.

Si $r > 0$, cela lui suffit et le cercle cherché passe par H. Sinon, il introduit un huitième point I sur le cercle de diamètre AE tel que $AI = AH$, et dans ce cas le cercle passe par I.

Voici ses justifications [22], basées sur les triangles rectangles SHR et EIA

$$\mathcal{R}^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + r = AE^2 + r,$$

$$AI^2 = AH^2 = AS \cdot AR = |r|, \qquad EH^2 = EA^2 + |r|, \qquad EI^2 = EA^2 - |r|$$

et la conclusion selon le signe de r.

La présence du point C (que l'on retrouvera d'ailleurs dans la preuve du *Tertius casus* de la *Propositio demonstrata* à laquelle est consacré un chapitre de cette étude) est secondaire : elle sert simplement à construire l'ordonnée $\dfrac{p+1}{2}$ de E en ajoutant (ou retranchant, suivant son signe) $\dfrac{p}{2}$ à la longueur $AC = \dfrac{1}{2} \cdot$ Cette dernière longueur est la moitié du *latus rectum* égal à 1 dans le cas d'une parabole d'équation $z^2 = x$.

Un peu plus généralement, $z^2 = 2p\,x$ (en notation moderne) donne un latus rectum égal à $2p$ où p est notre paramètre [23], et le foyer de la parabole a pour abscisse $x = \dfrac{p}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{4}$ dans ce cas.

Par suite, *C n'est pas le foyer de la parabole* [24], contrairement à ce qu'a pensé Jules Vuillemin à la page 172 de la Note XI de son livre *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* (PUF, Paris, 1960, 1987, 2000) [25] ; il n'y a pas à ajouter une longueur $CC' = \dfrac{1}{4}$ car son C' est le vrai C de Descartes.

22. Comme d'habitude, une simple vérification sans aucune trace d'analyse.
23. À ne pas confondre avec le coefficient de z^2 dans l'équation.
24. Ce point est toutefois intéressant pour lui-même : c'est le point de rebroussement de la parabole semi-cubique qui sert de développée à la parabole.
25. Voir également la note (1) page 134, avec la même erreur sur le *latus rectum*.

À noter une autre faute d'inattention, due à Descartes cette fois-ci : en page 391 des *Essais* (465 dans AT VI), il écrit « *du point* C *il faut élever une ligne à angles droits jusques a* E, *en sorte qu'elle soit égale à* $\frac{1}{2}\,q$ ». Il ne dit pas dans quelle direction effectuer cette construction mais, surtout, considère ici implicitement le nombre q comme positif ou nul[26].

Les équations de degré trois

La construction graphique des solutions réelles des équations du troisième degré est un problème très ancien, par exemple déjà résolu à l'aide de l'intersection de deux coniques par Ménechme, inventeur des coniques, dans le cas particulier de $x^3 = 2$ à l'aide d'une parabole $y = x^2$ et d'une hyperbole[27] $y = \frac{2}{x}$, puis dans le cas général par Omar al-Khayyam (1048-1131) dans son *Traité sur la démonstration des théorèmes en algèbre*. Il intéressait déjà Descartes en 1619, comme le prouve sa lettre du 26 mars à Isaac Beeckman (page 155 dans AT X), où on peut lire l'idée d'appareils permettant la construction de racines au moins cubiques (première apparition de l'idée des fameux compas).

La construction d'une racine cubique

L'idée centrale de Descartes pour ramener la résolution de ces équations de la forme $z^3 = p\,z + q$, forme sans terme en z^2 comme le chapitre précédent nous a appris à le faire, est immédiate de simplicité : **il ajoute une racine nulle supplémentaire**, et est ainsi ramené à une équation de degré quatre

$$z^4 = p\,z^2 + q\,z$$

dont il n'a plus qu'à ôter ensuite la racine nulle ajoutée au départ. C'est ainsi que $z^3 = 8$ est remplacée par $z^4 = 8\,z$, comme on le voit ci-dessous.

26. On doit cependant signaler que deux pages plus loin il ajoute « *si la quantité* q *est marquée du signe* + », ce qui montre qu'il n'a commis qu'un *lapsus calami*.
27. On peut aussi utiliser deux paraboles : $y = x^2$ et $y^2 = 2\,x$.

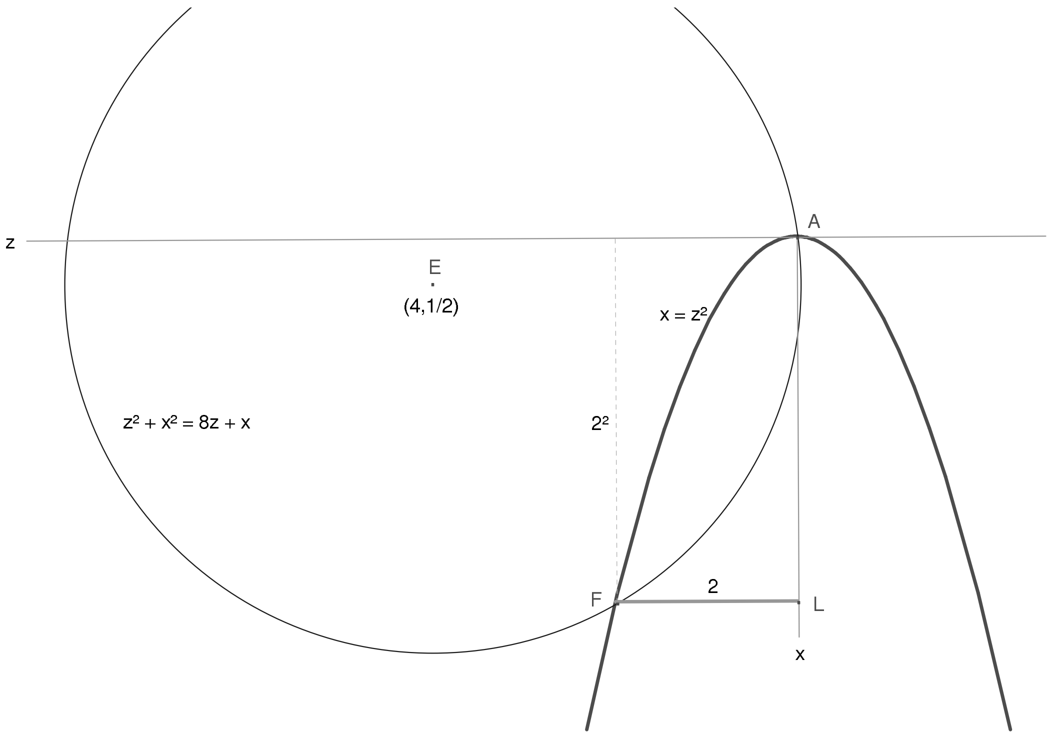


Figure 10.7 – *La construction cartésienne de la racine cubique de 8*

Il s'agit ici de la construction de deux moyennes proportionnelles, à savoir z et z^2, insérées entre 1 et $z^3 = 8$. Le résultat est bien entendu général et s'étend à toutes les racines cubiques.

La trisection d'un angle

Au cinquième siècle avant Jésus-Christ, trois Grecs semblent avoir joué un rôle précurseur dans l'étude des problèmes d'ajustement connus sous le nom de de *neusis* et de *trisection d'angle*[28] : Oenopides (490-430) et Hippocrate[29]

28. Les documents de l'époque sont inexistants aujourd'hui, et certains renseignements ne nous sont parvenus que par des commentaires très tardifs. Les dates indiquées sont très approximatives. Voir Jean Aymes, brochure 70 publiée par l'A.P.M.E.P. en 1988.

29. À ne pas confondre avec l'un de ses homonymes, égéen, compatriote et contemporain (460-356), médecin mythifié encore évoqué aujourd'hui pour son fameux serment.

(470-410), tous deux de l'île de Chios, réfléchirent sur les légitimités respectives des constructions de neusis[30], et de l'emploi exclusif de la règle et du compas. Il est tout à fait possible que le second[31] ait fait la liaison entre une telle neusis et la trisection de l'angle[32]. Auquel cas, il aurait été à l'origine de la figure de gauche ci-dessous. Le troisième mathématicien de cette époque est Hippias d'Elis, qui inventa sa célèbre *quadratrice*, bien connue de Descartes pour qui elle est le modèle des *courbes mécaniques*, justement pour résoudre le problème plus général de la n-section d'un angle.

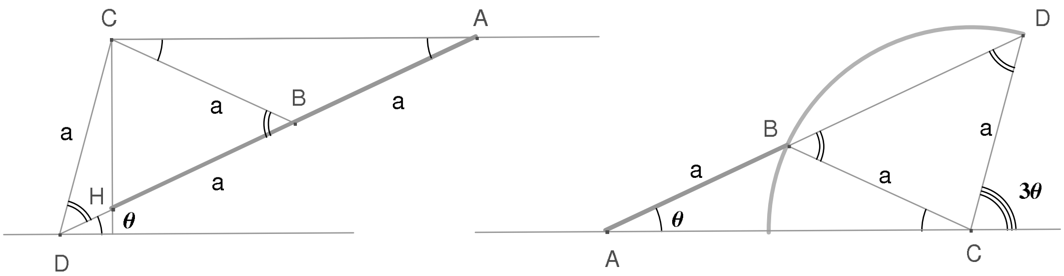


FIGURE 10.8 – *Trisection de l'angle et neusis vues par Nicomède et Archimède*

La figure ci-dessus représente deux solutions différentes de la trisection de l'angle. La première est due à Nicomède[33] (280-210), qui inventa sa *conchoïde*[34] pour réaliser sa neusis en insérant un segment HA de longueur double de celle de DC, dont le support passe par D et les extrémités décrivent respectivement deux demi-droites perpendiculaires d'origines C[35].

La seconde est due à son exact contemporain Archimède (287-212), où la longueur du segment BA vaut encore celle de DC, dont le support passe

30. Inclinaisons, insertions de certains segments de longueur donnés entre deux courbes.

31. Voir Sir Thomas Little Heath, dans le premier volume de *A History of Greek Mathematics* à la page 235, et dans le second 379 (pour la conchoïde) et 385 (pour la trisection).

32. Un angle étant donné, construire - avec des neusis ou la règle et le compas - un angle dont la mesure est le tiers de la sienne : par exemple construire un angle de vingt degrés sexagésimaux, tiers de l'un des angles d'un triangle équilatéral.

33. Et peut-être à Hippocrate, comme signalé plus haut.

34. À la page 148 de ses *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Jules Vuillemin, voulant en connaître l'équation, prend maladroitement comme point courant un point très particulier de cette courbe dont nous avons déjà longuement étudié les normales.

35. Nous sommes donc ici devant une question analogue à celle du second problème de Pappus, étudié par Descartes au début du Livre Troisième.

toujours par D et les extrémités décrivent respectivement le cercle de centre C passant par B et l'un de ses diamètres.

Dans les deux cas, l'angle à diviser en trois parties égales est le supplémentaire de $\widehat{DCA}$; l'une des solutions est $\theta = \widehat{BAC}$, noté d'une seule marque[36]. On remarquera que, bien que les deux techniques soient très différentes en apparence, en fait elles reposent sur les mêmes théorèmes[37] appliqués aux deux triangles isocèles et homonymes ABC et BCD.

Comme nous allons le voir, Descartes comme Viète, rompus à ce genre de spéculations, remplaceront la recherche d'une telle construction par l'établissement d'une équation du troisième degré déterminant l'une des lignes trigonométriques de θ en fonction de celles de 3θ. Mais si Viète se tournera ensuite vers *une recherche d'une valeur approchée d'une racine* de l'équation obtenue, Descartes pour sa part en fournira une solution graphique basée sur les *intersections d'une parabole avec des cercles.* À quelques années de distance, tous deux révolutionneront donc de manière analogue, mais quand même bien personnelle, ce problème alors vieux de vingt siècles.

L'équation de la trisection vue par Viète

À la page 174 de la traduction Witmer du Théorème III du chapitre VI du second traité de 1615 *De Aequationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*, nous lisons - sans figure ni démonstration - l'équation

$$A^3 - 3\,B^2A = B^2D \qquad (3\,B^2E - E^3 = B^2D \quad \text{si} \quad E = -A > 0)$$

où, comme d'habitude chez Viète, A (voire E) est (sont) inconnu(s) et (B, D) sont des constantes supposées connues. Il ajoute que B doit être supérieur à la moitié[38] de D. Le lien avec la trisection est parfaitement obscur : il faut le dénouer patiemment.

La formule centrale sur laquelle tout repose s'écrit

$$\cos 3\theta = 4\,\cos^3\theta - 3\,\cos\theta.$$

36. Bien entendu une marque double ou triple indique un angle de mesure double ou triple.

37. Les angles à la base d'un triangle isocèle ont même mesure, et la somme des mesures des angles d'un triangle vaut π.

38. En fait, il s'agit de leurs valeurs absolues.

En effet, il suffit de poser $A = 2\,B\,\cos\theta$ et $D = 2\,B\,\cos 3\theta$ pour vérifier les relations ci-dessus, à savoir $A^3 - 3\,B^2 A = B^2 D$ et $|D| \leqslant 2\,|B|$. Viète la démontre pour θ compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{6}$ dans les pages 403-304 de la traduction Witmer de la Proposition XVI du *Supplementum Geometriæ*[39] de 1593.

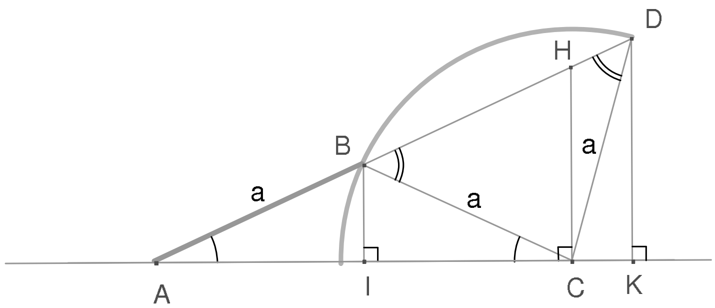


FIGURE 10.9 – *Première mise en équation de la trisection par Viète*

Voici la preuve de Viète. Les égalités de départ $AB = BC = CD = a$ s'enrichissent de la relation $BH = a$ puisque B est le milieu de l'hypoténuse AH du triangle rectangle ACH. Par suite, en utilisant le théorème dit de Thalès et surtout la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle[40], on peut écrire

$$\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{CK}{CI} = \frac{HD}{HB} = \frac{HB\cdot HD}{a^2}$$
$$= \frac{a^2 - HC^2}{a^2} = \frac{a^2 - 4\,BI^2}{a^2} = \frac{4\,IC^2 - 3\,a^2}{a^2} = 4\,\cos^2\theta - 3$$

ce qu'il fallait prouver. Comme appui de sa démonstration, il nous livre page 405 une figure où l'on peut lire que, si $\theta = \dfrac{\pi}{9}$ (20 degrés sexagésimaux), alors $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\cos\theta = \dfrac{93\,969\,262}{100\,000\,000}$, valeur visiblement approchée[41]. L'équation associée, dite d'*al-Biruni*, est ici $x^3 - 3\,x = 2\,\cos 3\,\dfrac{\pi}{9} = 1$ avec $x = 2\,\cos\dfrac{\pi}{9}\cdot$

39. Une extension au cas où θ est compris entre $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{3}$ se trouve deux pages plus loin.

40. C'est là un léger raccourci par rapport au texte, mais qui ne le trahit en aucun cas car elle remonte au moins à Euclide.

41. Mais d'excellente qualité puisqu'en fait $\cos\theta = 0,9396926207859\ldots$

Revenons aux pages 173 et 174 où il donne deux exemples numériques : d'abord

$$0 = x^3 - 21\,x + 20 = (x-1)\,(x-4)\,(x+5),$$

que nous pouvons désormais traduire [42] par la proposition : si $\cos\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$, alors $\cos 3\theta = -\dfrac{10}{7\sqrt{7}}$, puis un autre, plus complexe,

$$0 = x^3 - 300\,x - 432 = (x-18)\,(x^2+18\,x+24) = (x-18)\,(x+9-\sqrt{57})\,(x+9+\sqrt{57}),$$

signifiant : si $\cos\theta = \dfrac{9}{10}$, alors $\cos 3\theta = \dfrac{27}{125}\cdot$

Il est intéressant de noter que Viète disposait d'une autre démonstration justifiant la forme de son équation sur la trisection de l'angle, que voici.

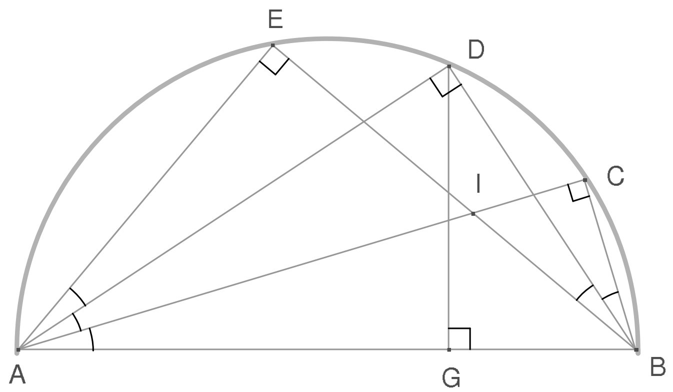


FIGURE 10.10 – *Seconde mise en équation de la trisection par Viète*

Nous empruntons cette figure [43] à la page 419 de la traduction Witmer des théorèmes I et II du texte *Ad angularium Sectionum Analyticen Theoremata*

42. En posant par exemple $A = 1$, $B = \sqrt{7}$ et $D = -\dfrac{20}{7}$, mais aussi si l'on veut $A = 4$ ou bien $A = -5$ sans changer $\cos 3\theta$, avec $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$ ou $-\dfrac{5}{2\sqrt{7}}\cdot$

43. Corrigée d'une erreur fortuite qui aligne, faussement dans le cas général, D, I et G.

de 1615, rédigé par Alexander Anderson (*ca.* 1582-1620) d'après les manuscrits retrouvés à la mort de Viète (1603). La formule qu'il doit (re)démontrer est encore

$$\cos 3\theta = 4\,\cos^3\theta - 3\,\cos\theta.$$

Elle va résulter, par combinaison linéaire évidente, des deux égalités

$$\sin\theta = \cos 2\theta\,\sin 3\theta - \sin 2\theta\,\cos 3\theta, \qquad \cos\theta = \cos 2\,\theta\,\cos 3\theta + \sin 2\theta\,\sin 3\theta$$

qui font l'objet des deux théorèmes cités [44]. En voici des preuves largement clarifiées, mais tout à fait fidèles à l'esprit de Viète et de son exécuteur testamentaire écossais.

Nous supposerons ici encore θ inférieur à $\dfrac{\pi}{6}\cdot$

a) (théorème I) Les trois triangles semblables BCI, ADB et AEI impliquent les égalités

$$AB \cdot BC = AD \cdot BI = AD \cdot (BE - IE) = AD \cdot BE - BD \cdot AE$$

ce qu'il fallait démontrer.

b) (idem) Si l'on ajoute à la liste précédente les triangles AGD et DGB, on peut écrire de manière analogue

$$\begin{aligned} AB \cdot AC &= AB \cdot (AI + IC) = (AG + GB) \cdot AI + AB \cdot IC \\ &= AD \cdot AE + DB \cdot EI + BD \cdot BI = AD \cdot AE + BD \cdot BE. \end{aligned}$$

c) (théorème II) La combinaison linéaire annoncée est

$$\begin{aligned} AB \cdot (AD \cdot AC - BD \cdot BC) &= AD \cdot (AD \cdot AE + BD \cdot BE) - BD \cdot (AD \cdot BE - BD \cdot A \\ &= (AD^2 + BD^2) \cdot AE = AB^2 \cdot AE \end{aligned}$$

d'où la formule

$$\cos 3\theta = \cos\theta\,\cos 2\theta - \sin\theta\,\sin 2\theta$$

et enfin l'équation recherchée [45].

44. Il faut également connaître les égalités classiques de duplication donnant $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$, d'ailleurs évidentes sur la figure (au prix du changement de θ en $2\,\theta$) puisqu'équivalentes aux relations $2\,\dfrac{DG}{AB} = 2\,\dfrac{DG}{AD}\,\dfrac{AD}{AB}$ et $AD^2 = AB \cdot AG$. Ces formules étaient connues avant l'an 1000 comme on peut le voir chez l'iranien Abu'l Wafa (940-998). Les formules générales d'addition, d'où tout cela découle aussitôt, figurent implicitement chez Hipparque, Ptolémée, Pappus (V, prop. 21) et plus visiblement chez Abu'l Wafa.

45. On trouve cette égalité au haut de la page 422, alors que son analogue pour $\sin 3\theta$

Comment Descartes se réfère à Viète

La question des relations entre Descartes et son aîné Viète, dont l'influence sur la montée en puissance de l'algèbre est indéniable, est intéressante à examiner un peu en détail. La comparaison entre les attitudes des deux hommes au sujet de la résolution des équations du troisième degré, et en particulier l'étude de la trisection de l'angle, est une bonne pierre de touche de leur distance. Mais lisons d'abord quelques extraits de la *Correspondance* où Viète est nettement cité

« *Et tant s'en faut que les choses que j'ai écrites puissent être aisément tirées de Viète, qu'au contraire, ce qui est cause que mon traité est difficile à entendre, c'est que j'ai tâché à n'y rien mettre que ce que j'ai cru n'avoir point été su ni par lui, ni par aucun autre. Comme on peut voir, si on confère ce que j'ai écrit du nombre des racines qui sont en chaque équation dans la page 372, qui est l'endroit où je commence à donner les règles de mon algèbre, avec ce que Viète en a écrit tout à la fin de son livre* De emendatione æquationum ; *car on verra que je le détermine généralement en toutes équations, au lieu que lui n'en ayant donné que quelques exemples particuliers, dont il fait toutefois si grand état qu'il a voulu conclure son livre par là, il a montré qu'il ne le pouvait déterminer en général. Et ainsi j'ai commencé où il avait achevé ; ce que j'ai fait toutefois sans y penser, car j'ai plus feuilleté Viète depuis que j'ai reçu votre dernière, que je n'avais jamais fait auparavant, l'ayant trouvé ici par hasard entre les mains d'un de mes amis ; et entre nous je ne trouve pas qu'il en ait tant su que je pensais, nonobstant qu'il fût fort habile.* [46] »

« *Au reste, permettez-moi que je vous demande comment vous gouvernez ma Géométrie ; je crains bien que la difficulté des calculs ne vous en dégoûte d'abord, mais il ne faut que peu de jours pour la surmonter, et par après on les trouve beaucoup plus courts et plus commodes que ceux de Viète.* [47] »

---

figure au bas de la page précédente. Viète (Anderson ?) ajoute *in fine* une remarque numérique qui semble revenir à dire que, si $\tan\theta = \dfrac{1}{7}$ et $\tan 2\theta = \dfrac{1}{3}$, alors $\tan 3\theta = \dfrac{1}{2}$, ce qui est exact. Cela dit, les deux premières égalités sont incompatibles, car la première implique $\tan 2\theta = \dfrac{7}{24} \neq \dfrac{8}{24}$!

46. Descartes à Mersenne, fin décembre 1637, lettre XCVII page 479 de AT I.

47. Descartes à Mydorge, 1er mars 1638, lettre CXL page 22 de AT II.

« *J'ai reçu vos 2 lettres du 12 et du 22 mars toutes deux en même temps, en quoi j'admire que la dernière soit venue si vite ; car je n'en avais jamais reçu aucune de si fraîche date. Pour l'accusation du Géostaticien, que je ne donne rien des équations que Viète n'ait donné plus doctement, nego majorem ; car, comme je crois vous avoir déjà remarqué quelque autre fois, je commence en cela par où Viète avait fini. Et pour ce qu'il dit, que je ne suis pas excusable de n'avoir pas lu Viète, il aurait raison, si j'avais ignoré pour cela quelque chose qui soit dans Viète ; mais c'est ce que je ne crois pas qu'il m'enseigne par cette belle analyse qu'il a autrefois fait imprimer.* [48] »

« *Je n'ai aucune connaissance de ce géomètre dont vous m'écrivez, et je m'étonne de ce qu'il dit, que nous avons étudié ensemble Viète à Paris ; car c'est un livre dont je ne me souviens pas avoir seulement jamais vu la couverture, pendant que j'ai été en France.* [49] »

Le deuxième texte est parfaitement exact : si *La Géométrie* est dure à déchiffrer, se plonger dans Viète est encore bien plus ardu ! De ces quatre extraits, c'est le dernier qui est le plus souvent cité. Le confronter aux autres, en particulier au premier, montre qu'il faut donc le prendre avec précautions : que ce soit à Paris ou en Hollande, Descartes a bien lu, plume à la main, une bonne part des écrits (très dispersés) de Viète [50]. Mais, comme nous le montrons ci-dessous par quelques exemples, il a toujours pris très grand soin de trouver des méthodes suffisamment distinctes de celles de son prédécesseur pour pouvoir se trouver libre de ne jamais le citer dans ses traités, d'où sa formule trop orgueilleuse « *j'ai commencé où il avait achevé* » s'en trouve partiellement excusable.

Commençons une trop brève comparaison des attitudes des deux mathématiciens par l'examen de leurs introductions parallèles des notations littérales qui ont permis l'essor de l'algèbre

- Dans la cinquième règle du chapitre V (*Des lois Zététiques*) de son *Isagoge in Artem Analyticem* (Introduction à l'Art Analytique) [51], Viète écrit

48. Descartes à Mersenne, 31 mars 1638, lettre CXIX page 82 de AT II.
49. Descartes à Mersenne, 20 février 1639, lettre CLVII page 523 de AT II.
50. Mort lorsqu'il n'avait lui-même que sept ans. Voir par exemple une allusion très parlante (le célèbre *nullum non problema solvere* qui clôt l'*Isagoge*) dans la lettre XLII du 3 mai 1632 à Mersenne (AT I, page 244).
51. Page 237 de la traduction - française - de Fréderic Ritter dans le *Bullettino di*

« *Afin que cette méthode soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre* A *ou par toute autre voyelle* E, I, O, V, Y, *et les grandeurs données par les lettres* B, G, D *ou par d'autres consonnes*[52]. »

- Dans sa *Géométrie*, Descartes ne proclame pas de recommandations analogues, mais utilise systématiquement une technique semblable mais bien distincte, à savoir le début de l'alphabet pour le connu, et la fin pour l'inconnu, convention toujours en vigueur aujourd'hui dans le monde entier[53].

Voici leurs versions du passage du quatrième degré au troisième

- À la page 267 de la traduction Witmer[54] Viète rappelle la méthode de Ferrari (sans citer son nom).

- Descartes invente sa propre méthode[55], ce qui lui permet de ne se référer qu'à Cardan (et del Ferro).

Venons-en maintenant à la *trisection de l'angle*. À la différence des Grecs, Viète et Descartes ne cherchent plus à la résoudre grâce à des tentatives de *neusis* par l'intermédiaires d'outils plus ou moins astucieux, mais commencent tous deux par traduire le problème en termes d'équations, remplaçant avantageusement les montages mécanistes, et déterminées par chacun d'eux en suivant des voies bien distinctes

- Pour déterminer les lignes trigonométriques d'un angle de vingt degrés sexagésimaux par exemple, Viète établit à partir d'une figure très classique de *neusis* une équation donnant $2\cos\theta$ (environ $1,88$) d'après la connaissance de $2\cos 3\theta = 1$, à savoir $x^3 - 3x - 1 = 0$. La base de son calcul est, comme on sait, la formule $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Bibliographa e di Storia delle Scienze Mathematiche e Fisiche (Rome) de 1868, et page 24 de la traduction - anglaise - de Witmer.

52. *Sic.* On notera également l'emploi, alors classique, de V pour U.

53. Voir sur ce point la Règle XVI des *Regulæ*.

54. Problème I du Chapitre VI de son second Traité des Équations.

55. Comme nous l'avons déjà supposé, ce travail est d'ailleurs peut-être antérieur à sa connaissance de l'*Ars Magna*.

- Pour déterminer les lignes trigonométriques d'un angle de vingt degrés sexagésimaux par exemple, Descartes établit à partir d'une figure originale une équation donnant $2\,\sin\theta$ (environ $0,68$) d'après la connaissance de $2\,\sin 3\theta = \sqrt{3}$, à savoir $x^3 - 3\,x + \sqrt{3} = 0$. La base de son calcul est, comme on le verra, la formule $\sin 3\theta = 3\,\sin\theta - 4\,\sin^3\theta$.

Une fois obtenues ces équations, dont la seconde ne fait plus du tout référence à une quelconque *neusis*, les deux hommes diffèrent également de manière très intéressante dans ce qu'ils entendent par l'expression « résoudre » ces équations

- Viète recherche des valeurs approchées décimales des racines de ses équations [56].

- Descartes recherche des segments ayant pour longueurs les valeurs des racines de ses équations.

Le cadet montre ainsi combien il entend se démarquer nettement du travail de son aîné, même s'il ne s'en écarte pas aussi fondamentalement qu'il aimerait nous le faire croire.

L'équation de la trisection vue par Descartes

À la page 396 des *Essais* (470 de AT VI), nous lisons l'équation

$$z^3 = 3\,z - q \quad \text{avec} \quad NO = 1, \quad NP = q \quad \text{et} \quad NQ = z$$

où z est inconnu et q est une constante supposée connue. Sans qu'il le dise, l'angle connu de mesure 3θ est la moitié de $\widehat{NOP}$, et donc l'angle recherché est inférieur à $\dfrac{\pi}{6}\cdot$ Le lien avec la trisection est, ici, parfaitement clair.

56. Après lui, Newton donnera des algorithmes de telles résolutions, avec un exemple emprunté à l'équation du troisième degré $y^3 - 2\,y - 5 = 0$ et la solution $y = 2,094551\ldots$ comme le montre la page 7 de la traduction par Buffon de sa *Méthodes des Fluxions*.

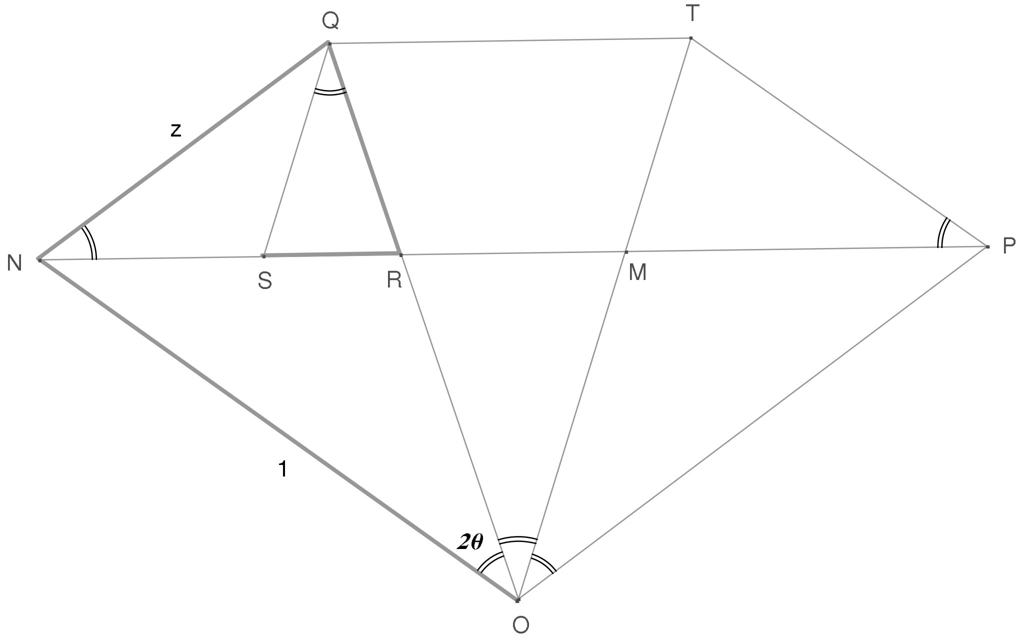


FIGURE 10.11 – *Mise en équation de la trisection par Descartes*

Voici la preuve de Descartes. Elle repose sur une élégante figure qui lui est propre, où l'on peut remarquer jusqu'à sept triangles isocèles deux à deux semblables [57], à savoir RQS, QNR, NOQ, QOT, TOP, MPT et MRO, tous de même angle au sommet [58] de mesure 2θ.

Ces similitudes impliquent les égalités

$$QR = QN\,\frac{NQ}{NO} = z^2, \qquad SR = QR\,\frac{QN}{ON} = z^3$$

puis enfin [59]

$$2\,\sin 3\theta = NP = NR + RM + MP = 2\,NQ + RM$$

57. Ici la notion de triangles homothétiques est insuffisante, et il faut recourir à son extension aux figures semblables, ce qui est assez rare dans *La Géométrie*.

58. Cela résulte des propriétés usuelles concernant angles inscrits et angles au centre et du parallélisme de QS et TO.

59. On notera la présence, dans cette démonstration, la présence d'une séquence $(1, z, z^2, z^3)$ impliquant l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre les deux longueurs NO et SR. Une telle séquence est également présente, comme on l'a vu ci-dessus page 491, dans la construction cartésienne d'une racine cubique.

$$= 2\,NQ + QT - SR = 3\,NQ - SR = 3\,z - z^3.$$

La figure ci-dessous montre la construction cartésienne [60] des doubles des sinus des tiers d'un angle [61] de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, à savoir

$$fl = 2\,\sin\frac{\pi}{9}, \quad FL = 2\,\sin\frac{7\pi}{9}, \quad GK = 2\,\sin\frac{13\pi}{9}$$

à partir de l'équation $x^3 - 3\,x + \sqrt{3} = 0$.

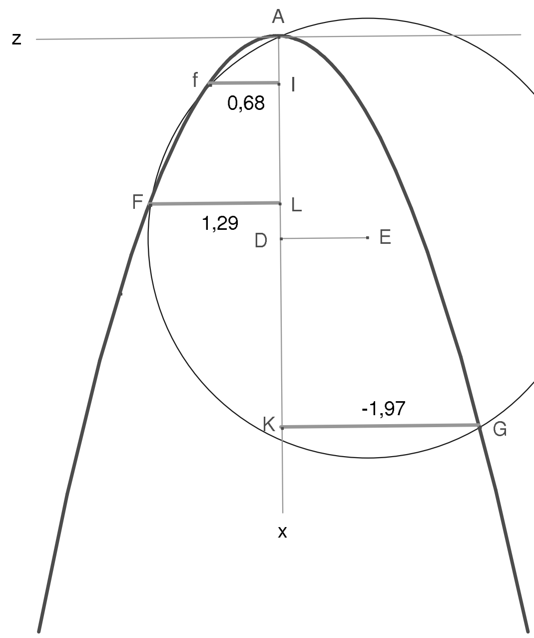


FIGURE 10.12 – *La trisection cartésienne d'un angle de soixante degrés*

D'une manière plus générale, le signe du produit des trois racines d'une équation de la forme $x^3 - 3\,x - q = 0$ montre qu'il y a toujours un point d'intersection du même côté que E par rapport à l'axe Ax (l'essieu) et deux autres en face.

60. Absente de *La Géométrie* mais reconstituée à des fins pédagogiques. Le centre E du cercle a pour coordonnées $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$.

61. Comme les angles de tout triangle équilatéral.

Ramener l'équation générale à deux cas particuliers

Revenons sur la comparaison Viète-Descartes sur un point essentiel de leurs œuvres respectives : le fait que **toute résolution d'une équation du troisième degré peut être ramenée, soit à une trisection d'un angle, soit au calcul d'une racine cubique**.

- La Proposition XXV (*Un corollaire général*) qui clôt[62] le *Supplementum Geometriæ* de Viète (Tours, 1593) affirme que toutes les équations cubiques « *peuvent être résolues en construisant deux moyennes proportionnelles entre des termes donnés*[63] *ou en divisant un angle donné en trois parts égales* ». Elle renvoie pour cela aux deux traités *De Aequationum Recognitione et Emandatione* déjà longuement évoqués.

  Chez Viète, nous pouvons ramener toute équation de ce type à la forme[64]

  $$A^3 - 3\,BA = BD.$$

  a) Commençons par le cas[65] déjà évoqué en page 493 : ici, par hypothèse[66], nous supposons $D^2 \leqslant 4\,B$.

     Il est alors possible d'introduire un angle θ tel que

     $$\cos 3\theta = \frac{D}{2\sqrt{B}}\cdot$$

     L'équation en A s'écrit alors

     $$\begin{aligned} A^3 - 3\,BA &= 2B\sqrt{B}\,\cos 3\theta = 2B\sqrt{B}\,(4\,\cos^3\theta - 3\,\cos\theta) \\ &= (2\sqrt{B}\cos\theta)^3 - 3\,B\,(2\sqrt{B}\cos\theta). \end{aligned}$$

     On peut en déduire très facilement que chacun des trois nombres réels $A = 2\sqrt{B}\,\cos\theta$, $A' = 2\sqrt{B}\,\cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $A'' = 2\sqrt{B}\,\cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

62. Page 416 de la traduction Witmer.
63. C'est-à-dire calculer une racine troisième.
64. Nous empruntons ce type d'égalité au théorème II du Chapitre VI du second *Traité*, en page 172 de la traduction Witmer ; pour le théorème III (deux pages plus loin) il faudrait remplacer B par B^2 mais c'est sans réelle importance.
65. Appelé *casus irreductibilis* dans la littérature mathématique de l'époque, et relevant du Théorème III de la page 174.
66. Ce qui impose à B d'être positif.

satisfait à l'équation, qui possède donc trois racines réelles, toutes connues[67] d'après les tables trigonométriques - comme celles de Viète lui-même[68] - dès que l'on sait réaliser la trisection de l'angle dont le cosinus est $\dfrac{D}{2\sqrt{B}}\cdot$

Par exemple, pour $D = 2\sqrt{B}$, on obtient une racine double $-\sqrt{B}$ et une racine simple[69] $2\sqrt{B}$. Nous avons déjà discuté des deux exemples donnés par Viète, à savoir $x^3 - 21\,x + 20 = 0$ et $x^3 - 300\,x - 432$.

b) Il reste maintenant à étudier le cas « réductible » où $D^2 > 4\,B$. Cette fois-ci, c'est le Théorème II, page 172, qui donne la solution de Viète. Il s'agit des équations n'ayant qu'une racine réelle.

La clef, telle qu'il la présente, est la recherche d'une progression géométrique (a, b, c, d), c'est-à-dire la donnée de deux réels a et r tels que $b = ra$, $c = r^2 a$ et $d = r^3 a$, où b et c sont appelés *moyens proportionnels* insérés entre les « extrêmes » a et d, satisfaisant aux égalités initiales

$$ad = B, \qquad a + d = D.$$

On remarque aussitôt que l'on a également $B = bc$.

Le Zététique IIII du Livre deuxième[70], connu de tout temps[71] permet alors de calculer explicitement a et d, racines de l'équation

$$X^2 - DX + B = 0$$

dont le discriminant $\Delta = D^2 - 4\,B$ est positif : a et d sont dès lors connus.

67. On a par exemple, en notations modernes, $A = 2\sqrt{B}\cos\left(\dfrac{1}{3}\,\mathrm{Arccos}\,\dfrac{D}{2\sqrt{B}}\right)$.

68. Voir le *Canon mathematicus* de 1579 à Paris, chez Mettayer (dont l'impression commença en 1571, ce qui explique quelques divergences quant à la date du livre), complétant à chaque minute d'arc des tables de 1551 de Rhæticus (1514-1576) donnant les six fonctions trigonométriques avec sept décimales pour des angles séparés de dix minutes en dix minutes.

69. On peut montrer facilement que c'est le seul cas possible de rencontre d'une racine multiple, en général double, et même triple si $B = 0$.

70. Page 103 de la traduction Witmer.

71. Par exemple par Diophante, *cf.* I, 27.

Le fait que la progression cherchée est géométrique implique les égalités

$$b^3 = a\,(bc) = Ba, \qquad c^3 = (bc)\,d = Bd.$$

Par suite

$$(b+c)^3 - 3\,B\,(b+c) = (b+c)^3 - 3\,bc\,(b+c) = b^3+c^3 = B\,(a+d) = BD$$

ce qui montre que $A = b + c$ est une racine de l'équation proposée [72].

On doit naturellement rapprocher cette technique de celle du Zététique XVI du même Livre deuxième [73], où il s'agit de calculer deux nombres b et c connaissant leur produit ($bc = B$) et la somme de leurs cubes ($b^3 + c^3 = BD$).

Dans ce texte, Viète donne en application numérique la recherche de (b, c) liés par $bc = 21$ et $b^3 + c^3 = 370$; on a ici

$$(b^3 - c^3)^2 = (b^3 + c^3)^2 - 4\,b^3c^3 = 99856 = (316)^2,$$

d'où [74] par exemple $b^3 - c^3 = 316$, puis $b^3 = 343$, $b = 7$, $c^3 = 27$, $c = 3$, $b + c = 10$. Ce Zététique est donc, en fait, construit autour de l'équation

$$0 = A^3 - 63\,A - 370 = (A - 10)\,(A^2 + 10\,A + 37)$$

qui donne un excellent cas particulier du *casus reductibilis*.

Viète ne donne pas explicitement la formule de Cardan que Descartes publiera [75]. Mais on peut très facilement la déduire de ce qui précède

$$A = b + c = \sqrt[3]{\frac{B}{2}\,(D - \sqrt{D^2 - 4\,B})} + \sqrt[3]{\frac{B}{2}\,(D + \sqrt{D^2 - 4\,B})}.$$

Notons pour finir que toute la résolution de l'équation présentée dans ce paragraphe ne repose finalement que sur deux outils de base, à savoir l'algèbre ordinaire augmentée du calcul d'une racine cubique [76].

72. C'est la seule réelle - Viète ne le dit pas - car l'équation $A^2+(b+c)\,A+b^2+bc+c^2 = 0$ n'a pas de racines réelles.

73. Page 108 du livre cité.

74. Dans le texte original, une faute d'impression a fait écrire 99256.

75. Elle ne figure d'ailleurs pas non plus dans l'*Ars Magna*.

76. On pourrait objecter qu'il y a deux racines cubiques à calculer, puisqu'il faut tirer b de b^3 et c de c^3, mais l'égalité $bc = B$ montre que, si on le désire, on peut se contenter de n'en effectuer qu'une seule.

La conjonction des deux résultats prouvés ci-dessus confirme bien le théorème de Viète sur la réduction de toute équation du troisième degré aux deux cas particuliers fondamentaux : trisection de l'angle et extraction de racine cubique.

- Chez Descartes, qui écrit [77]

  « *Il serait superflus que je m'arestasse a donner icy d'autres exemples ; car tous les Problesmes qui ne sont que solides se peuvent reduire a tel point, qu'on n'a aucun besoin de cette reigle pour les construire, sinon entant qu'elle sert à trouver deux moyennes proportionnelles, ou bien a diviser un angle en trois parties esgales* »,

  il est impossible d'affirmer autre chose que le théorème de Viète. Mais il ne le cite naturellement pas [78] ; il va se référer exclusivement à l'ancêtre Cardan et ses inspirateurs, alors vieux d'un siècle.

  Exactement quatre pages plus loin, après avoir justifié son affirmation, le mathématicien Descartes, *homme d'ordre*, toujours à l'affût de symétries cachées, remarque que ces constructions particulières, en apparence si dissemblables, ne le sont pas vraiment puisque

  « *en l'une desquelles il faut avoir tout ensemble les deux poins, qui determinent deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, & en l'autre les deux poins, qui divisent en trois parties esgales un arc donné* ».

  Il s'intéresse aux trois types d'équation $z^3 = -p\,z + q$, $z^3 = +p\,z + q$ et $z^3 = +p\,z - q$ avec p et q positifs, rejetant ainsi par exemple la mise en évidence d'un facteur trois dans le coefficient de l'inconnu au premier degré dans l'équation. Il est ici cohérent avec sa présentation générale des équations du troisième degré ramenées au quatrième degré par des formules du type $z^4 = \pm p\,z^2 \pm q\,z$ et nous le suivrons ci-dessous sur ce point [79].

77. Page 397 des *Essais* (471 dans AT VI).
78. Sauf dans les mots, ce qui lui échappe probablement, puisque Viète disait déjà « *en construisant deux moyennes proportionnelles entre des termes donnés ou en divisant un angle donné en trois parts égales* » : c'est presque une copie parfaite.
79. On pourrait s'étonner qu'il ait omis le cas $z^3 = -p\,z - q$, mais celui-ci, par le changement de z en $-z$, se ramène aussitôt au second et peut être laissé de côté dans la mesure où il n'introduit pas de racine positive mais seulement une « fausse ».

a) Dans le premier cas $z^3 = -p\,z + q$, où le signe de p est donc un moins et celui de q un plus, il nous rappelle [80] la formule de Scipion del Ferro, implicite dans l'*Ars Magna* [81]

$$z = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}\,q + \sqrt{\frac{1}{4}\,qq + \frac{1}{27}\,p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\,q + \sqrt{\frac{1}{4}\,qq + \frac{1}{27}\,p^3}}$$

Il est clair que cette racine, du type [82] $z = b + c$, est toujours réelle et même positive. Par exemple, pour reprendre une citation de Cardan, $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ est la seule racine [83] de $x^3 = -6\,x + 20$. Cela dit, cette formule ne présente pas que des avantages, car il faut avoir de bons yeux ou une intuition hors pair pour y reconnaître la valeur 2, puisque $x^3 + 6\,x - 20 = (x-2)\,(x^2 + 2\,x + 10)$! Il n'utilise par conséquent pas la convention très commode qui nous permet aujourd'hui d'écrire $\sqrt[3]{-8} = -2$ en n'introduisant que des racines de nombres réels positifs. Ces deux racines cubiques sont, chacune, déterminées par des recherches graphiques de deux moyennes proportionnelles [84].

b) Dans le second cas $z^3 = +p\,z + q$, il suffit *a priori* de changer p en $-p$, mais il faut ajouter la condition $4\,p^3 < 27\,q^2$ pour que les racines carrées ci-dessous aient un sens [85]

$$z = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}\,q + \sqrt{\frac{1}{4}\,qq - \frac{1}{27}\,p^3}} + \sqrt[3]{+\frac{1}{2}\,q - \sqrt{\frac{1}{4}\,qq - \frac{1}{27}\,p^3}}.$$

80. Sans aucune démonstration, bien sûr !

81. Chapitre XI page 97 de la traduction Witmer, qui traite exactement de $z^3 + p\,z = q$. Dans l'édition de 1637, Descartes recourt à ce qu'il appelle « le chiffre » $\sqrt{C.t}$ pour $\sqrt[3]{t}$ (voir page 401 des *Essais* ou 475 de AT VI). Deux lapsus lui font mettre par erreur un signe + entre les deux racines cubiques et précéder le deuxième $\frac{q}{2}$ d'un signe −. Comme tous les éditeurs suivants, Van Schooten compris, nous avons rétabli les écritures correctes.

82. Pour reprendre ici notre notation du *casus reductibilis* de Viète.

83. Réelle ; les autres valent $-1 \pm 3\,\mathbf{i}$.

84. On peut d'ailleurs se ramener à une seule, puisque $bc = -\dfrac{p}{3}\cdot$

85. Dans l'édition originale, le dernier $\dfrac{1}{2}$ était faussement remplacé par un $\dfrac{1}{4}\cdot$

À signaler que, dans une bien commode édition canadienne des œuvres de Descartes sur CD-Rom, le coefficient de p^3 est faussement écrit $\dfrac{1}{27}$ au lieu de son opposé. Publier un texte comme *La Géométrie* requiert, de la part d'un éditeur même bien connu sur la place, un soin très important et une compétence technique reconnue.

La même conclusion en découle [86]. Descartes reviendra brièvement sur l'étude de ce cas page 400 des *Essais* (474 dans AT VI) en commettant une erreur fâcheuse (il écrit $z^3 = -q\,z + p$ au lieu de $z^3 = p\,z + q$). Cette bévue sera corrigée partout, sauf chez Smith et Latham [87].

c) Continuons sur le second cas $z^3 = +p\,z + q$, mais cette fois-ci avec $4\,p^3 \geqslant 27\,q^2$. Descartes se ramène aussitôt [88] à sa preuve de la trisection de l'angle de la page 500, en changeant $NO = 1$ en $NO = \sqrt{\frac{1}{3}\,p}$ et $NP = 2\sin 3\theta$ en $NP = \frac{3q}{p}\cdot$ Comme on l'a vu sur la figure associée, il est capable de placer en Q le premier tiers du petit arc NP, et de même (en V) le premier tiers du grand arc NP : alors l'unique racine positive de l'équation est $z = NQ + NV$ et les deux autres racines, également réelles mais négatives, sont $z' = -NQ$ et $z'' = -NV$, comme on le voit aussitôt sur la figure plus complète des *Essais* ou d'Adam Tannery [89].

Il y a racine multiple $z = -\dfrac{3q}{2p}$ si, et seulement si, $4\,p^3 = 27\,q^2$.

d) Le troisième cas se décompose également en deux. Supposons d'abord $z^3 = +p\,z - q$ avec toujours $4\,p^3 \geqslant 27\,q^2$. On est ramené au cas précédent [90] avec cette fois-ci une racine fausse $z = -NQ - NV$ et deux racines vraies $z' = NQ$ et $z'' = NV$.

---

86. Pas plus que Viète, Descartes n'ajoute pas que la racine donnée est la seule réelle, ce qui serait pourtant nécessaire pour que sa méthode, qui ne fournit graphiquement que celle-là, soit bien complète. En réalité les deux autres racines, imaginaires conjuguées, peuvent également être calculées à partir de racines cubiques de réels puisqu'elles d'écrivent $z' = b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{j}^2$ et $z'' = b\,\mathbf{j}^2 + c\,\mathbf{j}$ avec $\mathbf{j} = \dfrac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\mathbf{j}^2 = \dfrac{-1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\cdot$

87. De même, il écrira neuf lignes plus bas $z^3 = +q\,z - p$, au lieu de $z^3 = +p\,z - q$; ici aussi Smith et Latham sont aveugles à la faute.

88. Page 398 des *Essais*, dans AT VI.

89. L'angle $\widehat{QOV}$ vaut $\frac{2\pi}{3}\cdot$ À noter que, dans la note 238 de la page 212 de leur traduction, Smith et Latham écrivent par erreur $NQ + NP$ à la place de $NQ + NV$.

90. Dans le texte de 1637, Descartes écrit par mégarde $NP = \frac{3q}{p}$ au lieu de $\frac{3p}{q}\cdot$

e) Soit enfin $z^3 = +p\,z - q$ avec $4\,p^3 < 27\,q^2$. On est aussitôt ramené, en changeant z en $-z$, au cas b). Par suite : une seule racine réelle, cette fois-ci négative. Descartes le dit très clairement au haut de la page 400 de ses *Essais* (473 dans AT VI) et lui affecte la valeur [91]

$$z = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}\,q + \sqrt{\frac{1}{4}\,qq - \frac{1}{27}\,p^3}} + \sqrt[3]{+\frac{1}{2}\,q - \sqrt{\frac{1}{4}\,qq - \frac{1}{27}\,p^3}}.$$

La réticence au dix-septième siècle devant les racines négatives était encore si forte que tout le monde parlait de ≪ la racine fausse égale à 5 ≫ pour parler de la racine -5 d'une équation. Il n'y a donc pas à s'étonner de cette égalité [92], qui donne en fait $|z| = -z$ et non z.

L'affirmation de Descartes est donc pleinement justifiée [93]. Mais, comme le montre le paragraphe suivant, il aurait pu signaler qu'une courbe qu'il connaissait très bien par ailleurs était susceptible de traiter ces deux cas particuliers, *et donc de résoudre toutes les équations du troisième degré de façon conforme à ses désirs*. Il est un peu étonnant qu'il ne l'ait pas fait.

- Ce théorème sur la réduction possible aux deux cas particuliers de la trisection et de la construction d'une racine cubique est donc commun à Viète et à Descartes. Tous deux savaient en outre que la *Conchoïde de Nicomède* [94], déjà souvent rencontrée, permettait ces deux constructions.

91. Sans lapsus cette fois-ci.

92. Jules Vuillemin donne, page 181 de la Note XII de ses *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* déjà citées, l'exemple de l'équation de trisection $z^3 = 3\,z - 1$ $\left(\text{ayant pour racines } 2\cos\frac{2\pi}{9},\ 2\cos\frac{8\pi}{9} = -\,2\,cos\frac{\pi}{9} \text{ et } 2\cos\frac{14\pi}{9} = 2\cos\frac{-4\pi}{9} = 2\sin\frac{\pi}{18}\right)$. Il proteste alors contre l'analyse cartésienne qu'il juge incorrecte (≪ *L'analyse de Descartes est ici fausse* ≫), parce que la valeur de z écrite par Descartes est, comme nous l'avons dit, en fait celle de $|z| = 2\cos\frac{\pi}{9}$, ce qu'il n'a pas vu. Il énonce que Descartes avait cru constater que ≪ *dans le cas d'irréductibilté, q est positif* ≫. Rien pourtant dans les textes ne vient soutenir ces affirmations.

93. Il n'est pas inintéressant de noter qu'il avait d'ailleurs, dans sa jeunesse, imaginé deux compas qui, justement, réalisaient la trisection et les racines cubiques (et autres), comme nous le prouvent les *Cogitationes privatæ* du *Parnassus*.

94. D'abord appelée *Cochloïde* avant que Proclus ne lui donne son nom actuel. Tout cela est dans Pappus, Livre III (VIII), pages 42-44 et Livre IV (XXVIII), proposition 24, pages 185-190 du tome premier de la traduction de Paul Ver Eecke. Voir Sir Little Thomas Heath, *A history of greek mathematics*, volume I, pages 238 et 260.

Pour Viète, qui ne visait qu'à des calculs numériques décimaux, rappeler cela était sans intérêt. Par contre, Descartes, orienté vers des constructions graphiques de racines d'équation, a certainement été très intéressé par cette richesse inouïe de cette courbe. Cette double capacité est illustrée par deux figures ci-dessous, suivies des démonstrations antiques (mais évidemment encore valables aujourd'hui).

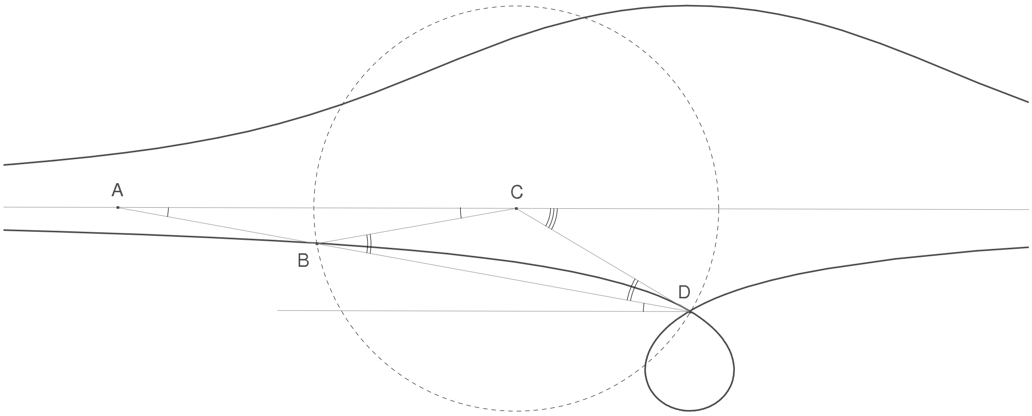


FIGURE 10.13 – *Trisection et conchoïde de Nicomède* ($BA = DC$)

Ici la preuve est immédiate car elle apparaît au premier regard ; typographiquement, nous avons marqué les angles intéressants d'une marque simple pour l'angle θ, double pour 2θ et triple pour 3θ, supposé compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, limitation dont il est très facile de se débarrasser puisque l'on sait construire des angles de mesure $\frac{\pi}{6}\cdot$ La donnée de 3θ fixe le point C, et les triangles isocèles BCD et ABC font le reste : la solution θ est obtenue grâce au théorème des angles alternes-internes engendrés par la parallèle issue du pôle D à la règle AC.

Pour la seconde application, la vérification est nettement plus délicate ; cela dit, elle n'est en général exposée que dans le cas particulier de la *duplication du cube*, mais permet en fait de *calculer n'importe quelle racine cubique*.

Ici, le rectangle $ABCL$ est donné, et l'on cherche à déterminer un point M tel que $\dfrac{BC}{MA} = \dfrac{AL}{MA}$ soit la racine cubique du rapport $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AL}{LC}\cdot$

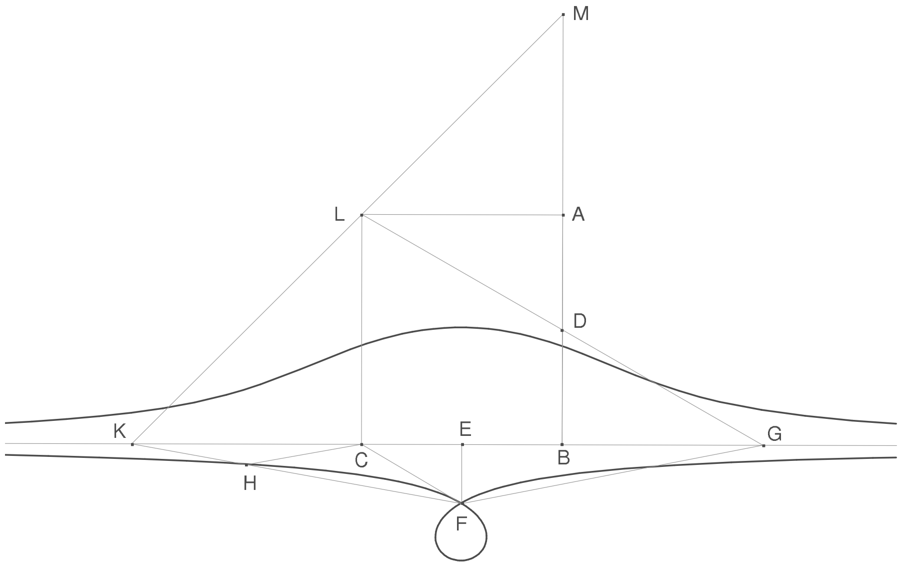


FIGURE 10.14 – *Racines cubiques et conchoïde ($HK = FC = BD = DA$)*

Soient E le milieu de BC, G le symétrique de C par rapport à B, aligné avec L et le milieu D du segment AB. La « règle » est la droite BC, le pôle F s'y projette en E de façon que FC soit la « constante ». Soient H commun à la courbe et la parallèle à FG issue de C, et $K = FH \cap BC$: alors $M = AB \cap KL$. En voici une preuve, succincte, basée sur Thalès, Pythagore et les triangles homothétiques MBK, LCK et MAL

$$\frac{MA}{AD} = \frac{2MA}{AB} = \frac{2ML}{LK} = \frac{2BC}{CK} = \frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK}; \quad MA = FH, \quad DM = FK;$$

$$\begin{aligned} MB \cdot MA &= (BD + DM)(DM - DA) = DM^2 - DA^2 = FK^2 - FC^2 \\ &= EK^2 - EC^2 = (EK + BE)(EK - EC) = BK \cdot CK; \end{aligned}$$

$$\frac{AL}{MA} = \frac{CK}{LC} = \frac{BK}{MB} = \frac{MA}{CK}; \quad \left(\frac{AL}{MA}\right)^3 = \frac{AL}{MA} \cdot \frac{MA}{CK} \cdot \frac{CK}{LC} = \frac{AL}{LC}.$$

Au bout de cette comparaison précise des attitudes de Viète et de Descartes, une chose semble sûre : **le cadet a connu et lu le travail de l'aîné**, mais a su le transformer avec grande originalité et le porter à un niveau d'abstraction tel, qu'en dépit de sa réputation *La Géométrie* est **incomparablement plus riche et plus claire** que des travaux dispersés, où accessoire et essentiel se mélangent parfois inextricablement. Cela devait être dit.

Chapitre 11

Les équations de degrés 5 et 6

Dans sa jeunesse, alors que le thème de la résolution des équations du troisième degré le fascinait déjà, Descartes avait conçu deux compas qui lui permettaient de régler ce problème [1], ou plus exactement de construire les solutions de deux problèmes particuliers qui, à eux seuls, donnaient le cas général : calculer une racine cubique et déterminer le tiers d'un angle [2].

Le rôle générateur de la Conchoïde

Mais sa très bonne connaissance des auteurs antiques, notamment Pappus, lui permit certainement d'apprendre que le même travail pouvait aussi être effectué à l'aide d'une seule courbe auxiliaire, la Conchoïde de Nicomède [3]. Mais bien entendu tout cela restait limité au degré trois, voire quatre si l'on se rappelle qu'il avait, après Ferrari, déterminé une technique donnant les solutions d'une équation de degré quatre par deux calculs de racines carrées usuelles après résolution effective d'une équation auxiliaire de degré trois.

Pour passer à des degrés supérieurs, il fallait d'autres courbes car le stock de ce que les anciens nous ont légué était trop faible. Mais avant de tenter

1. L'un est décrit dans *La Géométrie* et l'autre dans les *Cogitationes Privatæ*.
2. Voir dans le chapitre précédent les réactions, tout à fait parallèles mais bien différentes, de Viète et de Descartes sur ce sujet.
3. Il faut reconnaître qu'il n'y a jamais fait allusion à notre connaissance ; mais ces résultats étaient tout à fait à sa portée dans Pappus, le compilateur de référence, et étaient trop semblables à ses marottes de constructions graphiques pour qu'il ne les remarque pas.

de résoudre des équations de *n'importe quel degré*, il est clair que Descartes s'est d'abord limité aux équations de degré cinq et six, cas qui fait l'objet de ce chapitre. Bien que nous n'ayons aucun document allant dans ce sens, il est bien tentant de penser qu'il a d'abord essayé de ramener toute équation de ce type à l'intersection d'un cercle - son outil fétiche - et d'une courbe comme la Conchoïde de Nicomède, qui avait déjà montré toute sa puissance. Étant de degré quatre, elle coupe un cercle en un certain nombre de points pouvant aller jusque huit[4]. Il était donc très tentant d'essayer pour voir ce que cela pouvait donner.

Malheureusement quelques expériences ont sans doute montré à Descartes que c'était là une voie sans issue : la raison en est que la Conchoïde ne dépend que de deux paramètres (comme les coniques) et que, même si le cercle auxiliaire en met trois en jeu, les cinq paramètres sur lesquels il pouvait jouer étaient insuffisants pour résoudre une équation de degré six qui est définie par six coefficients[5].

Donc Descartes a vite abandonné la Conchoïde comme courbe auxiliaire à cause de cette insuffisance. Cela dit, il a pu regarder avec intérêt l'une des techniques les plus simples permettant la construction de cette dernière : la figure de gauche ci-dessous l'explicite : étant donnés un point fixe A appelé le « pôle », une droite dénommée « rail » déterminée par la projection orthogonale B de A sur elle, les différents points du lieu peuvent être obtenus de la façon suivante : un cercle de rayon donné, de centre E et de sommet D, se déplace verticalement de façon à ce que E décrive le rail, et les points communs à ce cercle et à la droite variable AE engendrent la courbe.

On sait que, pour Descartes, la solution viendra par la substitution à la Conchoïde d'une courbe qu'il a inventée (et appelé pour cela *Parabole Cartésienne* entre autres noms). La figure de droite ci-dessous rappelle la

4. Il n'est en effet pas déraisonnable de penser que Descartes, avait, au moins intuitivement bien sûr, une première idée du théorème dit de Bézout qui dit que le nombre de points d'intersection de deux courbes de degrés d et d' est en général égal à dd', et en tout cas ne lui est jamais supérieur. Cela dit, dans ce cas précis, on pourra effectivement atteindre une configuration avec six points communs, mais pas davantage en raison de certaines particularités des « points à l'infini » de la Conchoïde.

5. Ce nombre est même, en principe, égal à sept, mais on peut se ramener à six en divisant par le coefficient du terme de plus haut degrés, comme Descartes l'a fait pour le quatrième degré.

construction point par point de cette « parabole » généralisée : une parabole ordinaire, admettant le rail pour axe et D pour sommet, se déplace verticalement dans le plan ; si E est un point donné de l'axe [6], donc variable avec D, les points communs à cette parabole et à la droite variable AE engendrent la courbe [7]. Dans les deux cas, il s'agit de ce que l'on appellera plus tard un *mouvement plan sur plan* rectiligne.

Ces modes de définition sont suffisamment proches pour que nous puissions tenter de poser une hypothèse : c'est après avoir tenté en vain d'utiliser la Conchoïde de Nicomède comme courbe auxiliaire que Descartes l'a remplacée par une autre, voisine et plus riche en paramètres (trois au lieu de deux) : sa Parabole Cartésienne. D'autre part, le processus faisant passer d'une parabole ordinaire à celle-là pouvait aisément être employé à nouveau pour compliquer encore le jeu, et ce à l'infini : un espoir de technique embrassant tous les degrés n'était donc pas inenvisageable.

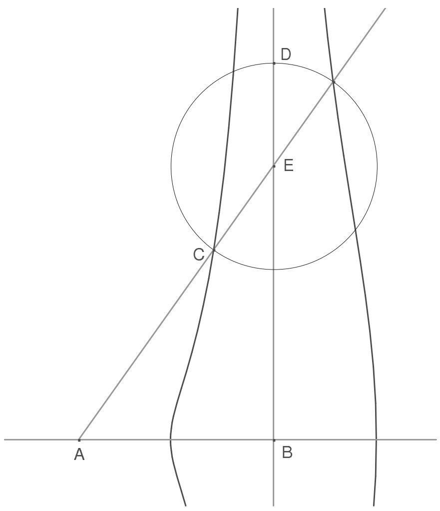


FIGURE 11.1 – *Cercle. . .*

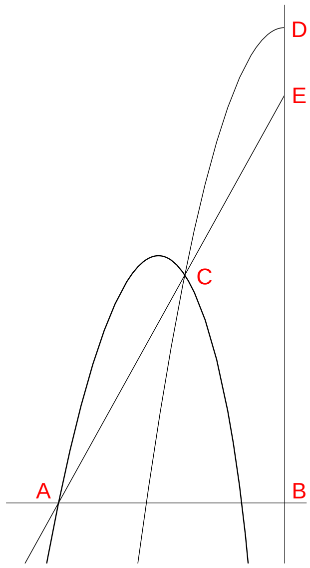


FIGURE 11.2 – *. . . Parabole*

6. Descartes ne lui demande pas d'être le foyer, ou le centre de courbure au sommet *etc.*, mais seulement d'être à l'intérieur de la courbe.

7. C'est ce que nous avons appelé la *Transformation de Descartes*, auquel un chapitre entier a été consacré plus haut. À noter que nous n'avons représenté ici que l'une des deux branches de la Parabole Cartésienne : l'autre serait située au delà de B.

Parabole Cartésienne et équations de degré 6

La figure ci-dessous (extraite des pages 336 ou 338 des *Essais*, 409 ou 410 dans AT VI) est à rapprocher de celle qui se trouve à droite dans l'illustration ci-dessus. Elle est lourde à décrypter : les points A et B y sont notés G et A. Nous trouvons ici en fait deux Paraboles Cartésiennes, symétriques par rapport à AB ; celle qui est analogue à ce que nous avons vu plus haut est notée $CGEC$ et sa branche de droite est pratiquement remplacée par une droite presque verticale OIn, s'écartant de plus en plus de l'axe à mesure que l'on descend. On y voit une parabole ordinaire génératrice (analogue au cercle pour la Conchoïde), mais liée à l'autre Parabole Cartésienne, celle qui regarde vers le haut[8]. Tout cela ne peut que désorienter le lecteur[9].

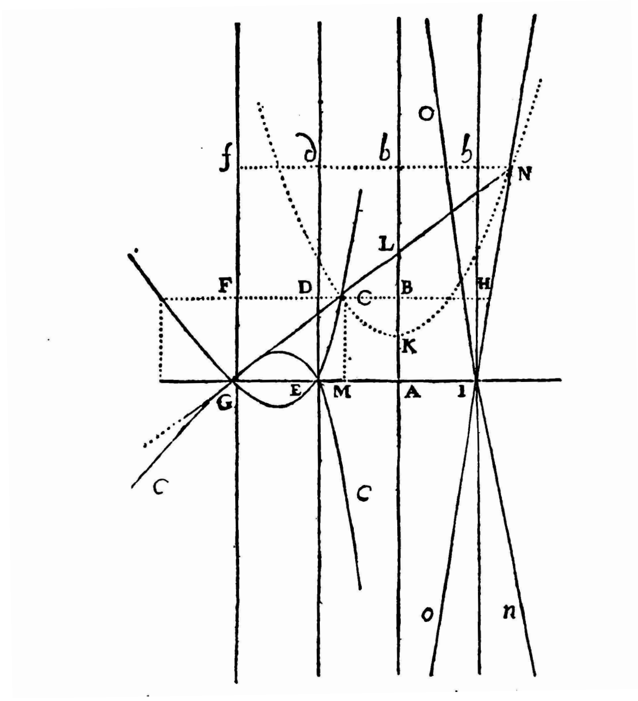


FIGURE 11.3 – *Deux Paraboles Cartésiennes, complètes et symétriques*

8. Cela peut se voir aussitôt puisqu'elle tourne sa concavité vers le haut et non vers le bas comme dans la figure de droite ci-dessus.

9. Rappelons l'avertissement terriblement ironique donné par Descartes à l'orée de ce troisième Essai : « *Jusqu'ici j'ay tasché de me rendre intelligible a tout le monde...* » !

Voici une autre représentation de la Parabole Cartésienne telle qu'elle sera utilisée par Descartes dans sa figure *princeps*[10], qui résume en quelque sorte, à elle seule, tout le Traité. Comme nous l'avons vu plus haut, c'est aussi sous cette forme que Newton la rangera dans sa classification des cubiques, sous le nom de *Trident*[11].

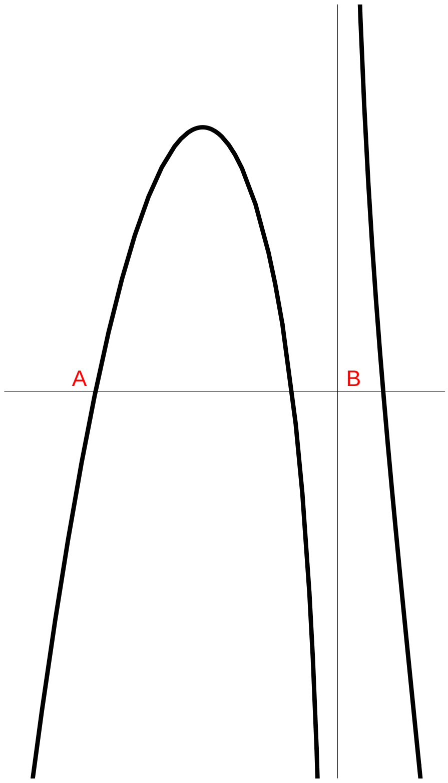


FIGURE 11.4 – *La Parabole Cartésienne vue par Descartes*

10. Voir page 521. Pour des raisons qui seront exposées plus loin, seule la branche de gauche est nécessaire à Descartes, l'autre - inutile à son projet - n'y apparaîtra pas.

11. À grande échelle, la branche de gauche pourrait faire penser à une véritable parabole si elle n'avait pas d'asymptote verticale. Ici aussi les illustrations de Van Schooten pour *La Géométrie*, souvent assez proches de la réalité, manquent terriblement de sens de la pédagogie : tordre plus ou moins la réalité est parfois bien utile pour mettre en évidence certaines formes complexes... Les nôtres ont été exécutées sans aucune tricherie : mais le choix de certains paramètres a été effectué avec soin afin de faire toucher du doigt autant qu'il était possible la vraie nature des objets représentés.

La figure suivante donne aussi une forme, possible mais assez différente, de cette même Parabole Cartésienne[12]. Nous l'avons incluse ici pour que le lecteur ne s'imagine pas qu'elle possède une forme unique : dans certains cas, elle peut présenter des « bosses » qui ne manquent pas de charme.

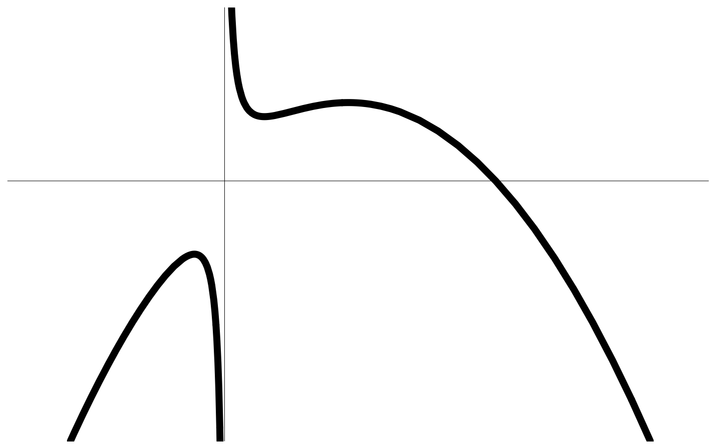


FIGURE 11.5 – *Une Parabole Cartésienne vraie, mais moins classique*

Parabole Cartésienne et cercle

Les équations de degrés trois et quatre peuvent être résolues, comme Descartes l'a fait, par intersections de cercle et de paraboles usuelles. Dans ce chapitre, nous allons montrer que, pour celles de degré cinq et six, il en va de même en remplaçant la parabole classique par son avatar cartésien. La figure ci-dessous donne un exemple où une équation de degré six est résolue de cette manière.

Ici il n'y a que quatre racines réelles (et deux imaginaires conjuguées), approximativement proportionnelles aux quatre nombres 9/2, 5/2, 1 et 9, calculés à partir de mesures faites sur l'édition originale du livre. Cette figure est extraite de *La Géométrie*, plus précisément à partir de ce que nous appellerons ici la bien complexe *figure princeps* du Traité (voir page 521) dont elle constitue le « second tiers ».

12. Étudier par exemple la représentation graphique de la fonction rationnelle définie par $-x^2 + 4\,x + \dfrac{1}{x}$ pour x aux voisinages de 1 et de 2.

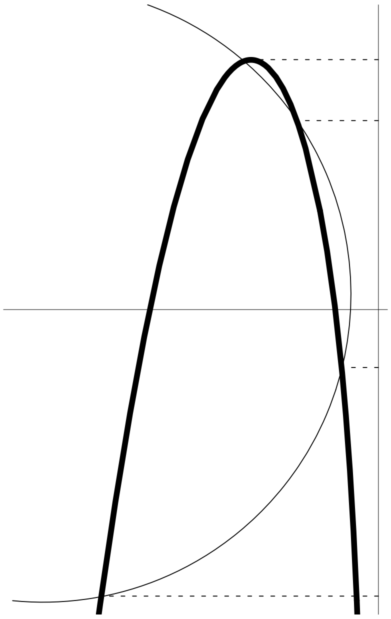


Figure 11.6 – *Une équation de degré 6 n'ayant que 4 racines réelles*

En voici une autre, beaucoup moins lisible, absente de Descartes [13], où il y a exactement six racines réelles distinctes, à savoir $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

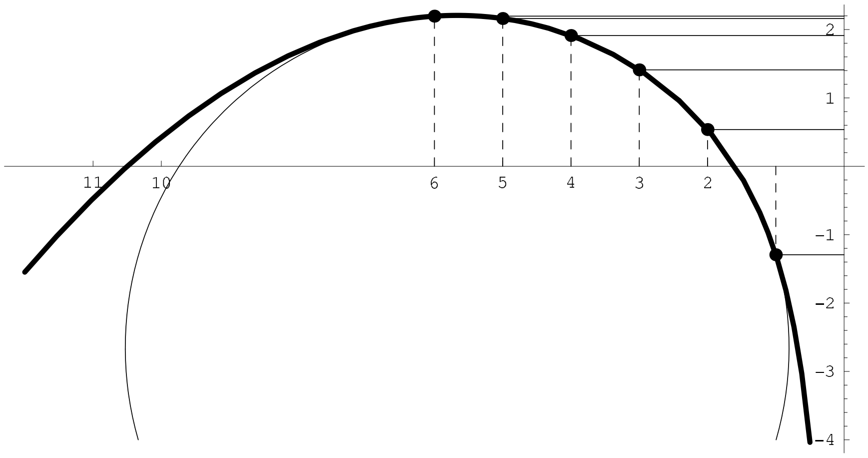


Figure 11.7 – *L'équation* $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) = 0$

13. À noter cependant que, dans sa lettre DLXV du 17 août 1649 à Carcavi, AT V page 398, il évoque une équation analogue ayant pour racines $(1, 2, 3, 4, 6, 9)$.

L'imprécision extrême du cas choisi ici, pourtant *a priori* bien banal, n'avait pas échappée à Descartes qui affirme avec justesse

« *Il peut arriver que le cercle couppe si obliquement la parabole du second genre; que le point de leur intersection soit difficile à reconnaistre : & ainsi que cette construction ne soit pas commode pour la pratique*[14]. »

Cette difficulté ne gênait pas réellement Descartes, pour qui l'importance de sa méthode graphique ne résidait nullement dans son côté pratique, mais exclusivement dans son contenu logique abstrait.

Dans les deux cas, les racines sont les abscisses des points communs au cercle et à la Parabole Cartésienne spécialement associée à l'équation étudiée, comptées positivement vers la gauche de la figure[15].

Sur ces figures, il est parfaitement clair que la technique est analogue à celle qui a permis de régler le cas des équations de degré quatre : les racines cherchées, essentiellement réelles bien sûr[16] sont obtenues par intersection d'un cercle et d'une certaine courbe, parabole ordinaire pour quatre, Parabole Cartésienne pour six. La similitude est donc grande. Toutefois, comme une étude plus détaillée nous le montrera, il existe certaines différences entre les deux, dont voici les plus évidentes

- Dans le premier cas, la parabole est toujours la même (d'équation $x = z^2$) ; dans le second, au contraire, la Parabole Cartésienne diffère pour chaque équation, et doit être tracée point par point, ce qui a contraint Descartes a ajouter en cours de route une méthode de construction différente, et sans doute plus commode, de sa courbe auxiliaire[17].

14. Page 412 des *Essais*, 484 dans AT VI. La figure n'est pas dans Descartes.

15. Pour respecter les conventions cartésiennes valides dans les paragraphes étudiés ici.

16. Comme Wallis peu de temps après, Descartes aurait aussi pu tenter de « calculer » parties réelles et parties imaginaires d'équation réelles : mais on ne trouve pas de trace dans son œuvre mathématique d'un tel souci. D'ailleurs Wallis lui-même n'y parviendra que pour le second degré, où les choses sont faciles. Voir par exemple le chapitre LXVIII de son *Treatise of Algebra* de 1685, sans doute écrit vers 1670, que l'on peut lire page 46 et suivantes dans *A Source Book in Mathematics* de David Eugene Smith (McGraw-Hill 1929, réédité par Dover en 1959).

17. C'est d'ailleurs l'un des rares cas où Descartes commet une erreur dans son plan du livre, cette idée ne lui étant peut-être venue - suite à un reproche du graveur Van Schooten ? - qu'après l'impression de la partie de *La Géométrie* consacrée à l'étude de sa Transformation. Il a du ajouter cette variante à la dernière minute.

- Dans le premier cas, les racines ne sont jamais toutes positives (en effet leur somme doit être nulle après la préparation de l'équation pour l'amener sous la forme $z^4 = p\,z^2 + q\,z + r$; dans le second, au contraire, toutes les racines sont nécessairement positives à l'issue de la transformation initiale. Ce point peut apparaître comme étant secondaire ; en fait, il permet à Descartes de ne mettre en jeu que l'une des deux branches de sa courbe, ce qui ne sera pas toujours compris par ses adversaires, dont Roberval [18].

La figure *princeps* de *La Géométrie*

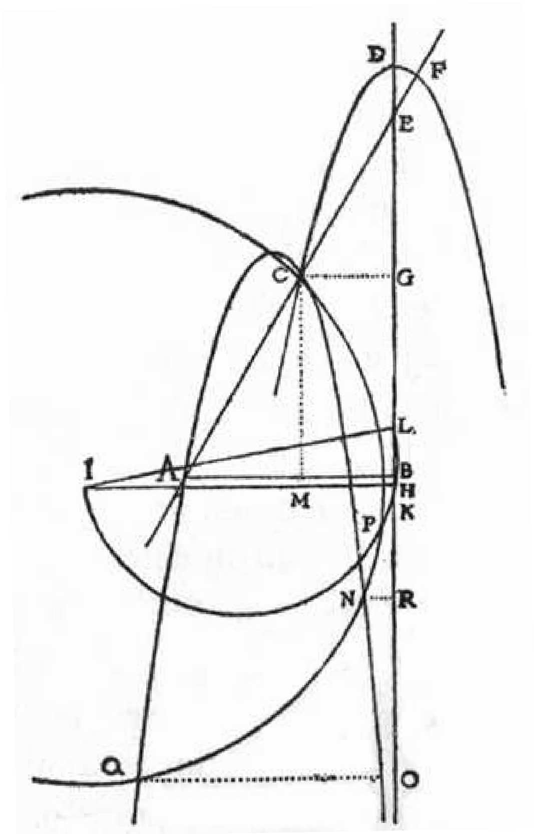


FIGURE 11.8 – *La figure cartésienne* princeps

18. *Cf.* les reproches de Carcavi dans ses lettres DLXIII du 9 juillet 1649, AT V page 374, et DLXX du 24 septembre 1649, AT V page 418.

Cette figure [19] nous paraît être le couronnement de toute *La Géométrie*. Un coup d'œil suffit pour voir qu'elle est bien peu lisible. Nous avons donc choisi de la découper en trois « tiers », dont le premier est la figure de droite de la page 515, qui montre comment engendrer la Parabole Cartésienne grâce au glissement d'une parabole ordinaire le long de son axe, et le second est la première de la page 518

a) Le premier tiers correspond à la génération de la Parabole Cartésienne grâce à une parabole classique en mouvement vertical.
b) Le second tiers indique les valeurs des quatre racines de l'équation particulière étudiée, représentées par des longueurs de segments horizontaux.
c) Le troisième tiers, qui sera présenté plus bas au moment de la démonstration mathématique de l'efficacité de la méthode (*cf.* page 528), montrera comment construire le cercle associé.

L'interprétation « cissoïdale » de la Transformation de Descartes permet de construire bien plus facilement la Parabole Cartésienne que par les deux méthodes indiquées par Descartes et commentées dans le chapitre où est introduite cette courbe [20]. En voici l'interprétation : en pointillé dans la figure ci-dessous on voit la parabole mobile introduite par l'auteur, mais sa présence - non indispensable - n'est justifiée que parce qu'elle rend évidente la justification ci-dessous : en fait, elle est simplement translatée d'une parabole fixe lieu du point variable S. Si la droite AS coupe la perpendiculaire en B à AB en E, le point courant C de la Parabole Cartésienne est défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AE}$, ce qui résulte tout naturellement du fait que ces deux paraboles usuelles sont images l'une de l'autre par la translation définie par ce vecteur.

19. Pages 404 et 410 des *Essais*, 477 et 482 dans AT VI ; dans la seconde occurrence - absente du CD canadien des *Œuvres complètes de Descartes* -, le nom du point I a été écrasé à l'impression et ressemble à un F, présent par ailleurs dans la figure.

À noter qu'un libraire-éditeur du Quartier latin, Jacques Gabay, l'a imprimée sur ses sacs publicitaires comme symbolique de son travail de rééditions systématiques des grandes œuvres mathématiques du passé.

20. Elle présente l'avantage de rappeler davantage la technique utilisée pour les équations de degrés trois et quatre : éliminer tout mouvement plan sur plan au profit de l'exploitation d'une parabole fixe est plus évocateur pour un lecteur occasionnel. Rappelons toutefois que Descartes n'a laissé aucun indice permettant d'imaginer qu'il en avait eu conscience.

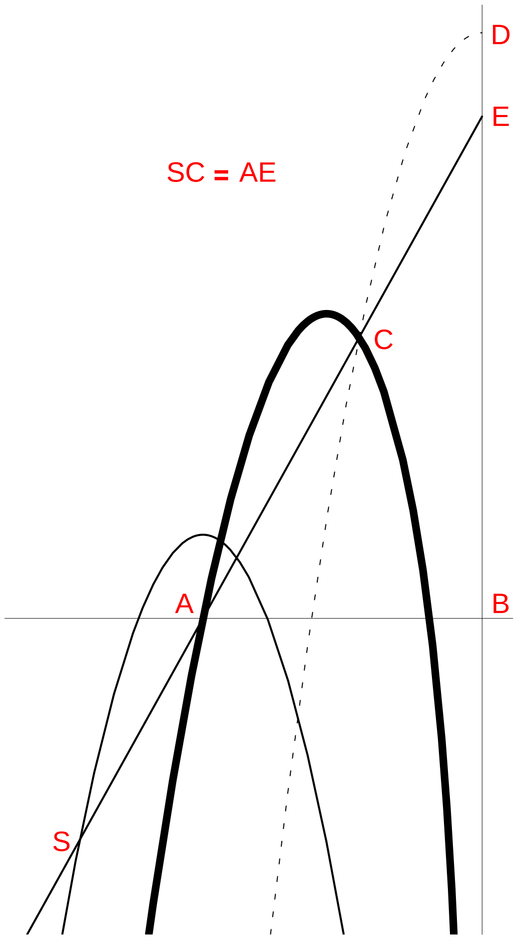


Figure 11.9 – *Une construction cissoïdale de la Parabole Cartésienne*

Les bases mathématiques de la méthode

Venons-en enfin à la justification de la démarche cartésienne pour ces équations de degrés cinq ou six. Tout d'abord, comme dans le chapitre précédent, on peut se contenter d'étudier le second cas, le premier s'y ramenant par l'ajout artificiel d'une racine, nulle par exemple.

Descartes était très fier de tout cela : qu'on en juge par cet extrait de sa lettre DLXV à Carcavi du 17 août 1649 (AT V, page 399)

« *Et j'ose dire que celle* [la règle] *que j'ai donnée est la plus belle, et qui a été sans comparaison la plus difficile à trouver de toutes les choses qui ont été inventées jusqu'à présent en géométrie, et qui le sera peut-être encore ci-après en plusieurs siècles, si ce n'est que je prenne moi-même la peine d'en chercher d'autres..* »

Objectif, stratégie et tactique

L'objectif est de résoudre graphiquement en y une équation du sixième degré $P(y) = 0$ aux coefficients numériques parfaitement connus [21].

La stratégie consiste à ramener cette résolution à la détermination effective de l'intersection d'un cercle et d'une Parabole Cartésienne adaptés au cas étudié : y est racine si, et seulement s'il existe un couple (y, x) vérifiant deux égalités auxiliaires.

La tactique est simplement de déterminer ces deux relations en (x, y).

Pour cela, considérons trois égalités en (y, x) où y peut être lu comme l'abscisse d'un point M et x son ordonnée [22]

$$\begin{array}{rl} [\,i\,] & P(y) = y^6 - p\,y^5 + q\,y^4 - r\,y^3 + s\,y^2 - t\,y + u = 0 \\ [\,ii\,] & y^3 - b\,y^2 + d\,xy - cd\,y + bcd = 0 \\ [\,iii\,] & x^2 + y^2 - 2\alpha\,x - 2\beta y + \gamma = 0 \end{array}$$

avec les relations $p = 2b$, $q = b^2 - 2cd + d^2 + 2\alpha d$, $r = 2d\,(\alpha b + \beta d - 2bc)$, $s = d\,(c^2 d - 2b^2 c - 2\alpha cd + \gamma d)$, $t = 2bcd^2(c - \alpha)$ et $u = b^2c^2d^2$ où les nombres (b, c, d, β) sont strictement positifs si l'on suppose qu'il en est de même pour (p, q, r, s, t, u) et que $4q > p^2$.

L'égalité $[\,ii\,]$ équivaut à l'appartenance de M à une certaine Parabole Cartésienne.

L'égalité $[\,iii\,]$ équivaut à l'appartenance de M à un certain cercle de rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ si cela a un sens, et à l'inexistence de M sinon.

21. La méthode de Descartes échoue dans presque tous les cas où les coefficients de l'équation dépendraient d'un ou plusieurs paramètres.

22. C'est aujourd'hui l'inverse, mais il ne faut voir là que la liberté d'un créateur qui n'avait pas encore vu son apport codifié pour l'éternité par ses futurs vulgarisateurs.

Un peu de calcul ordinaire montre que, si (y, x) est un couple de coordonnées d'un point commun à ces deux courbes, alors l'égalité $[\,i\,]$ est automatiquement vérifiée et y est racine de $P(y) = 0$. On peut dire en abrégé que $[\,ii\,]$ et $[\,iii\,]$ impliquent $[\,i\,]$.

Étudions brièvement une réciproque en montrant qu'à toute racine y de $P(y) = 0$ on peut associer un x et un seul vérifiant, avec y, les deux égalités auxiliaires soit encore, en d'autres termes, que l'on peut associer exactement un point M commun aux deux courbes d'abscisse y. Toujours en abrégé, cela signifie donc que $[\,i\,]$ et $[\,ii\,]$ impliquent $[\,iii\,]$.

La valeur de x à associer à y est évidemment unique et déterminée par $[\,ii\,]$, c'est

$$x = \frac{-y^3 + b\,y^2 + cd\,y - bcd}{dy} = \frac{(b - y)\,(y^2 - cd)}{dy}\,.$$

Vérifier la dernière égalité est, ici encore, un simple calcul qui fonctionne bien grâce aux expressions explicites de p, q, r, s, t et u.

Ce que nous venons de prouver, c'est donc ceci : la stratégie décrite plus haut fonction correctement et permet d'atteindre l'objectif posé, exactement comme dans le cas (beaucoup plus simple) des équations de degré quatre.

Préparer l'équation initiale

Pour mettre une équation arbitraire du sixième degré sous une forme exploitable par l'algorithme de Descartes, à savoir

$$P(y) = y^6 - p\,y^5 + q\,y^3 - r\,y^2 + s\,y - t \qquad \text{avec} \qquad 4q > p^2$$

et tous les coefficients strictement positifs, il suffit comme nous l'avons vu dans le mini-traité de la manipulation d'équations de procéder à une translation suffisamment large des racines de l'équation de départ. Descartes n'a pas prouvé que cela marchait toujours [23], mais il le pensait évidemment. Dans son esprit, sans doute admettait-il qu'il suffisait de procéder par essais et erreurs, en ajoutant chaque fois une nouvelle constante aux racines inconnues jusqu'à l'obtention du résultat recherché : et cela nous suffira bien entendu même si

23. Nous si, parce que nous connaissons le théorème fondamental de l'algèbre de d'Alembert-Gauß.

l'on peut écrire aujourd'hui des programmes informatiques permettant d'y arriver en un coup.

On notera que l'équation ainsi transformée ne peut avoir de racines réelles négatives (puisque $P(-y)$ ne prend que des valeurs strictement positives pour tout $y \geqslant 0$).

Par ailleurs, il faut bien entendu garder trace de la translation effectuée sur les racines afin de pouvoir déterminer *in fine* celles de l'équation initiale.

Reste maintenant à faire le lien entre les (p, q, r, s, t, u), coefficients de l'équation après transformation, et les mêmes nombres qui figurent dans notre preuve d'équivalence évoquée ci-dessus.

Déterminer la Parabole Cartésienne auxiliaire

Cette explicitation équivaut au calcul de (b, c, d) à partir des données (p, q, r, s, t, u). Si l'on respecte l'ordre ci-dessous, on trouve, avec quelque patience[24],

a) $b = \dfrac{p}{2} \cdot$

b) $d = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{t}{\sqrt{u}}}$ à partir des relations $t = 2\,bcd^2(c-\alpha) = 2\,d\,\sqrt{u}\,(c-\alpha)$ et $q = b^2 - 2\,cd + d^2 + 2\,\alpha d$. On notera que la condition un peu exotique $4q > p^2$ implique la positivité de l'expression sous le radical, et trouve donc ici sa justification.

c) $c = \dfrac{\sqrt{u}}{bd} = \dfrac{2\,\sqrt{u}}{pd} = \dfrac{2\,\sqrt{u}}{p\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{t}{\sqrt{u}}}} \cdot$

La Parabole Cartésienne est donc maintenant parfaitement connue et peut être théoriquement construite - au sens que Descartes donnait à ce mot -, notamment avec l'aide des algorithmes graphiques du début du Livre Premier, et la figure *princeps* est explicitée aux deux tiers.

24. Nous avons gardé, dans la mesure du possible, les notations mêmes de Descartes, sauf dans des cas où nos choix offraient plus de régularité et de clarté dans l'exposé.

Déterminer le cercle auxiliaire

Pour connaître le cercle destiné à couper la Parabole Cartésienne, il suffit de savoir calculer (α, β, γ) : les algorithmes cités en fin du paragraphe ci-dessus suffiront alors pour pouvoir mettre en place ce cercle (s'il n'est pas vide). C'est ce que nous allons faire brièvement. Mais nous verrons que Descartes a tenu lui-même à inscrire, toujours sur la fameuse figure *princeps* et évidemment aux dépens de la clarté qu'on aurait aimé trouver sous sa plume, les étapes essentielles d'une construction effective. La description précise de ce bien joli jeu de règles et de compas, tout à fait à l'ancienne, fera l'objet de l'avant-dernière section de ce chapitre.

Indiquons les résultats du calcul du triplet (α, β, γ) en fonction des coefficients (p, q, r, s, t, u) et, pour simplifier les formules, de (b, c, d), déjà connus, qui donneront des expressions moins lourdes [25]. La détermination des détails est laissée au lecteur, qui peut de toutes façons vérifier sans grande peine nos affirmations en recombinant toutes ces valeurs pour retrouver le sextuplet fondamental (p, q, r, s, t, u).

a) $\alpha = c - \dfrac{t}{2\,d\sqrt{u}} \cdot$

b) $\beta = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{r}{2\,d} + 2\,bc - \alpha b\right) = \dfrac{1}{2\,d^2}\left(r + 2\,\sqrt{u} + \dfrac{b\,t}{\sqrt{u}}\right) \cdot$

c) $\gamma = \dfrac{s}{d^2} + c\left(2\,\alpha - c + 2\,\dfrac{b^2}{d}\right) \cdot$

On constate sur ces égalités que l'abscisse β du centre du cercle est certainement strictement positive, mais que l'on ne peut rien dire *a priori* sur le signe des deux autres expressions trouvées, ni *a fortiori* sur celui de $\alpha^2+\beta^2-\gamma$. Toutefois, comme dans le cas des équations de degré quatre, ce dernier nombre est clairement positif ou nul si l'équation admet une racine réelle y_0, puisqu'alors

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2$$

où x_0 et y_0 sont liés par la relation $[\,ii\,]$.

25. À partir de la seconde, nous considérons également α comme connu.

La construction cartésienne de ce cercle

Le « troisième tiers » de notre figure cartésienne préférée concerne la construction du cercle qui doit couper la Parabole Cartésienne. Il est représenté schématiquement ci-dessous : deux droites, trois cercles et cinq points. C'est en fait plus symbolique que réellement efficace de A à Z, car une construction vraiment complète demanderait de nombreux compléments. Toutefois son auteur a choisi avec sagesse de nous montrer simplement les quatre étapes essentielles du procédé, en effaçant des constructions auxiliaires inspirées de son Livre Premier comme les déterminations successives de $\sqrt{u}$, puis de $2\,\dfrac{\sqrt{u}}{pd}$ *etc.* qui auraient rendu la figure générale totalement illisible.

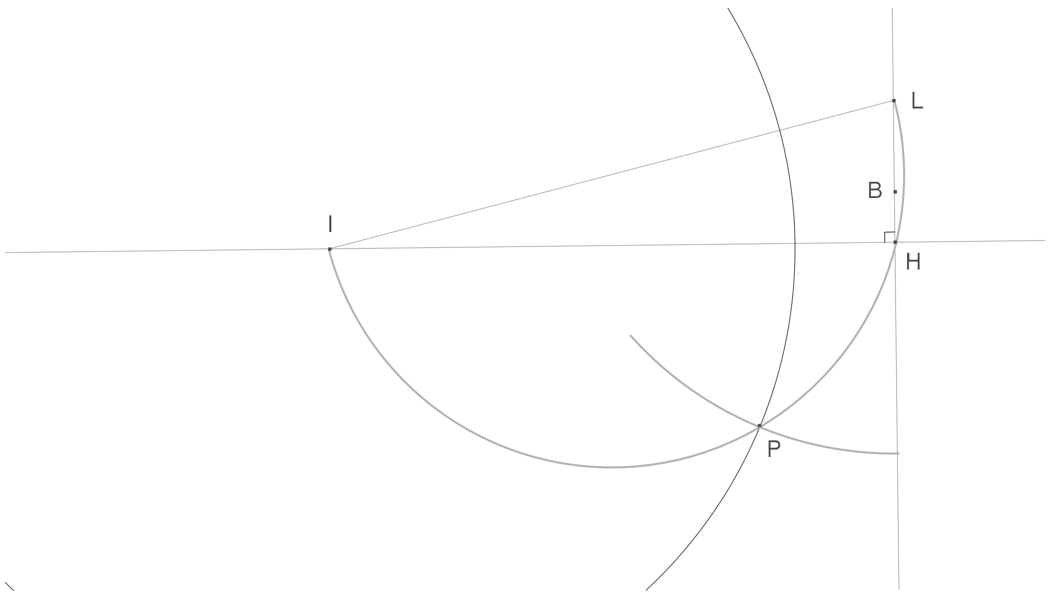


FIGURE 11.10 – *La construction cartésienne du cercle auxiliaire*

Le point B est, pour nous, l'origine des coordonnées (non explicitées par Descartes), avec les abscisses y comptées horizontalement vers la gauche, et les ordonnées x verticalement vers le haut. Il faut construire successivement quatre points L, H, I et P tels que le cercle cherché soit le cercle de centre I passant par P.

- Le point L est déterminé par la construction à partir de B, vers le haut, de la longueur $BL = c = \dfrac{\sqrt{u}}{bd}$ (rappelons que b et d sont calculés en premier dans le processus cartésien exposé plus haut).

- Le point H, sur la droite BL et au-dessous de L, est déterminé par la longueur $HL = \dfrac{t}{2\,d\,\sqrt{u}} = c - \alpha$. Par suite la mesure algébrique de BH est égale à α, nombre qui peut être positif ou négatif (comme c'est le cas ici).

- Le point I est déterminé, à gauche sur la perpendiculaire issue de H à l'axe des ordonnées, par la longueur $HI = \dfrac{1}{2\,d^2}\left(r + 2\sqrt{u} + \dfrac{b\,t}{\sqrt{u}}\right) = \beta$, nombre toujours positif.

- Le point P est l'une des deux intersections du cercle de diamètre LI et du cercle de centre L et de rayon $\sqrt{\dfrac{s + p\sqrt{u}}{d^2}} = \sqrt{\dfrac{s + 2\,b^2cd}{d^2}}$.

Cela termine la construction, car l'égalité $HB^2 + HI^2 - PI^2 = \gamma$ se vérifie aussitôt à partir du théorème de Pythagore appliqué aux deux triangles rectangles IHL et IPL

$$\begin{aligned} HB^2 + HI^2 - PI^2 = HB^2 + PL^2 - HL^2 &= \alpha^2 + \frac{s + 2\,b^2cd}{d^2} - (c - \alpha)^2 \\ &= \frac{1}{d^2}\,(s + 2\,b^2cd - c^2d^2 + 2\,\alpha\, cd^2) = \gamma. \end{aligned}$$

On trouvera la démonstration originale, complète mais très lourde, de Descartes en les quatre pages 408-411 de ses *Essais* (480-483 dans AT VI).

Il est très facile aujourd'hui de ramener ainsi ces pages opaques, car bourrées de calculs, à une courte vingtaine d'égalités[26] : il suffit d'un peu de sens algébrique et d'affection pour la géométrie, en tout cas pour un moderne fort de près de quatre siècles de cartésianisme mathématique. Mais il ne faut pas en diminuer pour autant l'admiration nécessaire devant un tel *tour de force*, sans doute équivalent à celui de la découverte des Ovales, qui prouve la profonde originalité de Descartes mathématicien, en dehors même de son

26. Si l'on ajoute à celles-ci le travail effectué plus haut pour indiquer comment obtenir les coefficients de la parabole et du cercle auxiliaires en fonction de ceux de l'équation.

invention de la géométrie analytique[27] qui bouleversera la vision des sciences jusque là essentiellement descriptives et qui basculent aussitôt dans le quantitatif pour donner à l'Homme tout un trousseau de clefs de la Nature. Il évoque ensuite la construction de quatre moyennes proportionnelles, grâce à une équation déjà rencontrée, à quelques lettres près, dans la description de divers traitements d'équations qui ouvre le Livre Troisième, en donnant les valeurs des coordonnées du centre du cercle auxiliaire, et plus brièvement encore la « pentasection » d'un angle, sans aucun doute par souci de symétrie d'avec les équations du troisième degré : mais ici ces deux cas particuliers de sa méthode n'ont plus du tout le même caractère générateur, et perdent beaucoup de leur intérêt.

À noter ensuite quelques phrases un peu étranges

« *En plusieurs de ces exemples*[28]*, il peut arriver* [...] *que cette construction ne soit pas commode pour la pratique. A quoy il serait aysé de remedier en composant d'autres regles, à l'imitation de celle cy, comme on peut en composer de mille sortes.*

Mais mon dessein n'est pas de faire un gros livre, & je tasche plutôt de comprendre beaucoup en peu de mots : comme on jugera peut-être que iay fait, si on considere, qu'ayant reduit à une mesme construction tous les Problesmes d'un même genre, iay tout ensemble la façon de les reduire à une infinité d'autres diverses ; & ainsi de resoudre chascun d'eux en une infinité de façons. »

Prises au pied de la lettre, elles signifient qu'il existe des variantes possibles, et que par exemple d'autres courbes que la Parabole Cartésienne peuvent permettre la résolution graphique de toute équation du sixième degré. Mais on peut sans doute aussi les interpréter de manière plus large, et comprendre que Descartes lègue ici une sorte de testament orgueilleux : voyez ce que j'ai pu faire grâce à mon outil analytique, à vous d'utiliser toute sa puissance pour vous attaquer, de mille manières possibles, à toutes sortes de problèmes mathématiques. Aujourd'hui, face à nos écrans, nous nous moquons bien entendu depuis longtemps de la résolution de ces équations : par contre, notre interprétation élargie a naturellement gardé toute sa valeur et c'est justement ce qui fait la gloire de Descartes mathématicien.

27. Qui joue ici un rôle, certes, mais discret.

28. Comme dans le cas de six racines proches les unes des autres, comme $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

En guise de conclusion

Ainsi se termine l'exposé d'une méthode sans pareille pour déterminer géométriquement des segments de longueurs égales aux racines (forcément réelles) d'une équation de degré 5 ou 6 : nous avons vu combien Descartes en était fier [29].

La qualité inventive de ces constructions est indéniable, et Descartes a ainsi dépassé de la tête et des épaules tous ceux qui, comme Viète, avaient essayé d'aller plus haut que Cardan et Ferrari. Il est incontestablement le premier à avoir dépassé, par une technique tout à fait personnelle, la barrière apparemment infranchissable du degré cinq. Joseph-Louis Lagrange expliquera [30] pour quelle raison profonde et abstraite les méthodes algébriques traditionnelles fonctionnaient bien jusqu'au quatrième degré inclus ; enfin Abel puis Galois montreront, assez longtemps après, pourquoi il était en effet nécessaire d'abandonner ici la recherche traditionnelle de radicaux superposés qui s'enchevêtrent pour ouvrir des sentiers tout autres [31].

Mais il reste à voir si sa façon de faire, bien peu maniable au delà du degré quatre, est généralisable aux cas plus lourds : la réponse est malheureusement négative, et c'est ce que nous examinerons dans le chapitre de conclusion sur *La Géométrie*.

---

29. S'il a été original même pour les équations de degré deux et quatre, nous donnant une première méthode, hors *Géométrie*, à base de compas très singuliers, puis une seconde analogue à celle de ce chapitre, c'est surtout pour le degré six qu'il a été sans rival, même si Roberval a pu légèrement simplifier son travail, comme le montre la lettre de Carcavi du 24 septembre 1649 (AT V page 418, en réponse à une lettre du 17 août, page 398). Cela dit, l'histoire a montré que c'était Viète qui avait raison en explicitant les racines par leurs décimales : Descartes n'aura donc pas de successeur.

30. Essentiellement dans un mémoire fécond présenté en 1771 devant l'Académie de Berlin, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (Tome III de ses *Œuvres complètes* chez Gauthier-Villars, pages 205-421), repris pour l'essentiel en 1798 dans son traité *De la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la Théorie des équations algébriques* (Duprat, an VI) formant le Tome VIII de ses *Œuvres complètes*.

31. On voit donc, après coup, que Descartes avait donc parfaitement raison de se tourner brutalement vers d'autres techniques.

Chapitre 12

Conclusion

La Géométrie est le principal traité mathématique de Descartes. Son titre semble très clair à tous, d'autant plus qu'un coup d'œil sur l'intérieur montre qu'il ne contient pas moins de 49 figures [1] en 117 pages : une toute les deux pages et demie !

Pourtant le sentiment commun qui veut y voir un livre consacré aux points, aux droites et à toutes sortes de courbes, avec leur normales et tangentes, en quelque sorte en ligne des anciens d'Euclide à Pappus, n'est peut-être pas aussi évident qu'il y paraîtrait au premier coup d'œil. Si beaucoup de commentateurs de ce Traité y voient comment enrichir considérablement la puissance de la géométrie par l'introduction d'*outils algébriques* très puissants (c'est ce que l'on appelle depuis la *géométrie analytique*), on peut au contraire y lire comment la géométrie classique - c'est-à-dire en son temps celles des Anciens -, mais fortement enrichie par Descartes, lui permet de croire qu'il a réglé une fois pour toute le problème le plus important de l'algèbre, à savoir résoudre toutes les équations algébriques, et ce grâce à des *outils géométriques* nouveaux, *id sunt* des courbes définies par l'annulation de polynômes de tous degrés.

Il y a là deux options qui s'opposent visiblement de manière brutale. Une seule chose est claire et doit être admise par tous : *La Géométrie* est un livre assez riche pour pouvoir être lu à partir de ces deux points de vue contradictoires, et il serait très inconcevable que Descartes n'ait pas eu les deux fers au

1. Dont certaines peuvent figurer jusqu'à quatre fois à des endroits différents.

feu. Pour le reste, les textes ne permettent pas vraiment de trancher de manière décisive, même si l'on peut trouver ci-dessous une indication forte en (re)lisant avec un œil neuf la table des matières de Descartes reprise en termes modernes[2]. Elle permet de voir autrement la structure du Traité, qui a toujours posé problème[3] surtout en raison de la fin du Livre Second (les normales et leurs applications aux Ovales, qui dans la vision classique apparaissent en effet un peu comme des ajouts, non totalement justifiés et surtout mis en un endroit qui ne s'imposait pas nécessairement).

La seconde vision - un traité des équations, destiné à *terminer les mathématiques*[4] puisque résolvant l'énigme imposée par l'impossibilité de dépasser le travail des Cardan et Ferrari bloqués au quatrième degré - permet de lire au contraire bien plus aisément cette Table[5]. Le premier item concerne le premier, puis le second degré, les tous derniers réglant le problème pour le troisième et le quatrième degrés, puis le cinquième et enfin le sixième, avec une ouverture un peu lyrique vers une solution du problème le plus général par une récurrence évoquée dans la toute dernière page.

Les passages qui semblaient mal placés s'y trouvent subitement logiquement réhabilités, *puisqu'ils apparaissent alors comme étude incontournable des éventuelles racines multiples d'une équation algébrique*, qu'il fallait traiter avant de passer à une description - faite au Livre Troisième - de procédés géométriques d'intersections, éventuellement multiples, de courbes géométriques prises deux à deux. Est-ce là un indice suffisant ?

2. Et légèrement simplifiée, en passant de 61 parties à 32 par regroupements de pages contiguës consacrées au même thème.

3. Voir notamment le très riche article de Henk J.M. Bos, *The structure of Descartes' Géométrie* dans *Descartes, Il metodo e i saggi. Atti del Convegno per il 350e anniversario della pubblicazione del Discours de la Méthode e degli Essais*, 2 vols. (ed. Giulia Belgioioso, Firenze, 1990), et traduit dans la *Revue d'Histoire des Sciences, 51(2-3) : 291-317, 1998.*

4. La fin du dix-huitième siècle verra la même illusion, puisque l'on pensait alors pouvoir réduire l'évolution de l'univers à la résolution de quelques équations différentielles.

5. Les appellations abrégées Pappus I et II y visent des problèmes voisins : nous avons simplement voulu distinguer entre le problème restreint noté Pappus II (celui qui avait été résolu par Apollonius et concernait trois ou quatre droites), et le Pappus I qui désigne son extension à un entier arbitraire. Par contre le terme Pappus III renvoie au *second problème de Pappus*, qui n'a rien à voir avec le(s) précédent(s), sauf qu'ils figurent tous dans les œuvres du même auteur.

Noter que les parties A, B, C, D, E, F, G, H, I et J sont respectivement analysées dans nos chapitres 2, 3, 4-5-6, 7, 8, 12, 9, 9, 10 et 11.

Une Table des matières en mots d'aujourd'hui

PLAN DE *LA GÉOMÉTRIE* (297/413)

(les 61 items de Descartes regroupés en 32)

Les pages sont numérotées d'après l'édition originale des *Essais*

LIVRE PREMIER (297/314)

« **Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites** » (9 items regroupés en 5)

Résolutions graphiques des équations de degré au plus deux

LIVRE SECOND (315/369)

« **De la nature des lignes courbes** » (20 items regroupés en 12)

Courbes géométriques : équations et normales

C) ***Générations de courbes et équations algébriques*** (315/342)

6.- Courbes géométriques et courbes mécaniques - 315/319

7.- Parabole Cartésienne et transformation de Descartes - 319/324

8.- Reconnaître Pappus II (trois ou quatre lignes) - 324/335

9.- Parabole Cartésienne et Pappus I à cinq lignes - 335/339

10.- Constructions/descriptions algébriques de courbes - 339/342

D) ***Racines multiples et normales*** (342/352)

11.- Intersections d'un cercle et d'une courbe - 342/343

12.- Exemples : ellipse, parabole et ovale cartésienne - 343/345

13.- Racines « entièrement égales » et normales - 345/347

14.- Exemples (idem plus la conchoïde) - 347/352

E) ***Ovales cartésiennes et dioptrique*** (352/368)

15.- Descriptions et genres, applications optiques - 352/360

16.- Preuve synthétique de l'astigmatisme ovalaire - 360/368

F) ***Normales dans l'espace*** (368/369)

17.- Projeter sur deux plans perpendiculaires - 368/369

LIVRE TROISIÈME (369/413)

« De la construction des Problesmes, qui sont Solides, ou plusque Solides » (32 items regroupés en 15)

Résolutions graphiques des équations de degré au moins trois

Un travail inachevé

Lisons avec le plus grand soin la toute dernière page de *La Géométrie*, censée naturellement fournir la clef de ce Traité, évidemment fondamental pour l'entrée dans un monde scientifique « moderne », dominé par le Calcul et non plus limité aux seules observations expérimentales, si subtiles soient-elles

« *Mais mon dessein n'est pas de faire un gros livre, & ie tasche plutost de comprendre beaucoup en peu de mots : comme on jugera peutestre que iay fait, si on considere, qu'ayant reduit à une mesme construction tous les Problesmes d'un mesme genre, iay tout ensemble donné la façon de les reduire à une infinité d'autres diverses ; & ainsi de résoudre chascun d'eux en une infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant construit tous ceux qui sont plans, en coupant d'un cercle une ligne droite, & tous ceux qui sont solides, en coupant aussy d'un cercle une Parabole ; & enfin tous ceux qui sont d'un degré plus composés, en coupant tout de mesme d'un cercle une ligne qui n'est que d'un degré plus composée que la Parabole ;* ***il ne faut que suivre la mesme voye pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini****. Car en matiere de progressions Mathematiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaysé de trouver les autres. Et i'espere que nos neveux me sçauront gré, non seulement des choses que iay icy expliquées ; mais aussy de celles que j'ai omises volontairement, affin de leur laisser le plaisir de les inventer.* »

Descartes nous encadre bien tout son traité : en un premier temps, il règle le cas des problèmes *plans*, c'est-à-dire du premier et du second degré, c'est-à-dire résolubles avec une règle et un compas [6]. Même le cas des équations du premier degré exige un compas : pour tracer des droites parallèles présentes dès la seconde page du livre. Pour le second, l'outil de base est de couper un cercle par une droite.

Après de longs développements consacrés à la présentation de la méthode analytique basée sur l'introduction des coordonnées et un certain nombre de ses conséquences, comme la détermination de normales et de tangentes à une

6. Voire avec un compas seul, comme on l'apprendra en 1797 dans le livre *Geometria del compasso* de l'Italien Mascheroni (1750-1800), qui avait attiré l'attention de Bonaparte à qui il avait été dédié. Apparemment l'auteur était inconscient du fait que cela avait déjà été démontré en 1672 dans le livre *Euclides danicus* par le Danois Georg Mohr.

courbe donnée basée sur la notion de racine multiple d'une équation, il passe à la résolution graphique des équations de degrés trois et quatre, effectuée grâce aux intersections de cercles et de paraboles ordinaires.

Enfin le livre se termine [7] par celle des équations de degrés cinq et six. Cette fois-ci, il s'agit de couper des cercles par des Paraboles cartésiennes, images des paraboles usuelles par la Transformation de Descartes.

Visiblement l'espoir du chercheur est que le passage de l'une des courbes à l'une de ses transformées permettant de passer à « *un degré plus composé* » puisse être généralisé (« *suivre la mesme voie* ») : par exemple, pour résoudre des équations de degrés sept et huit, il suffirait de couper des cercles par des transformées (de Descartes) de Paraboles cartésiennes, et ceci à l'infini. Il s'agit là d'un appel explicite à une récurrence, malheureusement beaucoup trop vague. Cette intuition est-elle soutenable ?

En fait, nous prétendons pouvoir démontrer ici que ce n'est pas le cas *si l'on se limite à une Transformation qui prend comme « rail » l'asymptote de son objet initial*, puisque le premier échelon recourait l'axe de la parabole ordinaire qui est la principale droite associée à cette courbe. Le grand avantage de cette façon de faire, qui paraît bien raisonnable, c'est qu'une équation de la transformée, une 3-parabole, serait alors la généralisation évidente de celle de sa génitrice puisqu'elle s'écrirait

$$y = \frac{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}{x^2}$$

avec (a, b, c, d) comme paramètres *a priori* arbitraires. Nous allons montrer qu'il n'en est rien et que l'optimisme de Descartes était pour le moins prématuré, sinon injustifié.

Une preuve

Soit donc l'équation la plus générale du huitième degré

$$0 = E(x) = x^8 - p\,x^7 + q\,x^6 - r\,x^5 + s\,x^4 - t\,x^3 + u\,x^2 - v\,x + w.$$

7. À l'exception naturellement du paragraphe ici commenté.

Nous recherchons un cercle d'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

et une 3-parabole d'équation

$$y = \varphi(x) = \frac{P(x)}{x^2} = \frac{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}{x^2}$$

tels que $E(x) = 0$ soit équivalent à la proposition : *le point de coordonnées* $\big(x, \varphi(x)\big)$ *est un point commun au cercle et à la 3-parabole considérés.*

Renversons, pour un instant, le problème : supposons donnés le cercle et la 3-parabole. Si, pour tout nombre réel x, $E(x)$ est défini par l'égalité

$$a^2 E(x) = (P(x) - \beta\,x^2)^2 + x^4\big((x-\alpha)^2 - R^2\big)$$

alors $E(x) = 0$ équivaut au fait que le point de coordonnées $\big(x, \varphi(x)\big)$ est commun au cercle et à la 3-parabole considérés. Identifions terme à terme les coefficients de ces deux polynômes, et tout particulièrement ceux de degrés 7, 3, 2, 1 et 0 en x. Cela donne explicitement les cinq nombres inconnus (p, t, u, v, w) en fonction des cinq nombres connus $(a, b, d, e, c-\beta)$

$$p\,a^2 = -2\,ab, \quad ta^2 = -2\,\big(be + d(c-\beta)\big), \quad ua^2 = d^2 + 2\,e\,(c-\beta),$$
$$va^2 = -2\,ed, \quad wa^2 = e^2.$$

Ces relations, et trois autres donnant (q, r, s) en fonction de $(a, b, c, d, \alpha, \beta, R)$, nous permettent de recommencer sur ce cas une recherche d'équivalences déjà mise deux fois en œuvre, pour les équations de degrés quatre et six.

Si (p, q, r, s, t, u, v, w) ont les valeurs ainsi calculées, alors il est équivalent de dire que « x est racine de $E(x) = 0$ » ou que « le point de coordonnées $\big(x, \varphi(x)\big)$ est commun aux deux courbes ».

Cela dit, ce qui nous intéresse ici c'est *le problème inverse* : $(a, b, c, \dots)$ sont inconnus et $(p, q, r, \dots)$ connus. À la recherche d'un contre-exemple [8], nous nous placerons dans le cas particulier où $E(x) = 0$ possède huit racines

8. Présenté pour la première fois par l'auteur durant le *French Norwegian Symposium on Computer-Aided Mathematics in Education and Industry* au Sanner Hotel (Gran, Norvège), 2-4 septembre 1993.

réelles deux à deux distinctes. Dans ce cas, tout polynôme ayant mêmes racines réelles que E est nécessairement proportionnel à E : cela résulte aussitôt d'un théorème démontré par Descartes lui-même au début de son Livre Troisième. Par suite la procédure d'identification terme à terme indiquée plus haut fournit donc bien, à un coefficient près, le polynôme $E(x)$ du départ.

Faisant varier le cercle et la 3-parabole de toutes les manières possibles, l'équation $E(x) = 0$ qui leur est associée est-elle la plus générale de toutes les équations du huitième degré ? Descartes l'a sans doute cru, puisqu'il affirme que sa méthode est universelle (« *en coupant tout de mesme d'un cercle une ligne qui n'est que d'un degré plus composée* »). C'est ce qu'il reste à infirmer sur un cas particulier.

Pour des raisons techniques plutôt abstraites qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter ici [9], on peut déduire des cinq relations ci-dessus l'égalité suivante [10]

$$H(p, t, u, v, w) = (8\,tw^2 + v^3 - 4\,uvw)^2 - 64\,p^2w^5 = 0$$

qui montre que toutes les équations $E(x) = 0$ ne sont pas susceptibles d'être associées à au moins un couple formé par un cercle et une 3-parabole ! Nous sommes sur la bonne voie. Il est vrai que le phénomène analogue pour le degré six peut être rencontré, mais s'évanouit dès que l'on ajoutait une constante suffisamment grande à toutes les racines. Est-ce encore le cas pour le degré huit ? Prenons un exemple, l'un des plus simples possibles [11]

$$\begin{aligned} E(x) &= (x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)\,(x-5)\,(x-6)\,(x-7)\,(x-8) \\ &= x^8 - 36\,x^7 + 546\,x^6 - 4536\,x^5 + 22449\,x^4 \\ &\quad - 67284\,x^3 + 118124\,x^2 - 109584\,d + 40320. \end{aligned}$$

9. Qu'il soit permis à l'auteur de jouer à son tour à imiter Descartes, qui se contente si souvent de demander à son lecteur de vérifier tel ou tel résultat - par exemple sur les normales à une Ovale - sans rien dévoiler de la route qu'il a suivie. Il s'agit de manipulations sur les racines de $E(x)$, fortement aidées par le recours à un logiciel de calcul formel, *Mathematica* en l'occurrence. Mais la vérification de ce qui est écrit ici est entièrement faisable à la main, sans ordinateur même, et c'est ce qui importe au vu de notre objectif.

10. Dans les cas simples usuels, cinq relations entre cinq inconnues permettent souvent de déterminer ces dernières sans problème, mais on sait bien qu'il existe des systèmes sans solution, ou qui n'ont de solution que si certaines conditions sont réunies : c'est la cas ici. Mais, au dix-septième siècle, ce genre de phénomène aurait beaucoup étonné.

11. Ici encore le recours à un système informatique, théoriquement non indispensable, est bien confortable.

Passons à l'équation « translatée » $E(x-\delta)=0$; pour δ assez grand, l'expression associée $H(p,t,u,v,w)$ doit être nulle : comme elle est visiblement polynomiale en δ, *elle doit donc être identiquement nulle*. En particulier, pour $\delta=0$, on doit avoir

$$0 = H(36, 67284, 118124, 109584, 40320).$$

Or ce nombre vaut approximativement $3,24.10^{31}$. L'expression H n'est donc pas automatiquement nulle (et cela apparaît même très rarement).

Pour les Saint-Thomas, poussons un peu plus loin le travail sur ce cas particulier. Nous demandons au lecteur de croire les calculs résumés ci-dessous : leur vérification est à la portée de tous, les développer en détail ici serait lassant et improductif. Les coefficients de $E(x-\delta)$ sont pénibles à déterminer, sauf pour deux, à savoir $p = 4\,(2\delta+9)$ et

$$w = (\delta+1)\,(\delta+2)\,(\delta+3)\,(\delta+4)\,(\delta+5)\,(\delta+6)\,(\delta+7)\,(\delta+8).$$

Pour démontrer l'absurdité de notre hypothèse, il n'est pas nécessaire de calculer exactement H, polynôme en δ. Il suffit de chercher son terme en δ^{36}, qui atteint le plus haut degré. Ce calcul est très facile, et donne $262144\,\delta^{36}$, soit encore $(2\,\delta^2)^{18}$, qui n'est pas nul. Voila donc une seconde raison appuyant la première.

Or la théorie cartésienne est, pour autant qu'elle reste peu explicitée, qu'étant donnée par exemple l'équation très simple que nous avons considérée, il existe une translation (changement de x en $x-\delta$) suffisamment importante pour que la nouvelle équation obtenue soit susceptible de déterminer un cercle et une 3-parabole convenables. Comme ce n'est pas le cas ici, la méthode (supposée) de Descartes échoue donc au moins pour un cas d'équation du huitième degré. Il ne serait pas difficile de multiplier les exemples [12], mais un seul suffit, et celui-là peut être vérifié par tous.

L'annonce triomphante de Descartes en fin de livre était donc pour le moins très prématurée ; peut-être est-elle quand même exacte, mais dans ce cas la

12. Les calculs sont très faciles dans le cas de $E(x)=x^7(x+1)$ par exemple. Il est vrai que les racines de E ne sont pas ici vraiment distinctes ; cela dit, regarder crayon en main ce cas donne un bonne façon de voir pourquoi H, qui vaut alors $\delta^{35}(56\,\delta^2-119\,\delta+64)$ n'est pas identiquement nul.

procédure doit différer très fortement de celle suivie pour le passage du degré quatre au degré six ; par exemple la transformée de la Parabole Cartésienne doit ne pas conserver le rail, voire être mise en œuvre sur une courbe tournée d'un certain angle [13].

Quoi qu'il en soit, le passage de six à huit, et *a fortiori* à des degrés arbitraires en conservant l'esprit des chapitres précédents est, soit impossible, soit beaucoup plus compliqué de ce que les quelques mots de l'auteur laissent entendre (« *lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaysé de trouver les autres* ») et nous devons, à regret, conclure en pointant que *Descartes a ici commis une erreur grave*, que sans doute il n'aurait pu lui-même corriger quelle qu'ait été sa virtuosité calculatoire dont il nous a donné tant de preuves ailleurs.

Acquis et rebuts de *La Géométrie*

Comme tout livre fondamental dans l'histoire de la pensée, *La Géométrie* présente un actif et un passif, qu'il est bon de présenter avec la plus grande objectivité possible. Après plus de trois cent soixante-dix ans, le passage de l'œuvre au trébuchet nous permettra de présenter une conclusion argumentée à une question lancinante mais juste : pourquoi ces pages sont-elles toujours présentées comme une pierre milliaire de la science moderne ?

Les joyaux de *La Géométrie*

La principale gemme illuminant de son éclat *La Géométrie* est, évidemment, à la lumière de ce que nous savons aujourd'hui, l'invention de la géométrie analytique, dont les fondements ont été jetés incidemment dans le Livre Premier, et qui est pleinement utilisée dans tout le Traité puisqu'elle est à la fois l'outil qui lui donne des courbes de degré aussi élevé que possible, et aussi le moyen de résoudre toute équation algébrique par intersection de cercles et de certaines de ces courbes. Mais il s'y trouve bien d'autres innovations plus ou moins importantes, presque toujours liées si l'on y réfléchit à son algorithme

13. Autre point gênant pour la récurrence évoquée : la parabole usuelle n'est pas la transformée de Descartes d'une droite, qui est une hyperbole.

ou à l'autre succès dont il est si fier (la solution du problème fondamental de la Dioptrique par les Ovales). En voici un recensement rapide.

• Une liberté toute nouvelle quant à la notion de « dimension » d'un coefficient d'une équation, grâce au choix préalable d'une unité de longueur de mesure 1 [*Essais*, 297 et AT VI, 370], puisqu'il est alors inutile d'homogénéiser mécaniquement tous les monômes d'un polynôme.

Ce simple fait cache une véritable révolution : l'utilisation des nombres en géométrie n'est plus maintenant limitée sévèrement aux longueurs, aires ou volumes, mais elle s'est dégagée de son carcan originel et il sera par exemple possible de travailler désormais avec des puissances strictement supérieures à la troisième, ce qui était évidemment indispensable pour la mise en œuvre de l'algorithme fondamental.

• La méthode (découlant de l'analyse platonicienne) consistant à partir d'une figure *a priori* où *tout est à nommer*, suivie d'un « démêlage » du connu et de l'inconnu, peu à peu dévoilé [*Essais*, 301 et AT VI, 373], et qui renvoie en un certain sens au *Discours* et à la systématisation du travail scientifique jusqu'alors trop attaché à la seule intuition désordonnée.

• La classification des polynômes par une première ébauche de la notion de leur degré [*Essais*, 308, 313, 319, 413 et AT VI, 381, 386, 392 et 485 (par exemple)], elle aussi facile à rattacher au troisième précepte, sinon même au quatrième.

• La classification des courbes par l'invariance par rapport au repère cartésien de la notion de genre [*Essais*, 320 et AT VI, 393].

• La maîtrise des subtiles obligations qu'il s'impose lui-même pour qu'une courbe puisse être « reçue » [*Essais*, 316 et AT VI, 389]. Par exemple : être constructible point par point ne suffit pas, même si c'est suffisamment commode pour la pratique usuelle - voir ce qu'il fait pour sa Parabole -). Même si ce point sera oublié par ses successeurs immédiats en géométrie différentielle, adossée au tout puissant *Calcul différentiel et intégral*, qui feront fi des distinctions cartésiennes considérées comme oiseuses, il en subsiste encore aujourd'hui quelque chose, ne serait-ce que parce qu'elle a permis la constitution d'un domaine de travail, tout entier consacré à la généralisation de la notion des courbes et surfaces « géométriques » de Descartes (la Géométrie Algébrique), dont l'importance dans la recherche est encore primordiale.

• La notion toute neuve de courbe algébrique, dont on a déjà souligné plus haut la brillante descendance contemporaine, concept profond et d'une nouveauté étonnante [*Essais*, 315-6 et AT VI, 388-9].

• Une intuition juste sur l'étendue de l'ensemble des courbes décrites à l'aide de machines (*systèmes traceurs articulés*, dont les compas dont il est l'inventeur), qu'il identifie - évidemment sans aucune preuve - à celui des courbes algébriques [14] [*Essais*, 317 et AT VI, 391].

• La notion de transformation géométrique (par le biais d'un exemple original : la transformation de Descartes), dont l'extraordinaire fécondité a considérablement enrichi l'étude de la géométrie classique et a eu d'importantes retombées dans un domaine *a priori* bien éloigné, l'Analyse classique [*Essais*, 319 et AT VI, 393].

• La maîtrise du maniement de symboles nouveaux, tout particulièrement le système de notation cartésienne toujours en vigueur, distinguant paramètres et variables (par exemple suivant leur position dans l'alphabet). Son influence fut considérable, ne serait-ce que parce que cela a ouvert un champ renouvelé immense à l'intuition : pourquoi ce qui s'exprime simplement ne serait-il pas simple [*Essais*, 322 et AT VI, 394 (par exemple)] ?

• Une toute nouvelle façon, globale, de voir les plus vieilles et les plus sacrées de toutes les courbes : les coniques, ainsi rassemblées dans une même famille à la définition la plus simple qui soit (courbes admettant des équations du second degré), comme l'avaient pressenti Pappus et quelques autres précurseurs [*Essais*, 325 et AT VI, 397].

• L'idée qu'une courbe est toute entière contenue dans son équation, d'où l'on peut extraire à volonté toutes les propriétés, qui explique l'extraordinaire succès de la géométrie analytique, toujours valable au vingt-et-unième siècle [*Essais*, 341 et AT VI, 412-3].

14. Il faudra attendre deux cent quarante ans pour que l'avocat anglais Sir Alfred Bray Kempe légitime ce résultat dans l'article *On a general method of describing plane curves of the* n*th degree by linkwork* (pp. 213-6 du volume 7 des *Proceedings of the London Mathematical Society* pour 1876), puis dans *How to drive a straight line : A lecture on linkages*, (conférence tenue en 1877 devant la *Royal Institution*, publiée dans *Nature*).

• La notion de racine multiple, et son lien avec les tangentes (indispensable encore aujourd'hui pour la géométrie algébrique), qui établit un lien fort, et inattendu, entre géométrie et analyse [*Essais*, 346 et AT VI, 418].

• La très puissante méthode des coefficients indéterminés (illustration directe de l'idée de nommer aussi bien le connu que l'inconnu, avant que de démêler), devenu un outil de base pour bien des calculs, et aux retombées innombrables [*Essais*, 347 et AT VI, 419].

• La notion générale et une technique de mise en œuvre systématique du concept très abstrait d'élimination d'une variable entre deux équations [*Essais*, 348 et AT VI, 420].

• L'écriture systématique d'une équation sous la forme $f(x) = 0$ et non plus $g(x) = h(x)$, qui permettait d'éviter les coefficients négatifs [*Essais*, 371 et AT VI, 444].

• L'intuition (correcte) de ce qu'une équation de degré n possède n racines (complexes), qui ne sera enfin justifiée qu'à l'extrême fin du dix-huitième siècle par Gauß démontrant un énoncé précis dû à d'Alembert, mais qui pourrait aussi porter le nom de Descartes, même si ce dernier se garde bien d'en parler autrement que par allusion [*Essais*, 372 et AT VI, 444].

• Une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine de P, à savoir : $(x - a)$ divise $P(x)$, résultat déjà connu bien avant lui, mais dont il tirera d'intéressantes conséquences [*Essais*, 372-3 et AT VI, 444-5].

• La règle dite *des signes*, portant son nom, aussi simple à exprimer que complexe à prouver, fournissant un indice précis quant au nombre de racines positives (« *vraies racines* ») d'une équation, basée sur une intuition qui nous reste obscure, et dont il ne possédait certainement pas de démonstration [*Essais*, 373 et AT VI, 446].

• Une ébauche des relations entre racines et coefficients d'un polynôme, avec des vues pénétrantes (non prouvées, mais justes) sur des manipulations rendant par exemple positives toutes les racines, en l'occurrence grâce à une simple translation qui joue un rôle important dans son algorithme fondamental [*Essais*, 373 et AT VI, 446].

• Une ébauche de la notion de sous-anneau engendré par un élément extérieur (comme une racine carrée), concept dont la fécondité sera clairement mise en lumière par les algébristes du dix-neuvième siècle, par exemple Galois, Dedekind ou Kummer [*Essais*, 380 et AT VI, 453].

• La classification des racines selon leur type (signalons tout particulièrement l'emploi du mot « imaginaire »), toujours en relation avec les volontés normatives du *Discours de la Méthode* [*Essais*, 380 et AT VI, 453].

• Une habile technique de recherche de racines rationnelles d'équations à coefficients entiers, toujours en usage, rare témoignage (avec quelques textes de lettres) d'un certain intérêt de Descartes pour l'Arithmétique, où excellait Fermat [*Essais*, 381 et AT VI, 455].

• Une méthode originale de résolution des équations du quatrième degré, reposant sur son idée de coefficients indéterminés et distincte de celle de Ferrari qui avait le premier emporté le bastion [*Essais*, 383 et AT VI, 457].

À tout cela il faut bien entendu ajouter l'évocation de très nombreux tours de force techniques : construction d'une normale à une Conchoïde [*Essais*, 350 et AT VI, 423] ou, surtout, à une Ovale [*Essais*, 360 et AT VI, 432], sans oublier la très remarquable détermination graphique des racines d'une équation du sixième degré, bien désuète pour nos yeux d'aujourd'hui mais qui n'en reste pas moins admirable par sa profonde originalité [*Essais*, 403 et AT VI, 477] *etc.*

Échecs, erreurs et énigmes de *La Géométrie*

Parmi les réussites recensées ci-dessus, certaines n'ont pas survécu. Il faut au moins signaler, dans cette catégorie, les avancées suivantes, dont Descartes était souvent fier, mais qui ont été depuis naturellement dépassées, par le mouvement qu'il avait lui-même lancé, à savoir

• Sa méthode de résolution graphique des équations, sans objet lorsque l'on dispose de moyens de calcul (logarithmique ou informatique) rendant obsolète toute détermination graphique, évidemment bien moins précise.

• La Parabole Cartésienne, retrouvée par Newton sous le nom de « Trident », morte comme l'algorithme général ci-dessus.

• Sa méthode de construction des normales, presque immédiatement remplacée par des techniques proches de celles de Fermat ou Roberval et systématisée par le Calcul Différentiel naissant de la fin de siècle.

• Sa description des coniques comme « lieux à quatre droites », bien que celle qui consiste à appeler conique toute courbe admettant une équation du second degré, idée somme toute très voisine, soit toujours vivante.

• Les Ovales de Descartes, puisque la construction d'instruments d'optique « parfaits », illusoire à cause des très grandes difficultés technologiques de leur mise au point (et Descartes eut tout loisir de s'en apercevoir), laissera la place à des instruments certes imparfaits, mais intelligemment utilisés dans le cadre de l'« approximation de Gauß », qui donneront en pratique des résultats tout à fait satisfaisants.

Quelques bavures de *La Géométrie*

À côté de ces disparitions, il est raisonnable de devoir regretter (plus de trois siècles plus tard !) un certain nombre de scories entachant *La Géométrie* par de mauvaises initiatives ou même parfois par des inexactitudes flagrantes. Nous devons citer au moins les suivantes, d'importances évidemment très différentes, mais qui déparent néanmoins quelque peu son œuvre

• Descartes n'a pas trouvé la bonne méthode de détermination des tangentes, pour des raisons en partie explicables comme on l'a vu plus haut, mais aussi par un souci excessif de se tenir éloigné d'une théorie des indivisibles qu'il connaissait assurément, mais ne dominait pas.

• Il n'a pas vu arriver l'analyse, qui explosera dès 1665-1675 et emportera tout, au moins pour un demi-siècle, trente ans plus tard, toujours à cause de son (honorable mais ici malheureux) souci d'« *éviter soigneusement la Précipitation, & la Prévention* » et de ne proposer comme vraies que des choses qu'il connût évidemment telles : à condition de se limiter aux tangentes des courbes géométriques, l'algèbre suffisait, et c'est ce qu'il fit. Pour passer aux courbes mécaniques, il lui aurait été nécessaire de présenter de manière claire et indiscutable des techniques relevant de la notion de limite, sur laquelle il avait sans aucun doute des lumières, mais dont l'incorporation dans son corpus rationnel aurait posé de graves problèmes de rigueur.

• Il n'a pas vu le concept important de courbure en un point, bien qu'il ait recherché à obtenir un contact aussi étroit que possible entre la courbe et un cercle (parce qu'il obligeait ce dernier à être centré sur un axe fixe, il ne pouvait qu'obtenir un contact général du deuxième ordre, et non du troisième ; mais cela était lié à sa stratégie générale).

• Bien que Descartes reçoive les *racines négatives* comme étant des racines, il ne reconnaît pas toujours des *coordonnées négatives*, ce qui introduit bien des complications inutiles.

• Enfin les figures qui émaillent le Traité sont très peu lisibles (ce qui va de pair avec le fait regrettable que le texte lui-même est souvent assez rude à déchiffrer), comble pour un philosophe qui a mis les préceptes du *Discours de la Méthode* sous le signe d'une excellente visibilité : la moindre des choses aurait été de présenter *clairement* et *distinctement* les illustrations d'une pensée dont il mesurait parfaitement toute l'originalité, et donc la difficulté.

À côté de ces faiblesses, ce qu'il faut bien appeler les erreurs de *La Géométrie* sont évidemment encore plus déplaisantes.

• Parmi elles, la plus regrettable a été (si notre hypothèse est justifiée) de **croire la mathématique achevée**, parce que l'algèbre l'aurait été à la suite de son travail. Il n'a jamais imaginé l'arrivée impétueuse de l'analyse, même dans l'étude du problème de De Beaune dont il aurait pu tirer la notion de fonctions exponentielle et logarithmique.

Cela dit, les autres fautes dans *La Géométrie*, pour être situées à un plan différent, n'en sont pas moins préjudiciables à la réputation de Descartes.

• La plus criarde est celle qui clôt le Livre Second au sujet des normales à une courbe gauche (*Essais* 369, AT VI 440) : il est faux que la normale à une telle courbe se projette orthogonalement suivant la normale à sa projection ; cette faute de géométrie élémentaire est surprenante. Par ailleurs il existe une infinité de telles normales !

• La plus grave d'entre elles est la dernière (*Essais*, 413 et AT VI, 485), mais aussi malheureusement celle qui sous-tend tout le livre : selon toute probabilité, la méthode de résolution graphique esquissée, parfaitement correcte jusqu'au degré six, ne fonctionne déjà plus pour l'étape suivante.

Cette remarque, certainement faite *in petto* par de nombreux commentateurs, semble à la portée d'un mathématicien un peu habile comme on l'a vu plus haut ; toutefois sa preuve nécessite un très gros travail, heureusement simplifié par le recours à un système de calcul formel [15].

Le Traité nous a d'ailleurs donné, ci et là, quelques autres pseudo-preuves par analogie, que Descartes voyait pourtant « évidemment » conformes à son premier précepte du *Discours de la Méthode*. Persuadé de savoir repérer et classifier mieux que quiconque, Descartes n'est pas toujours aussi prudent qu'il enjoint de l'être. S'il a découvert des « ordres » jusque là ignorés, la vision qu'il en a l'éblouit trop pour qu'il ne baisse pas parfois sa garde.

Après tout, une démonstration mathématique ne reposera jamais que sur un consensus établi entre interlocuteurs de même niveau technique, arrivant à se convaincre mutuellement sans jamais pousser à leur point ultime les vérifications nécessaires. C'est pourquoi un théorème ne vaut parfois que pour son époque, et ce qui est « évidemment » convaincant ce matin sera peut-être considéré comme insuffisant demain. Descartes, Newton ou Euler ont reçu pour « vraie » telle ou telle « chose » qu'ils *voyaient* comme telle, et que nous savons aujourd'hui fausse.

Nous avons déjà signalé d'autres erreurs, parfois assez graves, comme le fait affirmé sans preuve que toute courbe algébrique serait du type décrit par Pappus [16]. D'autres inexactitudes, de moindre importance, peuvent relever parfois du lapsus, comme par exemple dans l'étude de la normale à la Conchoïde construite au Livre Second. Mais dans l'ensemble, compte tenu de l'extrême originalité des concepts et des techniques, il est normal de conclure que la qualité scientifique de ce livre est excellente.

Restent quelques obscurités et énigmes, qu'une édition moins pressée par le temps aurait sans doute réduites à néant : sur la normale à la Conchoïde par exemple, quelques explications auraient évité aux commentateurs de tenter de pénibles reconstitutions, toujours aléatoires, de la technique suivie. Peut-être même que l'obscurité de fond, majeure, qui réside dans l'ignorance où nous

15. C'est ainsi que nous avons pu construire une équation du huitième degré dont aucune intersection d'un cercle et d'une Parabole Cartésienne (généralisée suivant les indications de la fin du Livre Troisième) ne peut donner les racines.

16. Newton le lui reprochera d'ailleurs de manière cinglante dans sa note *Three mistakes in the Geometry of Descartes*.

sommes de la façon dont Descartes, voulant résoudre son épineux problème d'optique, a été amené à *deviner* la définition de ses Ovales, aurait pu être au moins partiellement levée par l'auteur, s'il avait essayé d'être parfois « *intelligible* », car le génie n'est pas plus grand de cacher les cheminements obscurs qui l'ont conduit à la lumière.

Cela dit, *La Géométrie* est ce qu'elle est, avec toutes ses facettes, brillantes et grises : une étape majeure, incomplète mais fulgurante de la Science, en mathématique mais aussi dans d'autres branches, qui s'apprêtait à entrer bientôt grâce à elle dans l'ère moderne.

Deux paradoxes fondamentaux

La Géométrie de Descartes est un traité dans lequel on trouve au moins les énoncés de deux problèmes très originaux pour son époque
• construire point par point les courbes algébriques qu'il vient d'introduire,
• résoudre les équations algébriques par un procédé géométrique universel.
Ces deux chantiers, menés de front, semblent poser à un lecteur moderne attentif des questions de logique assez embarrassantes.

Construire pour résoudre, résoudre pour construire

La Géométrie est donc un livre censé permettre, une fois lu, de maîtriser deux algorithmes théoriques totalement nouveaux (« *la Geometrie, ou c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche* », à opposer aux « *Meschaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est desirée* », *Essais* p. 315, AT VI p. 389)

1. construire (point par point) toute courbe *reçue en géométrie*[17], c'est-à-dire définie par une égalité $f(x, y) = 0$ où f est un polynôme (*cf.* un passage assez obscur des *Essais* p. 316, AT VI p. 389),
2. résoudre géométriquement (c'est-à-dire, à l'ancienne, en exhibant des segments dont les longueurs sont les racines cherchées) toute équation algébrique définie par une égalité $P(x) = 0$ où P est un polynôme (*cf.* les Livres Premier et Troisième).

17. Algébrique dans le vocabulaire actuel.

La technique du 1, construction des courbes point par point, s'appuie sur la possibilité de résoudre les équations, c'est-à-dire le 2. (cf. *Essais* p. 313, AT VI p. 386). Il ne s'étend pas aux courbes telles que la spirale d'Archimède (cf. *Essais* p. 339, AT VI p. 411).

Inversement, résoudre une équation - le problème 2. - s'effectue, d'après l'algorithme mis au point (au moins partiellement) par Descartes dans son Livre Troisième, en coupant un certain cercle par une certaine courbe géométrique, construite grâce au 1. Comment Descartes a-t-il néanmoins pu sortir de ce cercle vicieux ? A-t-il privilégié l'aide incommensurable que l'algèbre apporte à la géométrie (le 1.) ou l'inverse (le 2.) ? Bref, on en revient à la question fondamentale, déjà largement abordée : **La Géométrie est-elle un traité sur les courbes géométriques ou sur les équations algébriques** ?

Pour pouvoir répondre au paradoxe, il faut supposer ici - ce qui n'est pas le cas, mais a été sincèrement cru par Descartes - que sa technique de la résolution graphique du degré six était bien extensible à tout autre degré : « *il ne faut que suivre la même voie pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini* » (*Essais* p. 413, AT VI p. 485)[18].

Explicitation du paradoxe

Dès lors il est clair que Descartes, par son livre, croit savoir résoudre complètement deux problèmes, symbolisés ici par les lettres (E) et (C), qu'il juge essentiels :

- (E) : il sait comment construire graphiquement les racines de n'importe quelle équation $P(x) = 0$ quel que soit son degré (c'est-à-dire, pour lui, résoudre cette équation) ; notons $E(n)$ sa technique de résolution graphique des équations de degré n.

  (De fait, *La Géométrie* explicite toutes les $E(n)$ pour $n < 7$: 1 et 2 dans le Livre Premier, 3 et 4, puis 5 et 6, dans le Livre Troisième.)

  Pour ce faire, il lui suffit de savoir construire une certaine courbe auxiliaire, de degré m, qu'il coupera par un certain cercle. La lecture attentive du

18. Nous savons à quoi nous en tenir sur cet optimisme exagéré, mais pouvons tenir cela pour acquis pour essayer de comprendre la stratégie et la tactique cartésiennes.

texte montre que m est le plus grand entier inférieur ou égal à $(n+1)/2$, strictement inférieur à n dès $n = 2$.

Par ailleurs, toute équation de degré impair peut être considérée comme une équation de degré pair dont on connaît une racine arbitraire (0 par exemple) ; on peut donc supposer n pair (voir par exemple p. 403, AT VI p. 477, où le passage de 5 à 6 est présenté comme naturel).

La citation fondamentale est évidemment ici *comment, par la méthode dont ie me sers, tout ce qui tombe sous la consideration des Geometres, se reduist a un mesme genre de Problesmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation* (*Essais* p. 401, AT VI p. 475).

- (C) : il sait comment construire point par point n'importe quelle courbe définie par une équation algébrique $f(x,y) = 0$; notons $C(p)$ sa technique de construction des courbes de degré p (on dit plutôt d'ordre p, mais c'est sans importance) [19].

  Pour ce faire, il lui suffit de savoir résoudre toutes les équations de la forme $f(a,y) = 0$ et $f(x,b) = 0$, algébriques et de même degré que f, où a et b sont des constantes arbitraires : *tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'est à dire qui tombent sous quelque mesure précise & exacte, ont necessairement quelque rapport a tous les poins d'une ligne droite, qui peut estre exprimé par quelque equation, en tous par une mesme* (*Essais* p. 319, AT VI p. 392, au début du Livre Second).

Présentés ainsi, **ces deux problèmes (E) et (C) sont donc exactement équivalents**, mais le fait même que Descartes utilise chacun d'eux pour résoudre l'autre semble être un magnifique cercle vicieux. Faut-il accuser l'auteur d'un crime aussi grave ? Tout ce pesant échafaudage est-il à rejeter sans en garder quoi que ce soit ? A-t-il péché par aveuglement, par une confiance excessive en son génie ?

---

19. Il ne parle sans doute en fait que des courbes dites de Pappus - parmi lesquelles les coniques -, puis de leurs transformées par divers systèmes ou assemblages articulés, qui forment certes une sous-famille stricte, mais il est secondaire ici de savoir s'il croyait ou non avoir là une propriété générique des courbes algébriques.

Résolution du paradoxe

Il n'en est rien, et justement parce que $m < n$; un exemple simple le prouve aussitôt :

1. pour résoudre un $C(9)$ (par exemple construire un lieu de Pappus à 18 lignes donc de degré $n = 9$), il suffit de savoir résoudre $E(9)$, donc $E(10)$;
2. pour résoudre $E(10)$, il suffit de savoir construire une courbe auxiliaire - sorte de parabole ultra généralisée - de degré $m = 5$, soit $C(5)$;
3. pour déterminer $C(5)$, il suffit de savoir résoudre $E(5)$, donc $E(6)$;
4. or on parvient ainsi à un problème effectivement résolu à l'aide de $C(3)$ dans le Livre Troisième (*Essais* pp. 402 à 411, AT VI 476 à 485).

Le cas général suit exactement ces mêmes lignes : on se trouve devant une *récurrence descendante* qui réussit toujours, et que l'on pourrait même présenter comme une descente infinie à la Fermat. Le paradoxe est donc éclairci : le passage de n à $n/2$ est la clef essentielle de la cohérence du projet cartésien puisque tout cela repose fondamentalement sur l'inégalité $m < n$ (en gros m est la moitié de n).

Tout mystère est donc levé. Cela dit, reconnaissons que Descartes aurait bien du prévenir son lecteur des dessous de ses machines : il s'en est naturellement bien gardé, laissant avec délectation ses adversaires (mais du coup aussi ses futurs lecteurs) dans l'embarras de comprendre ces apparentes contradictions.

Descartes aurait-il pu faire plus simple ?

C'est maintenant le moment de se poser, comme à propos de la construction des normales, la question inévitable[20] : pourquoi ces complications inouïes, alors qu'il suffisait pour Descartes de savoir tracer le graphe de $y = P(x)$, puis de le couper par la droite d'équation $y = 0$?

Tracer $y = P(x)$ est effectivement trivial d'après les techniques des pp. 297 et 298 des *Essais* (369 et 370 dans AT VI), où sont explicitement présentées

20. Également signalée par Massimo Galuzzi, dans un livre à paraître.

addition, soustraction et multiplication graphiques à la Euclide (voir par exemple la proposition 31 du Premier Élément pour savoir *tracer une parallèle à une droite donnée par un point donné*, technique qui peut d'ailleurs être légèrement simplifiée). La méthode dite de Horner, tout à fait accessible à un algébriste consommé comme Descartes, rend en effet immédiat le calcul de $y = P(a)$ lorsque x prend la valeur constante a.

Cela dit, il n'est pas très facile de justifier pourquoi Descartes n'a pas vu (ou du moins n'a pas utilisé) cette technique si évidente pour nous. Nous ne voyons que trois pistes : la première est que, si $y = P(a)$ est résoluble en y, en revanche poser $b = P(x)$ conduit à des problèmes exactement équivalents à celui que l'on veut résoudre ! Plus généralement, Descartes veut sans doute croire qu'une courbe est constructible si, et seulement si l'on peut déterminer exactement ses intersections avec toutes droites, et non seulement celles d'une direction donnée. Une autre raison, sans doute plus proche de la réalité, est que l'idée représentée symboliquement par l'égalité « $y = P(x)$ » suppose fondamentalement la conception d'un objet mathématique très subtil, qui ne sera progressivement mis à jour que par une lente maturation de la part de Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Dirichlet... : celui de fonction. D'ailleurs *La Géométrie*, dans laquelle on peut lire plusieurs équations de courbes, n'indique nulle part explicitement la forme la plus simple et très particulière $y = f(x)$ - même pour une hyperbole (*Essais* p. 322, AT VI p. 394) - sauf peut-être pour un demi-cercle (*Essais* p. 342, AT VI p. 414). Enfin son principe de *simplicité* lui fait préférer de couper une courbe de degré (approximativement) $n/2$ par un cercle qu'une courbé de degré n par une droite. Reconnaissons néanmoins que tout cela pose problème pour un lecteur moderne, qui trouve ces circonvolutions bien trop archaïques et complexes pour un esprit cartésien du vingt-et-unième siècle !

Quelle place pour la géométrie analytique ?

Quelles que soient les nuances apportées par chacun sur le sens profond de *La Géométrie*, chacun s'accorde à reconnaître que c'est, à la fois, un livre d'introduction à la géométrie analytique et à la résolution graphique d'équations. Y lister les usages effectifs du nouvel outil de Descartes permet peut-être d'établir une hiérarchie entre ces deux thèmes.

Voici donc un recensement précis des onze endroits du Traité où la géométrie analytique est effectivement mise en jeu [21], avec recours systématique effectif aux opérations arithmétiques sur des longueurs de lignes, procédé déjà présent chez les anciens mais tout à fait renouvelé et considérablement renforcé par l'invention de Descartes

a) Introduire - très discrètement - page 310 des *Essais* (382 dans AT VI) les x et les y lors de l'examen du problème de Pappus II : « *Premierement ie suppose la chose comme desia faite, & pour me demesler de la confusion de toutes ces lignes, ie considere l'une des données, & l'une de celles qu'il faut trouver* [...] *comme les principales, & auxquelles ie tasche de rapporter ainsi toutes les autres* ».

   On est très loin du discours usuel : soit O un point pris comme origine, et (Ox, Oy) un couple de droites distinctes d'un plan P ; à tout point M de P nous associerons le couple (x, y) de nombres tel que... Avouons que tout lecteur entrant pour la première fois dans le Traité peut parfaitement glisser rapidement sur ce passage, et de n'en saisir l'importance fondatrice que lors de nouvelles approches du livre !

b) Introduire la Transformation de Descartes d'une droite (page 321 des *Essais*, 394 dans AT VI) : on trouve une hyperbole.

c) Reconnaître que les solutions de Pappus II sont les coniques (page 324 des *Essais*, 397 dans AT VI) et introduire au passage des formules de changements d'axes cartésiens.

   À quelques broutilles près, provenant notamment de la complication majeure qu'apporte le fait que les coordonnées sont trop souvent, pour Descartes, des lignes essentiellement positives, cette preuve de virtuose serait encore enseignable de nos jours.

d) Introduire la Transformation de Descartes d'une parabole (page 335 des *Essais*, 407 dans AT VI) et ainsi définir la Parabole Cartésienne, par ailleurs reconnue comme étant une courbe de Pappus à cinq droites.

21. On doit également citer le fait que son principe même est évidemment la clef de la multiplication à l'infini du nombres de courbes disponibles pour les mathématiciens.

e) Introduire l'équation d'un demi-cercle centré sur l'axe des abscisses (page 342 des *Essais*, 414 dans AT VI).

f) Combiner cette équation avec celles d'une ellipse, d'une Parabole Cartésienne et enfin d'une Ovale de Descartes [22] en vue de déterminer les normales à ces courbes (page 343 des *Essais*, 414 dans AT VI).

g) Déterminer les abscisses des pieds de ces normales (page 347 des *Essais*, 419 dans AT VI).

h) Justifier que les Ovales sont bien les solutions du problème général de stigmatisme ponctuel absolu (page 360 des *Essais*, 431 dans AT VI).

i) Étudier et résoudre le problème de Pappus III (page 387 des *Essais*, 461 dans AT VI).

j) Justifier la résolution, par intersection d'un cercle et d'une parabole, des équations de degrés trois et quatre (page 393 des *Essais*, 467 dans AT VI), avec l'examen des cas particuliers de l'insertion de deux moyennes proportionnelles et la trisection d'un angle.

k) Justifier la résolution, par intersection d'un cercle et d'une Parabole Cartésienne, des équations de degrés cinq et six (page 408 des *Essais*, 480 dans AT VI), avec l'examen des cas particuliers de l'insertion de quatre moyennes proportionnelles et la pentasection d'un angle ; justification au passage de l'équivalence des deux techniques de construction de la Parabole Cartésienne.

Cette liste peut évidemment satisfaire un tenant de la tradition selon laquelle *La Géométrie* est un traité de géométrie analytique, ce *deus ex machina* qui permet de renouveler la géométrie traditionnelle en apportant la puissance des nombres à son secours. On y déniche l'acte de naissance, et six de ses applications spectaculaires : retrouver une propriété bien connue de l'hyperbole vis-à-vis de ses asymptotes, disposer d'une seconde définition géométriques des coniques à l'aide du problème de Pappus II, introduire de nouvelles courbes comme la Parabole de Descartes, présenter une méthode

22. Dans ce dernier cas, il s'agit d'équations paramétriques.

complètement originale pour déterminer - et c'était la première fois - les normales à une courbe arbitraire, régler grâce aux Ovales le principal problème de l'optique pour l'époque, et enfin donner des constructions géométriques des racines des équations jusqu'au degré six (et même, espérait-il, de tout degré imaginable).

On peut aussi rester sur sa faim, s'étonner de ce que ce cours de géométrie ne soit pas plus systématique, par exemple ne contienne pas de progression rationnelle conduisant à des problèmes concrets tels que déterminer une droite passant par deux points, ou un cercle passant par trois points, ou comment écrire que deux droites sont parallèles, ou perpendiculaires, comment trouver la projection orthogonale d'un point sur une droite *etc.* On peut aussi s'étonner que Descartes ne profite pas de sa puissance nouvelle pour présenter une théorie unifiée des coniques (et devenir le véritable Apollonius français), en démontrant par exemple des propriétés classiques comme le fait qu'en un point d'une conique à centre la tangente et la normale soient bissectrices de l'angle formé par les deux rayons vecteurs. Il est vrai que nous n'avons pas du tout affaire à un tel livre. Les applications recensées ci-dessus peuvent alors être revues d'un autre œil : pourquoi se limiter à ces quelques cas quand même très particuliers ? C'est là que les tenants d'une autre lecture - livre d'algèbre et non de géométrie - peuvent être confortés par le fait que *toutes ces applications*[23] *sont utiles au grand algorithme de résolution graphique géométrique des équations algébriques*. Il semble que cela puisse être considéré comme un argument à prendre sérieusement en considération. Après tout, ce ne serait pas la seule fois de l'histoire qu'un découvreur génial n'ait pas vraiment mesuré toute la profondeur de son invention, laissant à ses « neveux » le soin de voir plus loin que lui en grimpant, comme l'aurait suggéré Bernard de Chartres au douzième siècle[24], sur ses *épaules de géant*.

Comment Descartes voit sa *Géométrie*

La *Correspondance* montre maints passages où Descartes juge son Essai. Le plus célèbre est sans doute sa réponse au Jésuite Jean Ciermans[25]. Pour bien

23. À l'exception de la résolution du problème de Pappus III.
24. Cité par Jean de Salisbury dans le livre III de son *Metalogicon*.
25. Le Père Ciermans (1602-1648) était à Louvain en 1638 (*cf.* la note manuscrite de Clerselier dans son exemplaire dit de l'Institut). Il n'est pas inutile de savoir que, dans

comprendre le passage de Descartes, il est nécessaire de lire d'abord un large extrait de la lettre qu'il avait reçue à propos du *Discours*

« *Je vous diray donc premierement que cette hardiesse me plaist, qui fait que vous écartant des chemins battus, & des routes ordinaires, vous avez l'assurance de chercher de nouvelles terres, & de faire de nouvelles découvertes. Car en effet n'est-ce pas découvrir un nouveau monde en Philosophie, & tenter des routes inconnuës, que de rejetter comme vous faites toutes ces troupes de qualitez, pour expliquer sans elles, & par des choses qui sont sensibles & comme palpables, tout ce qu'il y a de plus caché dans la nature.* [...] *Veritablement vostre livre contient un tres grand nombre de tres belles choses ; entre lesquelles neantmoins je ne compte point ce qui appartient à la Geometrie, car ces choses sont telles, qu'elles se recommandent assez d'elles-mesmes, & n'ont pas besoin de l'approbation de personne pour estre mises en estime, & pour eterniser le nom de leur autheur ; le vostre ne peut qu'il ne s'acquiere par là une gloire immortelle, pour l'excellence de cet ouvrage, qui meritait d'estre mis en un volume à part, & non pas d'estre rejeté sur la fin d'un livre ; en quoy certes vous ne luy avez pas rendu justice. Seulement aurais-je crû qu'il eust esté mieux de lui faire porter le nom de* Mathematiques pures, *que celuy de* Geometrie *que vous lui avez donné, à cause que les choses qu'il contient, n'appartiennent pas davantage à la Geometrie qu'à l'Arithmétique, & aux autres parties des Mathematiques*[26]. »

Voici la réplique : « *Vous dites que ce peu que j'ay écrit de Geometrie, meriterait plutost de porter le nom de Mathematiques pures ; car je n'ay expliqué en ce traitté là pas une des questions qui appartiennent proprement à l'Arithmetique, ny mesme aucune de celles où l'on considere l'ordre & la mesure, comme a fait Diophante ; mais bien davantage je n'y ai point aussi traitté du mouvement, quoy que la Mathematique pure, (au moins celle que j'ai le plus cultivée) en fasse son principal objet*[27] ».

L'ambiguïté classique du latin empêche de savoir s'il s'agit d'un traité **des**

la dernière partie de sa vie, il fut ingénieur militaire sous le nom de *Cosmander*, donc gourmand de mathématiques appliquées. Il fortifia notamment la ville frontière portugaise d'Olivença alors que le cartésien Jean Gillot était *mathématicien du roi* à Lisbonne. Il quitta son Ordre en 1646 ; passé du côté espagnol, il fut tué lors du siège de cette ville après avoir été reconnu par un soldat portugais.

26. AT II 55 CXVI, 3/38, de Ciermans à Descartes CXVI [trad. Clersellier I 163 LV].
27. AT II 70 CXVIII, 23/3/38, à Ciermans [I 171 LVI].

mathématiques pures, ou **de** mathématiques pures. Quoi qu'il en soit, la réponse - écrite lettre initiale sous les yeux - est simplement une *confirmation* des propos louangeurs de Ciermans. Cet *Essai* est très différent des deux autres. Ce n'est pas un Traité couvrant toute cette science, mais un passage essentiel de ce qu'aurait pu être un tel livre, qu'il n'a d'ailleurs jamais eu l'intention de rédiger, le reste - le décryptage de l'univers sensible - étant pour lui l'essentiel, commencé dans les deux autres *Essais*[28].

Dès le départ, la distinction entre les trois annexes au *Discours* est déjà nette, comme le montre la lettre suivante[29]

« *Afin que vous sçachiez ce que j'ay envie de faire imprimer, il y aura quatre Traittez tous François, & le titre en general sera*, le projet d'une Science universelle qui puisse élever nostre Nature à son plus haut degré de perfection ; Plus la Dioptrique, les Meteores, & la Geometrie ; où les plus curieuses Matieres que l'Autheur ait pu choisir, pour rendre preuve de la Science universelle qu'il propose, sont expliquées en telle sorte, que ceux mesmes qui n'ont point estudié les peuvent entendre ».

Il donne ensuite des exemples de sujets traités dans la *Dioptrique* et les *météores*, touchant par exemple des lunettes ou de la nature du sel. Puis il conclut avec hauteur

« *Enfin en la Geometrie, je tasche à donner une façon generale pour soudre tous les Problèmes qui ne l'ont encore jamais esté* ». On ne saurait être plus clair : aux deux premiers l'explication concrète du monde, au dernier un terrain théorique incomparable.

Trois lettres à Constantijn Huygens de Zuylichem (père de Christiaan), précédant également la parution du *Discours*[30], confirment largement cette différence de statut

« *J'ai dessein d'ajouter les Météores à la Dioptrique, et j'y ai travaillé assez diligemment les deux ou trois premiers mois de cet été, à cause que j'y*

28. Il est intéressant de noter que Descartes parle du *mouvement*, ce que ne faisait pas Ciermans, et ce quelques semaines avant les trois lettres capitales à Mersenne traitant notamment de la *Roulette* (27/5/38, 27/7/38 et 23/8/38), où Descartes se laisse aller à traiter de questions touchant les infiniment petits.

29. AT I 339 LXVI, 3/36 à Mersenne [II 528 CXI].

30. AT I 592 LXIII, 1/11/35, puis AT I 613 XIII, 30/10/36 et AT I 620 XVII, 27/2/37.

trouvais plusieurs difficultés que je n'avais encore jamais examinées, et que je démêlais avec plaisir. Mais il faut que je vous fasse des plaintes de mon humeur : sitôt que je n'ai plus espéré d'y rien apprendre, ne restant plus qu'à les mettre au net, il m'a été impossible d'en prendre la peine, non plus que de faire une préface que j'y veux joindre ; ce qui sera cause que j'attendrai encore deux ou trois mois avant que de parler au libraire. »

« *Nous en sommes à la fin de la Dioptrique, et il y a déjà plus de huit jours qu'elle aurait pu être achevée ; mais à cause que les figures des Météores et de la Géométrie, qui doivent suivre, ne sont pas encore prêtes, l'imprimeur ne se hâte pas, et ne me promet le tout que vers Pâques.* »

« *Je n'ai pas eu dessein d'expliquer toute la méthode mais seulement d'en dire quelque chose, et que je n'aime pas à promettre plus que je ne donne, c'est pourquoi j'ai mis "Discours de la Méthode" au lieu que j'ai mis simplement "la Dioptrique" et "les Météores", parce que j'ai tâché d'y comprendre tout ce qui faisait à mon sujet* »

même si, dans cette dernière, quelques lignes plus loin, il indique le titre exact de son livre, signalant donc cette fois explicitement *La Géométrie*.

De très nombreuses autres lettres, sauf avis contraire destinées au Père Mersenne, permettent de préciser ce que Descartes pensait de son travail purement mathématique, et vont dans le sens de cette thèse sur le caractère purement technique du troisième *Essai*, si singulier dans son *Œuvre*, fort peu raccroché à la fameuse *Méthode*. Par exemple

« *Je ne mets pas Traité de la Methode, mais Discours de la Methode, ce qui est le même que Préface ou Advis touchant la Methode, pour montrer que je n'ay pas dessein de l'enseigner, mais seulement d'en parler*[31]. »

« *Je sçay bien que le nombre de ceux qui pourront entendre ma Geometrie sera fort petit, car ayant obmis toutes les choses que je jugeais n'estre pas inconnuës aux autres, & ayant tasché de comprendre, ou du moins de toucher, plusieurs choses en peu de paroles, (voire mesme toutes celles qui pourront jamais estre trouvées en cette science) elle ne demande pas seulement des Lecteurs tres sçavans dans toutes les choses qui jusques icy ont esté connuës*

31. AT I 349 LXX, 4/37 [I 509 CXII].

dans la Geometrie & dans l'Algebre, mais aussi des personnes tres laborieuses, tres ingenieuses, & tres attentives[32]. »

Il montrera parfois très nettement son désir de passer à autre chose, quittant ici - affaire faite - son vieux rêve de jeune homme de s'installer comme un Maître, mais désormais désireux de s'attaquer à d'autres problèmes devenus plus importants pour lui

« *Il y a peu de gens qui puissent entendre ma Geometrie, & que vous désirez que je vous mande quelle est l'opinion que j'en ay, je croy qu'il est à propos que je vous dise qu'elle est telle, que je n'y souhaitte rien davantage ; et que j'ay seulement tasché par la Dioptrique & par les Meteores de persuader que ma methode est meilleure que l'ordinaire ; mais je pretens l'avoir demonstré par ma Geometrie*[33]. »

« *Mon dessein n'a point esté d'enseigner toute ma methode dans le discours où je la propose, mais seulement d'en dire assez pour faire juger que les nouvelles opinions, qui se verraient dans la Dioptrique & dans les Meteores, n'estaient point conceuës à la legere, & qu'elles valaient peut-estre la peine d'estre examinées. Je n'ay pû aussi montrer l'usage de cette methode dans les trois traittez que j'ay donnez, à cause qu'elle prescrit un ordre pour chercher les choses qui est assez different de celui dont j'ay crû devoir user pour les expliquer*[34]. »

« *Je voudrais qu'il vous plust prendre la peine d'examiner ma Geometrie, c'est une chose qui ne se peut faire que la plume à la main, & suivant tous les calculs qui y sont, lesquels peuvent sembler d'abord difficiles, à cause qu'on n'y est pas accoustumé, mais il ne faut que peu de jours pour cela ; & si vous passez du premier Livre au troisième, avant que de lire le second, vous y trouverez plus de facilité que peut-estre vous ne croyez.*[...] *C'est un traité que je n'ay quasi composé que pendant qu'on imprimait mes Meteores, & mesme j'en ay inventé une partie pendant ce temps-là*[35] *; mais je n'ay pas laissé de m'y satisfaire, autant ou plus que je ne me satisfaits d'ordinaire de ce que j'écris.*[36]. »

32. AT I 411 LXXXVII, 3/10/37 à Plempius [II 34 VII].
33. AT I 478 XCVII, fin 12/37 [III 427 LXXIII].
34. AT I 559 CIX, 22/2/38, à Vatier [I 514 CXIV].
35. Comme par exemple une nouvelle manière de construire sa Parabole Cartésienne.
36. AT I 457 XCIII, 22/2/38, au RP Deriennes (?) [III 114 XXVI].

« *Vous sçavez qu'il y a désia plus de quinze ans que je fais profession de negliger la Geometrie, & de ne m'arrester jamais à la solution d'aucun Probleme*[37]. »

« *Je ne m'arreste point à soudre leurs questions de Geometrie ; car je croy que ce que j'ay fait imprimer peut suffire pour un essay en cette science, à laquelle je fais profession de ne vouloir plus estudier*[38]. »

« *Je ne veux plus estudier en Geometrie. Mais je n'ay resolu de quitter que la Geometrie abstraicte, c'est à dire, la recherche des questions qui ne servent qu'à exercer l'esprit ; et ce afin d'avoir d'autant plus de loisir de cultiver une autre sorte de Geometrie, qui se propose pour question l'explication des Phainomenes de la Nature*[39]. »

« *Je vous diray que ce n'est pas mon stile, de m'arrester à de petites demonstrations de Geometrie, qui peuvent aysement estre trouvées par d'autres, & que ceux qui me connaistront ne sauraient juger que sçauraient juger que j'ignore*[40]. »

« *Je ne veux point m'arrester à la chercher, car en effet je renonce à la Geometrie*[41]. »

« *J'aurais crû fort mal employer le papier de ma Geometrie, si je l'avais remply de telles choses ; aussi que c'estait de la Geometrie que j'écrivais, & non pas de l'Arithmetique, à laquelle seule appartient cette regle*[42]. »

« *Je ne répons rien à celuy qui dit que les demonstrations manquent en ma Geometrie ; car il est vray que j'en ay obmis plusieurs, mais vous les sçavez toutes, & vous sçavez aussi que ceux qui se plaignent que je les ay obmises, pour ce qu'ils ne les sçauraient inventer d'eux-mesmes, montrent par là qu'ils ne sont pas fort grands Geometres.*[43] »

Cela dit, il manifestera pourtant parfois des regrets

37. AT II 95 CXIX, 31/3/38 [III 402 LXIX].
38. AT II 149 CXXIII, 27/5/38 [III 392 LXVIII].
39. AT II 268 CXXXI, 27/7/38 [III 371 LXVI].
40. AT II 361 CXLII, 12/10/38 [I 353 LXXIV].
41. AT II 395 CXLVI, 11/10/38 [II 402 XCI].
42. AT II 611 CLXXV, fin 1638, à Schooten (?) [III 424 LXXII].
43. AT IV 224 CCCLXXXII, 6/45, à **** [I 492 CIX].

« *J'y ay obmis beaucoup de choses qui pouvaient y estre adjoutées pour la facilité de la pratique*[44]. »

« *Ma Geometrie aussi, en laquelle j'ay dessein de changer quasi tout le second Livre, en y mettant l'Analyse des lieux, & y éclaircissant la façon de trouver les Tangentes, ou plutost (à cause que je me dégouste tous les jours de plus en plus de faire imprimer aucune chose).*[45] »

Les deux dernières lettres ci-dessous concernent la traduction latine de 1649 ; la méfiance exprimée ici, de manière peut-être un peu hypocrite, est une nouvelle preuve de ce qu'il pensait de son travail, partie très importante de sa production, mais à placer à part comme un *chef d'œuvre* de Compagnon. L'essentiel était ailleurs ; il ne voulait pas, pensons-nous, en retravaillant une seconde édition pourtant autrefois désirée[46], remettre la lumière sur son côté de mathématicien qu'il jugeait dépassé

« *Je n'ai point voulu voir la version de Schooten, encore qu'il l'ait désiré ; car, si j'eusse commencé à la corriger, je n'eusse pu m'empêcher de la rendre plus claire qu'elle n'est, ce que je ne désire point. Et parce que Schooten n'est pas savant en latin, je m'assure que sa version sera bien obscure, et qu'il y aura peut-être des équivoques, qui donneront des prétextes de cavillation à ceux qui en cherchent ; mais on ne pourra me les attribuer, à cause que son latin n'est point du tout semblable au mien*[47]. »

« *La Geometrie de Monsieur Schooten est imprimée. Son Latin n'est pas fort elegant ; & pour ce que je ne l'eusse pû voir avant qu'il fust imprimé sans estre obligé de le changer tout, je m'en suis entierement dispensé*[48]. »

Relisons enfin ce que Descartes dit dans son Traité à propos de son projet et de sa réalisation dans *La Géométrie*[49] ; il sera intéressant de confronter ce texte, que nous jugeons évidemment essentiel, avec les opinions de penseurs aux prises avec son œuvre

44. AT II 511 CLVI, 20/2/39, à De Beaune [III 410 LXXI].
45. AT II 638 CLXXIX, 25/12/39 [II 201 XXXIV].
46. Voir notamment la lettre du 25 décembre 1639 évoquée ci-dessus.
47. AT V 143 DXIII, 4/4/48.
48. AT V 392 DLXV, 17/8/49, à Carcavi [III 443 LXXVI].
49. Rappelons, une fois de plus, que « géométre » est à cette époque un équivalent total de « mathématicien ».

René DESCARTES

« *Par la méthode dont ie me sers, tout ce qui tombe sous la consideration des Geometres, se reduist a un mesme genre de Problesmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation.* »

(**La Géométrie**, Jan Maire (Leyden) 1637, p. 401 et AT VI p. 475)

Quelques jugements de la postérité

Qu'en ont dit ses successeurs ? Les avis divergent, par exemple, chez Boutroux, dans le même livre entre les pages 29 et 41 ! Certains rejettent avec force les opinions développées dans notre travail : d'autres, et non des moindres, les partagent, parfois partiellement, parfois totalement. Que chacun juge d'après les pièces du dossier qu'il peut recueillir et se fasse son idée personnelle ; l'important n'est pas de recréer artificiellement des partis pris précis qui n'ont pu exister que dans la tête d'un auteur disparu, chez qui d'ailleurs les présupposés ont pu évoluer entre 1619 et 1649, mais de voir quelles grilles de lecture sont les plus profitables pour comprendre en profondeur, si possible, la portée des acquis scientifiques apportés par *La Géométrie*.

Guillaume de l'HOSPITAL

« *Mais comme il* [Descartes] *s'appliquoit principalement à la résolution des égalités, il ne fit d'attention aux courbes qu'autant qu'elles luy pouvoient servir à en trouver les racines.* »

(**Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes, Préface**, Jombert (Paris) 1696, p. 5)

Michel CHASLES

« La Géométrie *de Descartes, outre ce caractère éminent d'universalité, se distingue encore de la Géométrie ancienne sous un rapport particulier, qui mérite d'être remarqué ; c'est qu'elle établissait, par une seule formule, des* *propriétés générales de familles entières de courbes ; de sorte que l'on ne saurait découvrir par cette voie quelque propriété d'une courbe, qu'elle ne fasse aussitôt connaître des propriétés semblables ou analogues dans une infinité d'autres lignes. Jusque-là, on n'avait étudié que des propriétés particulières de quelques courbes, prises une à une, et toujours par des moyens différens qui n'établissaient aucune liaison entre différentes courbes.* »

(**Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement celles qui se rapportent à la géométrie moderne**, Hayez (Bruxelles) 1837, Jacques Gabay (Sceaux) 1989, p. 95)

Pierre BOUTROUX

« *Mais faut-il en conclure, comme M. Liard, que l'intuition géométrique a dans cette algèbre une place prépondérante, que le but suprême de Descartes est la résolution graphique des équations ? Rien, il me semble, ne permet d'adopter une pareille solution.* »

(**L'imagination et les mathématiques selon Descartes**, Félix Alcan (Paris) 1900, p. 29)

« *Que la thèse de M. Liard soit vraie ou fausse, il n'en est pas moins incontestable que les contemporains de Descartes ont été plus frappés de la méthode employée dans la Géométrie que des applications géométriques de cette méthode.* »

(*id.* p. 29, note 2)

« *J'ai montré en effet que la partie géométrique de l'œuvre de Descartes ne peut pas être considérée comme la plus importante.* »

(*id.* p. 37)

« *Développer, avant tout, la théorie de la résolution algébrique des équations. Or ce fut là, précisément, le présent travail avait du moins pour but de le montrer, l'œuvre de Descartes.* »

(*id.* p. 41)

« *En d'autres termes, la Géométrie est destinée à montrer comment par l'algèbre - une algèbre nouvelle, il est vrai, clarifiée et perfectionnée - il est possible de résoudre les problèmes relatifs aux grandeurs et aux figures en suivant une voie sûre et régulière et "en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés".* »

(**La signification historique de la Géométrie de Descartes**, Revue de Métaphysique et de Morale (Paris) 1914, p. 3)

« *C'est l'usine succédant au métier.* »

(*id.* p. 7)

« *On a souvent discuté sur la relation de l'Algèbre à la Géométrie dans l'œuvre de Descartes, - question d'autant plus naturelle que Descartes nous enseigne les règles de son algèbre dans un traité intitulé "Géométrie". Sans reprendre ici cette discussion, disons que, en dépit de certaines apparences, l'opinion la plus généralement répandue sur le compte de la géométrie cartésienne ne paraît pas avoir été infirmée par les études récentes des historiens. Bien que le traité de 1637 contienne autant ou plus d'algèbre que de géométrie, et ait pour conclusion une théorie des équations, la géométrie cartésienne n'est nullement, dans la pensée de son auteur, une introduction à l'algèbre, mais au contraire une application de l'algèbre à la géométrie. En d'autres termes, l'algèbre, selon Descartes, précède logiquement les autres branches des Mathématiques, et elle n'est aucunement conditionnée par la nature des problèmes auxquels on l'applique.* »

(**L'idéal scientifique des mathématiciens : dans l'Antiquité et dans les temps modernes**, Félix Alcan (Paris) 1920, p. 95)

Louis LIARD

« *Malgré le titre, malgré les apparences, ce n'est pas de géométrie à proprement parler, mais d'algèbre qu'il s'agit dans la Géométrie.* »

(**Descartes**, Félix Alcan (Paris) 1903, p. 47)

« *Ainsi, déterminer généralement en toute équation le nombre de ses racines, tel a été, de son aveu, le but de Descartes dans la Géométrie.* »

(*id.* p. 49)

« *Ne sont-ce pas là les articulations successives d'une théorie générale des équations ? Et si, comme nous le montrerons bientôt, Descartes emploie des constructions géométriques à résoudre ces questions, n'est-on pas autorisé à soutenir que le but véritable de l'ouvrage est la constitution d'une algèbre, traitée par principes généraux, et non, comme celle de Viète, par cas particuliers ?* »

(*id.* p. 51)

« *Initier son lecteur à la théorie de la réduction des équations, c'est-à-dire à la Géométrie de Descartes.* »

(*id.* p. 52)

« *C'est ici que Descartes, par une féconde inspiration, appelle la géométrie à l'aide de l'algèbre, l'imagination au secours de l'entendement.* »

(*id.* p. 55)

« *Tels sont les principes qui permettent à Descartes de donner une théorie générale de la résolution graphique des équations.* [...] *Le but de l'alliance qu'il établit entre l'algèbre et la géométrie n'est pas de renouveler la géométrie, mais d'éclairer l'algèbre aux clartés de l'intuition géométrique. Ce qu'il se propose, c'est, en un mot, la résolution graphique des équations.* »

(*id.* p. 62)

« *Plus tard* [...] *la géométrie analytique apparaîtra non plus comme une conséquence, mais comme le but de l'œuvre mathématique de Descartes. Cette fausse perspective doit être redressée ; les choses doivent être remises dans l'ordre que prescrivait la méthode.* »

(*id.* p. 63)

Gaston MILHAUD

« *Faut-il pourtant aller jusqu'à dire que la Géométrie de Descartes n'est en somme qu'une algèbre ? On a bien fait d'insister sur l'inexactitude de la vieille interprétation selon laquelle la Géométrie de Descartes consistait uniquement dans l'application de l'algèbre aux courbes géométriques. Mais l'exagération contraire ne serait pas exacte non plus. On sent à la lecture des deux premiers livres que les courbes intéressent aussi Descartes pour elles-mêmes. - Quand il ne s'agit pas d'une application concrète, à l'optique par exemple, comment comprendre sans cela le soin qu'il apporte à résoudre en toute sa généralité un problème comme celui des tangentes ?* [...] *On sent bien que la question purement théorique des tangente aux courbes le passionne par elle-même. Et il serait difficile de voir là la préoccupation exclusive d'une construction plus précise des racines des équations dépendant de ces courbes.* »

(**Descartes savant**, Félix Alcan (Paris) 1921, p. 145)

Henri LEBESGUE

« *Descartes rejette donc des mathématiques ce qu'il ne peut traiter ; le besoin d'absolu a conduit plusieurs fois les mathématiciens à de semblables excommunications ; il faut qu'ils aient tout résolu ; Viète termine son Introduction à l'Art Analytique par cette phrase : "Finalement, l'art analytique s'étant revestüe de sa triple forme de Zététique, Poristique et Exégétique, soult le problème le plus relevé et excellent de tous les autres problèmes, qui est de soudre tous problèmes"* [Denique fastuosum illud problema problematum, ars Analytice, triplicem Zetetique Poristique et Exegetique formam tandem indreta, jure sibi adrogat quod est Nullum non Problema soluere]. *Que Descartes, successeur immédiat de Viète, dans la constitution de l'Algèbre et son application à la Géométrie, ait cru lui aussi qu'il avait parachevé les mathématiques ne saurait donc étonner, d'autant plus que, reprenant le rêve de bien des philosophes, il voulait créer une Science universelle, s'appliquant à tout, traitant tout par la méthode des mathématiques : il fallait donc que cette méthode eût fait ses preuves en donnant pour le moins la solution de toutes les questions de son ressort.* »

(**Leçons sur les constructions géométriques**, Gauthier-Villars (Paris) 1950, Jacques Gabay (Sceaux) 2004, p. 15)

David Eugene SMITH

« *The fundamental idea in Descartes's mind was not the revolutionizing of geometry so much as it was the elucidating of algebra by means of geometric intuition and concepts ; in a word, the graphic treatment of the equation.* »

(**History of Mathematics**, Ginn and Company (Boston) 1923, Dover (New York) 1958, vol. 1, p. 375)

Joseph Frederick SCOTT

« *More important in the sequel than the correspondence between single curves and single functions was that between classes of curves and classes of functions and the transference of systematic structure from whole regions of algebra to whole regions of geometry.*

The importance of La Géométrie *in the history of mathematics and in the philosophy of science lies far more in this direction than in the mere use of coordinates.* »

(**The Scientific Work of René Descartes (1596-1650)**, Taylor & Francis (Londres) 1952, Garland (New York) 1987, p. 92)

Ferdinand ALQUIÉ

« *Revenant à l'idée de ces lignes dont il parlait à Beeckman, en 1619, Descartes, dans la règle 18 des Règles pour la direction de l'esprit, conseille de ramener à des opérations sur les lignes toutes les opérations mathématiques. Il déclare que l'addition, la soustraction, etc., deviennent beaucoup plus claires quand les grandeurs y sont représentées par des lignes, sub ratione linearum. J'insiste sur ce point, car on a souvent prétendu que Descartes voulait, avant tout, ramener la géométrie à l'algèbre. Son premier souci, au contraire, fut de ramener à des lignes toutes les grandeurs.* »

(**Leçons sur Descartes, Science et métaphysique chez Descartes**, Centre de Documentation Universitaire [Les cours de la Sorbonne] (Paris) 1955, La Table Ronde (Paris) 2005, p. 22)

« *En 1630, Descartes met au point sa fameuse géométrie analytique, à propos de problème de Pappus. La géométrie analytique restera sa grande* *découverte. Et il n'est pas douteux que cette découverte se situe dans la ligne directe de sa préoccupation majeure, telle que nous l'avons définie dans la dernière leçon. Descartes veut trouver une science universelle capable de traiter des quantités en général, sans s'occuper de leur spécification, sans se demander s'il s'agit de figures ou s'il s'agit de nombres. C'est en ce sens que Descartes croit pouvoir étendre la méthode algébrique à travers toutes les sciences de la quantité.* »

« *Je vous rappelle ici, car, à ne pas s'en souvenir, on pourrait faire de lourdes erreurs, qu'au début du siècle de Descartes le mot algèbre ne désigne pas encore une branche indépendante des sciences mathématiques, comme c'est le cas maintenant. Ce mot désigne simplement une méthode mathématique, un procédé de l'arithmétique du temps, consistant en ceci : il s'agit d'établir, d'après les données d'un certain problème, une équation à laquelle l'inconnue doit satisfaire. Or, cette méthode algébrique ressemblait à ce que, dans les mathématiques grecques, on nommait l'analyse. Ici encore, on raisonne à partir de l'inconnu, et on construit la ligne inconnue à partir de relations géométriques connues. C'est pourquoi Descartes considère sa propre découverte comme une simple présentation algébrique de la géométrie des anciens. Il n'a pas attaché à sa découverte toute l'importance que nous y attachons nous-mêmes aujourd'hui. Il n'a pas compris, si je peux dire, quelle était sa valeur.* »

(*id.* p. 46)

« *Je n'ai pas besoin de faire remarquer que nous sommes à une époque où seule la géométrie d'Euclide paraît possible, et que, par conséquent, lorsque Descartes dit cela* [la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits], *il estime qu'il prend un exemple où, précisément, l'évidence rationnelle est totale.* »

(*id.* p. 75)

« *Mais la grande découverte mathématique de Descartes est celle de la géométrie analytique. Au reste, loin d'accorder à celle-ci toute l'importance que nous y attachons aujourd'hui, Descartes y voit une simple présentation algébrique de la géométrie des anciens. Seulement attentif à trouver une correspondance commode entre l'équation et la courbe géométrique, il n'expose, en sa Géométrie, le principe de sa méthode qu'en une phrase très courte,* *et passe tout de suite à l'examen de problèmes spécifiés. En tout cela, tendant à l'utile, il semble moins soucieux d'une véritable rationalisation des mathématiques que de la découverte de procédés permettant à la pensée des opérations plus aisées.* »

(**Encyclopædia Universalis**, (Paris) 1968)

Morris KLINE

« *Descarte's view of algebra as an extension of logic in treating quantity suggested to him that a broader science of algebra might be created, which would embrace other concepts than quantity and be used to approach all problems. Even the logical principles and methods might be expressed symbolically, and the whole system employed to mechanize all reasonning. Descartes called this idea a "universal mathematics". The idea is vague in his works and was not pursued far by him. Nevertheless, he was the first to assign to algebra a fundamental place in the system of knowledge.* »

(**Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, Oxford University Press (New York) 1972, p. 281)

Jean DIEUDONNÉ

« *En plein dix-septième siècle, on voit encore Decartes et Newton proclamer que l'intérêt principal des courbes algébriques est de donner des solutions géométriques à des équations algébriques au moyen d'intersections de courbes du plus petit degré possible.* »

(**Cours de géométrie algébrique** Presses Universitaires de France (Paris) 1974, vol. I, p. 17)

Vincent JULLIEN

« *Il ne s'agit pas d'énoncer ainsi un "jugement de Salomon" au terme duquel Géométrie et Algèbre se partageraient par moitié le royaume des mathématiques cartésiennes. Il y est bien question de géométrie, et seulement de géométrie, c'est-à-dire de problèmes à construire, de racines à construire, de courbes à reconnaître et à construire* [...], *transformée, guidée, par un serviteur tel que, sans lui, elle ne serait que confusion, désordre et stérilité ; ce serviteur est l'algèbre et le couple fonctionne ainsi, sans conflit majeur.* »

(**Descartes La Géométrie de 1637** Presses Universitaires de France (Paris) 1996, p. 67)

« *La mémoire cartésienne, c'est la méthode à l'œuvre, c'est ici l'algèbre qui organise la connaissance de l'étendue.*

L'enjeu n'est donc pas de transformer la nature de la science mathématique mais de transformer son étude. Alors surgit une illusion, une chimère : le passage à l'algèbre apparaît comme une solution définitive, le terme de la confusion et de l'aveuglement et au bout du compte il annonce, voire réalise, l'achèvement des mathématiques. »

(*id.* p. 125)

Chikara SASAKI

« *Thorough the treatise, along with the method of analysis he tries to mobilize the method of synthesis in the form of the "construction of equations". According to H. J. M. Bos, in seventeenth century mathematics to construct an algebraic equation means to perform "a geometrical construction yielding line segments with lengths equal to the roots of the equation". So we may regard the construction of equations as the method of synthesis in its algebraic form.* [...] *Descartes does not fail to apply consciously his method of enumeration to the classification of algebraic curves or equations. He states this clearly in Book Three on the theory of equations. It is easily seen that the titles of the three books originated from the viewpoint of the construction of equations according to their degree. The construction of equations was, then, a natural consequence of the author's methods of synthesis and enumeration. We emphazise again that all these procedures were carried out on the conceptual ground of algebra of line segments.* »

(**Descartes's Mathematical Thought**, Kluwer (Dordrecht) 2003, p. 229)

Annexe : Propositio demonstrata à D. Descartes

Un mini-traité cartésien sur les cônes

Entre avril et septembre 1641, Descartes rédigea (ou fit rédiger) en latin une solution à un vieux problème géométrique qui aurait été reproposé à la communauté mathématique par Desargues [50]. Mydorge et Roberval [51] sont censés avoir donné également chacun la leur (dont on se sait rien aujourd'hui [52]). Notre Annexe X montre que Fermat s'est aussi intéressé à la question.

Le texte de cette *Propositio* a été publié pour la première fois, sous le titre indiqué plus haut, par Claude Clerselier en 1667 dans le volume III de la *Correspondance* de Descartes, pages 475-479 (en annexe à la lettre LXXXIII du 12 octobre 1648 [53]). Le manuscrit semble perdu, et nul ne sait si, par exemple, les six figures qui y sont insérées sont plus ou moins de la main de Descartes, ou fortement interprétées - et dégradées - par son éditeur.

50. Voir aussi page 663 pour l'histoire du problème. La première étude complète de ce texte a été présentée en mai 2008 dans un colloque Inter-IREM à Nancy par deux professeurs de mathématiques - Luc Sinègre et Thierry Hamel : qu'ils soient ici remerciés pour leur contribution décisive - et l'auteur ; leur article commun a été publié l'année suivante dans l'ouvrage *Histoire du calcul de la géométrie à l'algèbre*, Vuibert (Paris) 2009.

51. *Nostro Geometra*, dira Mersenne en 1644.

52. Voir notamment le recto du cinquième feuillet 330 de la *Præfatio utilis in synopim mathematica dans les Universæ geometriæ mixtæque mathematicæ synopsis* de Mersenne (1644), la page 330 du même livre sous le titre *In clarissimi viri Claudii Mydorgii conica præfatio*, ainsi surtout que les commentaires d'Adam et Tannery aux pages 714-717 de leur volume III.

53. Ce qui constitue une erreur manifeste.

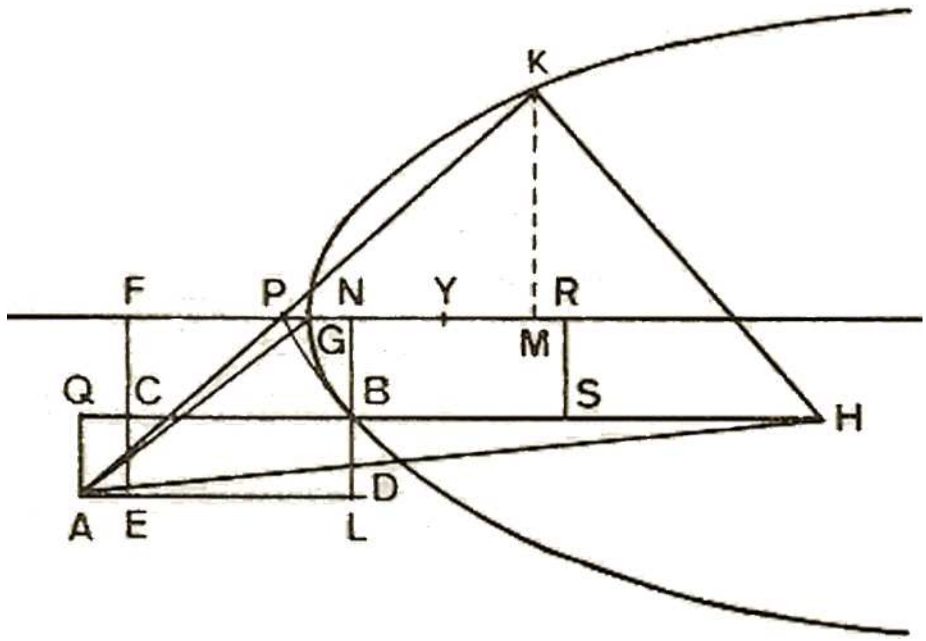


FIGURE 12.1 – *Figure de la Propositio dans la Correspondance de Mersenne*

On le retrouve notamment dans des éditions modernes suivantes

a. Adam et Tannery (1899), pages 708-714 du volume III, sous la référence CCXLIII bis succédant à la lettre CCXLIII du 16 juin 1641 à Mersenne des pages 382-383 [54],

b. Adam et Milhaud (1947), volume IV, sous la référence 303, pages 361-370, notamment intéressante par la traduction française qui l'accompagne [55],

c. Giulia Belgioioso et Jean-Robert Armogathe (*Tutte le lettere*, Boncompagni, 2006), sous la référence 316 « a Mersenne per X*** », pages 1468-1475, avec traduction italienne en regard [56].

54. Avec des commentaires de Paul Tannery et des figures refaites d'après celles de Clerselier, y ajoutant quelques regrettables maladresses, surtout dans la sixième et dernière sur le *Tertius casus*.

55. Que nous avons suivie pour l'essentiel.

56. Ce mini-traité mathématique figure également dans toutes les éditions complètes des

Une nouvelle traduction française de ce texte figure dans l'Annexe I. Elle a été revue afin de lever certaines ambiguïtés que le texte latin ne permet pas toujours de lever (ainsi la différence, pourtant essentielle, entre les expressions « une base » et « la base » n'apparaît pas sur le texte original, et il a fallu choisir pour établir le français correspondant ; bien entendu ce sont les mathématiques qui ont permis d'obtenir une précision maximale quant au sens). Ce texte nous semble éclairer la position cartésienne, finalement très classique, sur la géométrie : d'abord Apollonius, ensuite seulement x et y.

Cônes euclidiens, apolloniens et cartésiens

Pour éclairer la nature du problème considéré, il faut remonter aux définitions qui nous sont connues grâce à Euclide et Apollonius

I Un *cône droit* est ce que désignons aujourd'hui par l'expression *cône de révolution*, admettant une infinité de plans de symétrie : c'est le cône de l'« école primaire », indéfiniment prolongé dans les deux sens, seul présent dans les *Éléments* d'Euclide.

II Une *conique* est une section d'un cône droit par un plan perpendiculaire à l'une de ses génératrices [57].

III Ce que nous appellerons ici *cône d'Apollonius* [58], est un cône à base circulaire (ou cyclique) dont le sommet se projette en un point quelconque du plan de base (on peut dire *cône oblique* ou *cône scalène*). Plus précisément, comme pour tout cône, c'est le lieu des points alignés avec le sommet et l'un des points de la base.

---

lettres de Descartes, ainsi que dans le volume X de la *Correspondance de Mersenne*, pages 664-671, en appendice à la lettre 1011 (CCXLIII de AT III, renvoyant explicitement à leurs commentaires). Signalons enfin l'existence d'un CD-Rom contenant les œuvres complètes de Descartes, et donc ce texte, bizarrement à l'exception de sa sixième figure.

57. Dans cette acception, le cercle n'est donc pas une conique. On obtient une ellipse si le cône est acutangle, c'est-à-dire de demi-angle au sommet inférieur à un droit ; une parabole s'il est rectangle, et une hyperbole s'il est obtusangle.

58. Bien que cette notion ait été connue avant lui, notamment par Archimède, et selon toute vraisemblance par Euclide.

Il a été assez vite connu (par Archimède en tout cas) que toute section plane d'un cône apollonien [59] était une conique. Désormais, une conique est donc une section plane quelconque d'un tel cône [60].

IV Enfin nous parlerons de *cône de Descartes* pour caractériser les cônes à base conique arbitraire (ellipse, parabole ou hyperbole) ; cette notion est *a priori* plus générale que la précédente, mais la *Propositio* démontrée par Descartes s'énonce ainsi : **tout cône cartésien admet au moins une section plane cyclique** [61].

De ce théorème découlent d'immédiats corollaires

• *Tout cône cartésien est apollonien (et réciproquement).*

• *Tout cône cartésien admet au moins un plan de symétrie.*

• *Tout cône cartésien contient au moins un cercle.*

• *Toute conique est perspective d'un cercle.*

• *Toute section plane non dégénérée d'un cône cartésien est une conique.*

• *Il n'existe qu'une seule famille générale de cônes du second degré, tous apolloniens et cartésiens.*

---

59. Rappelons que cet adjectif est ici utilisé par commodité dans un sens différent de l'acception classique, réservée à ce qui concerne Apollon et non Apollonius.

60. Dans cette acception, le cercle est donc une conique.

61. Un mathématicien moderne se poserait aussitôt la question du nombre des directions de ces sections : il est en général de six, dont deux sont réelles - une seule pour le cône droit - et les quatre autres deux à deux imaginaires conjuguées. Mais ni Desargues ni Descartes n'ont, semble-t-il, envisagé cette question, bien qu'Euclide, par exemple, majore par deux le nombre de points d'intersections de deux cercles distincts dans la dixième proposition de son Livre III [traduction Vitrac, page 412 du volume 1, « *Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points* »], et qu'Apollonius, autre exemple, se soucie dans son Livre IV du nombre maximum de points communs à deux coniques distinctes, notamment dans la vingt-sixième proposition sur laquelle nous reviendrons [traduction Ver Eecke, page 300, de « *Lorsque, parmi les coniques, il en est qui se touchent mutuellement en un seul point, elles ne se rencontreront pas en plus de deux autres points* ».]

Cette *Propositio* fortement unificatrice est facile à démontrer aujourd'hui [62] ; il n'en allait pas de même avant la fin du dix-huitième siècle [63].

Un autre problème, lié au précédent, consiste à *construire géométriquement* au moins une telle section cyclique. Paul Tannery, dans son commentaire sur les propos de Mersenne signalés plus haut (AT III page 713) avance que, selon ce dernier, Desargues aurait voulu connaître une construction directe à partir de la base et du sommet, alors que Descartes se contentera d'une construction complexe en plusieurs temps, mais fidèle aux premières pages de sa *Géométrie*.

La source de la *Propositio* réside sans aucun doute dans la cinquième proposition du Premier Livre d'Apollonius [64], elle-même trouvant sans doute sa source dans le traité des *Conoïdes* d'Archimède. Elle affirme que tout cône apollonien oblique possède, outre celle de sa base circulaire, une seconde direction de sections cycliques [65]. Nous nous servirons d'ailleurs largement de

62. On pourra se reporter, par exemple, à la page 1276 de la troisième édition du manuel *Tout en un* de Claude Deschamps et André Warusfel pour la classe MP aux éditions Dunod (2006), reprise dans notre Annexe VIII et qui utilise le théorème spectral ou, pour une autre solution basée sur l'homographie et la polarité, aux pages 323-327 de la traduction française des *Lezioni di geometria projettiva* de 1898 par Federico Enriques. On consultera également avec intérêt les pages 81-82 et 546 de l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837) par Michel Chasles, où il renvoie à Desargues et Descartes, mais aussi aux propositions 7 et 8 - en numération moderne, 8 et 9 à l'époque de Chasles - du livre *Des Sphéroïdes et des Conoïdes* [paraboloïdes, hyperboloïdes et ellipsoïdes de révolution] d'Archimède portant sur le *Primus casus* et une partie du *Secundus casus* de Descartes. Nous consacrons au travail d'Archimède notre Annexe IX. Chasles indique, à juste titre, que toute preuve moderne repose bien sur la réduction spectrale des formes quadratiques à trois variables, qui impose le passage par une équation du troisième degré, même s'il n'existe que deux directions réelles de sections circulaires.

63. Par exemple, en 1754, dans le Livre Premier de son *Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*, pages 20-21, François Amédée Frézier énonce la même *Propositio* dans la section titrée *De quelques différences de Positions des Sections Coniques dans les Cônes Scalènes*, où elle est « démontrée » par un argument de continuité très intuitif.

64. « *Si un cône oblique est coupé perpendiculairement à la base par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan qui, perpendiculaire au triangle passant par l'axe, sépare, du côté du sommet, un triangle semblable au triangle passant par l'axe, mais placé en sens contraire, la section sera un cercle.* » (traduction de Paul Ver Eecke, pages 9-11).

65. Les traces sur le plan de symétrie du cône des deux directions de ces sections ainsi mises en évidence sont, aujourd'hui, dites *anti-parallèles* par rapport aux deux génératrices

la démonstration qui y figure [66], et même de ses notations, pour tenter de reconstituer le plus fidèlement possible les parties purement géométriques du déroulement de la pensée cartésienne [67].

La technique de démonstration

On pourrait penser *a priori* que la preuve de Descartes est naturellement essentiellement « analytique », puisqu'elle a été rédigée quatre ans seulement après la publication de *La Géométrie*. En fait, si un calcul à partir de coordonnées intervient effectivement en un point crucial [68], il semble bien que tout le reste de sa démarche soit encore dans la pure tradition imitée d'Apollonius, véritable maître de Descartes.

Avant d'entrer dans le détail, il faut évaluer la valeur mathématique de la démonstration donnée : elle a le mérite extrême d'avoir proposé une voie nouvelle permettant d'accéder à une preuve complète, ce qui justifie de large façon l'adjectif *demonstrata*, mais qu'inversement il y subsiste deux imperfections très importantes discutées plus loin [69]. Si ce texte aurait, tel quel, obtenu une note moyenne aujourd'hui, on doit lui reconnaître en tout cas le mérite essentiel d'une forte originalité propre aux seuls grands créateurs.

Pour les historiens, elle présente l'immense intérêt de voir leur auteur mettre en œuvre ses conceptions en matière de constructions géométriques appliquées aux équations du premier et du troisième degré, ainsi surtout que sa nouvelle géométrie analytique, tout en restant très proche des mathématiques grecques qui lui formèrent l'esprit.

---

incluses dans ce plan. Les Grecs parlaient de directions *sous-contraires* l'une de l'autre, encore dites *de sens contraire*.

66. Et également de celles des propositions 7 et 8 du livre *Des Conoïdes et Sphéroïdes* d'Archimède, qui sont dans le même esprit.

67. Évidemment abreuvée à celle d'Apollonius comme le montrent les différente citations figurant dans le Livre Second de *La Géométrie* ; voir les pages 329-335 dans le *Discours* ou 397-405 du volume VI d'Adam et Tannery, consacrées à l'équation générale des coniques.

68. Dans l'examen du *Tertius Casus*.

69. Le *Tertius casus* n'est résolu que pour un cas sur trois. Par ailleurs l'auteur accepte - silencieusement - que toute section plane d'un cône cartésien soit une conique : aucun des rares commentateurs du passé, Chasles compris, n'a paru s'en soucier ; Archimède, qui avait traité du *Primus* et d'une partie du *Secundus casus*, n'avait pas commis cette erreur.

La stratégie cartésienne

Dans toute cette étude, nous appellerons *direction singulière* toute direction de plan coupant le cône suivant une conique telle que le sommet se projette sur son plan en son centre. Si nous savons que cette conique est une ellipse, nous préciserons *direction singulière elliptique* ; si c'est une hyperbole, nous parlerons de *direction singulière hyperbolique*. Nous recourrons également aux concepts voisins de *section singulière*, *section singulière elliptique* et *section singulière hyperbolique*, ainsi que de *plan singulier*, *plan singulier elliptique* et *plan singulier hyperbolique*.

Toute direction singulière induit deux plans de symétrie du cône, perpendiculaires entre eux ainsi qu'aux plans singuliers associés.

La stratégie de Descartes est très simple, au moins dans son principe. Il traite le problème d'abord dans les deux cas où le cône admet visiblement au moins un plan de symétrie, **puis tente de généraliser en se ramenant systématiquement au premier d'entre eux**

1) Le *Primus casus* est consacré aux cônes obtenus par affinité à partir d'un cône de révolution, c'est-à-dire possédant une base elliptique telle que le sommet A se projette [70] sur son plan en son centre [71] D. Ces cônes présentent donc deux plans de symétrie évidents et l'une de leurs bases est une section singulière elliptique, supposée connue.

2) Le *Secundus casus* est consacré aux cônes dont le sommet A se projette sur l'un des axes métriques d'une base supposée indifféremment elliptique, parabolique ou hyperbolique : ici encore un plan de symétrie s'impose. Ce cas est ramené par Descartes au *Primus casus* par des manipulations géométriques classiques très simples [72].

70. Dans cette étude, à deux exceptions près, les projections considérées sont orthogonales.

71. Mersenne, dans sa préface de 1644, écrit « *plani positionem repetit solidum secantis in elliptica figura, a cuius centro recta ad solidi verticem ducta plano perpendicularis est* ». Nous verrons plus loin qu'en fait tout cône cartésien est de ce type.

72. Bien entendu c'est toujours la situation générale, puisque l'on sait que tout cône cartésien admet au moins une base circulaire, mais c'est justement là ce que l'on cherche à démontrer...

3) Le *Tertius casus* est, dans les faits sinon dans sa définition générale donnée au départ, consacré aux cônes dont le sommet A se projette en un point arbitraire hors de l'axe de la base considérée, cette base étant *supposée parabolique*. *A priori*, aucun plan de symétrie éventuelle n'apparaît avec évidence, et c'est ici que la géométrie analytique, alors toute récente, joue effectivement un rôle essentiel pour permettre de ramener ce cas, lui aussi, au *Primus casus* (éventuellement après un détour par le *Secundus casus*). C'est la partie majeure (et finale) du texte.

4) Le *Quartus casus* est absent du travail cartésien, mais il peut paraître commode d'en introduire ici un sous ce nom, consacré aux cônes dont le sommet A se projette en un point arbitraire hors des axes de l'une de ses bases, *supposée cette fois-ci elliptique ou hyperbolique*. En principe cela était annoncé comme faisant partie du *Tertius casus*[73], mais seul le cas parabolique a été réellement traité, les deux autres n'étant que vaguement suggérés : c'est là la plus visible des deux imperfections déjà signalées du texte, et tenter de la gommer est la partie la plus complexe de cette étude.

Considérer ce quatrième cas est absolument nécessaire si l'on veut posséder une preuve complète ; Descartes le sait bien puisqu'il termine ce que nous avons conservé de son texte en annonçant qu'≪*une même analyse peut s'effectuer pour les cas elliptique et hyperbolique* ≫.

Nous verrons qu'il est hautement improbable qu'il ait mené à leur terme les calculs correspondants[74]. Il est donc bien vraisemblable que ce mini-traité s'arrête au *Tertius casus* tel que nous le possédons[75].

Toute considération présentée ici sur les idées de Descartes quant à la manière de compléter sa démonstration par un *Quartus casus* ne peut donc être qu'indicative ; il apparaît quand même nécessaire de tenter une reconstitution, bien

73. Citation : *Le troisième enfin, lorsqu'elle tombe en dehors des axes.*

74. Il indique même qu'il ne connaît pas exactement le degré de l'équation finale pour ce cas général.

75. Même si l'on ne peut écarter tout à fait l'hypothèse qu'il aurait donné quelques indications plus précises concernant le cas général sur un feuillet séparé et aujourd'hui perdu. Il aurait par exemple pu y montrer - voire seulement énoncer - que tout cône cartésien admet au moins une base parabolique : on serait alors encore ramené au *Primus casus* en passant par le *Tertius casus* ; mais nous verrons que d'autres voies sont aussi possibles.

entendu autant que possible compatible avec les moyens de l'époque, ce que l'auteur aurait pu avoir en tête en vue de mettre un point final à son travail.

Au vu du texte, toute la preuve résulte donc d'un passage obligé par le *Primus casus* [76]. Passer directement du *Quartus* au *Primus* serait préférable, mais ce n'est pas toujours simple à réaliser.

Il résultera de ce travail une propriété annexe [77], découverte au détour des calculs et raisonnements géométriques : *tout cône cartésien possède au moins une section singulière elliptique*, ce qui n'est nullement évident *a priori* pour l'époque [78].

Cette stratégie posée, la tactique cartésienne [79] sera toujours la même. Il obtiendra systématiquement une telle section singulière, elliptique si possible, en recherchant un diamètre [80] BC de la base parmi tous ceux qui satisfont à deux propriétés d'orthogonalité remarquables

Si l'on appelle L un point de la droite AC tel que $AL = AB$, et D le milieu du segment BL, alors AD, automatiquement orthogonale à BL, doit l'être également à la tangente T en B à la base [81].

76. Nous verrons qu'il peut exister une version du *Quartus casus* manquant qui le ramènerait également à ce *Primus*.

77. Dont on peut montrer qu'elle est exactement équivalente à la *Propositio*.

78. Cela le devient si l'on connaît la théorie du *théorème spectral* des formes quadratiques à trois variables. Ce point de vue et ses conséquences sont développés à la fin de notre Annexe VII.

79. *A priori* seulement suffisante en cas de succès, mais en fait également nécessaire, puisque finalement nous saurons que tout cône cartésien possède au moins une section singulière elliptique.

80. Avec éventuellement C à l'infini dans le *Tertius casus* (à base parabolique). *A priori* le fait de choisir dans les autres cas un diamètre peut paraître uniquement simplificateur, mais on peut montrer facilement que le parallélisme des tangentes en B et L à la section singulière cherchée implique celui des tangentes en B et C à la base, d'où le caractère diamétral de ce segment.

81. Les deux conditions nécessaires d'orthogonalité dégagées ci-dessus s'écrivent facilement à l'aide de produits scalaires. Notons $\overrightarrow{AL} = t\,\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{T}$ un vecteur directeur de la tangente T en B. Doivent être satisfaites les équations $t^2\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ et $(\overrightarrow{BA} + t\,\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{T}) = 0$, d'où $t\,(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{T}) = (\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T})$, et t a le signe de $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T})\,(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{T})$. Sauf dans un cas particulier, elles ne peuvent déterminer qu'un seul point L. Mais il y a une possibilité sur deux que celui-ci ne soit pas sur le même demi-cône que B : le point

Dans ces conditions, la section du cône par le plan orthogonal à AD passant par D est une conique dont BL est un diamètre, ce qui ramène effectivement au *Primus casus*, directement si c'est une ellipse, avec un éventuel détour, trivial, par le *Secundus casus* dans le cas opposé.

On peut remarquer que, comme dans le *Primus casus*, le plan de cette conique peut-être considéré comme l'image du plan de base par une rotation bien choisie autour de la tangente T en B ; ces deux coniques, non coplanaires, ont donc un point et une tangente commune [82].

Nous pouvons maintenant entrer dans le détail de la technique du texte cartésien, et émettre au passage quelques suggestions vraisemblables sur les manières d'en commenter les parties incomplètes [83].

Le *Primus casus*

Ce premier cas est, en quelque sorte, une réciproque de la stratégie générale de Descartes : ici c'est l'ellipse de diamètre BL qui est connue, et il faut au

A se projette alors bien au centre, mais c'est au centre d'une hyperbole ; cela dit, un bref passage par le cas le plus élémentaire du *Secundus casus* permet de trouver une autre section singulière, cette fois-ci elliptique. Notons enfin que, pour avoir L et B sur le même demi-cône, il faut et il suffit que $t > 0$ dans le cas d'une base elliptique, et $t < 0$ dans celui d'une base hyperbolique ; mais cela n'est pas commode à exprimer analytiquement.

82. Comme le nombre de directions cycliques, borné par deux en restant dans le champ réel et six dans le champ complexe, celui des directions de sections singulières est également fini (et égal à trois hors les cônes droits, comme on peut le montrer d'après le théorème spectral déjà signalé plus haut), et il en résulte que le nombre des points B convenables sur la base est fini.

Il n'est même pas difficile de voir qu'il est au plus égal à six, deux à deux symétriques par rapport au centre de la base supposée centrée, en recherchant les tangentes à la base parallèles à ces trois directions (dont l'une seulement conduit à des sections singulières elliptiques).

Pour une base elliptique, nous verrons que ce nombre est exactement égal à six, alors qu'il vaut trois pour une base parabolique, dont un seulement conduit à une section elliptique. Le cas d'une base hyperbolique est bien plus complexe, comme le montre notre Annexe VII.

83. Par exemple là où Descartes écrit « *et tout cela est si clair, qu'il ne paraît pas avoir besoin de démonstration* » (en fin de *Secundus casus*) sans donner aucune autre justification. Mais c'était presque toujours la règle à l'époque : ne pas trop en dire pour garder des atouts maîtres dans sa manche ; par exemple, comme toujours, Roberval était là encore un concurrent redoutable.

contraire trouver un point C convenable sur la droite AL (c'est-à-dire tel que BC soit un diamètre d'un cercle tracé sur le cône).

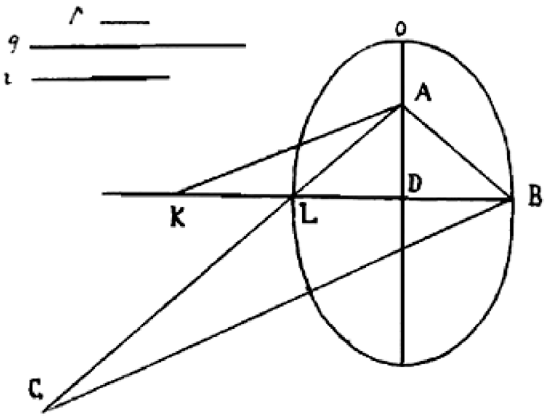


FIGURE 12.2 – *Figure du Primus casus*

Voici la réponse de Descartes, donnée sous forme d'algorithme sans autre justification [84] : D étant le centre de l'ellipse de départ, O l'un des sommets du grand axe (on pose aujourd'hui $OD = a$ et $DB = DL = b < a$), calculer $p = AB\,\dfrac{DO}{DO + DB} = AB\,\dfrac{a}{a+b}$, $q = AB\,\dfrac{DO}{DO - DB} = AB\,\dfrac{a}{a-b}$, puis $r = \sqrt{pq}$ et, pour conclure le tout, déterminer un point K sur la droite BL tel que $AK = r \left(= \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,AB = \dfrac{AB}{e}\right.$ où e est l'excentricité de l'ellipse écrite comme aujourd'hui$\Big)$. Alors le plan perpendiculaire au plan ABL et parallèle à la droite AK coupe le cône suivant un cercle de diamètre [85] BC.

Descartes ne signale pas qu'il existe en réalité deux points K possibles, symétriques par rapport à D, donc deux points C et deux directions de

84. « *Comme on le démontre facilement par l'analyse* ».

85. Il est très intrigant que l'introduction apollonienne par parallélisme d'un point également appelé K d'un diamètre de la base passant par un certain point B conduise à une figure très analogue à celle de Descartes (voir par exemple dans Ver Eecke les pages 26 et, surtout, 30 ; les autres éditeurs - Heath ou Taliaferro - ont malheureusement modifié les noms des points). Ce n'est certainement pas par hasard, *La Géométrie* nous donnant beaucoup de preuves de sa parfaite connaissance des *Coniques*.

plans cycliques. C'est naturellement tout à fait conforme à la proposition I 5 d'Apollonius : le plan de base est bissecteur du couple de plans de sections cycliques passant par la tangente en B.

Cette figure classique, reprise de l'édition Clerselier, est assez ambiguë au premier regard. En fait on peut la considérer comme une ébauche de géométrie descriptive où les deux plans de projection (horizontal et frontal) seraient confondus, avec $BDLK$ comme *ligne de terre* : le premier est celui de la base elliptique BOL, et le second, le plan de symétrie du cône $ABCDL$, exhibe les deux génératrices AB et ALC qu'il contient. Il faut donc considérer ce dernier comme *rabattu à angle droit* sur le plan horizontal pour pouvoir être vu, un concept essentiel en géométrie de Monge [86].

Avant d'indiquer pourquoi ce programme conduit bien au résultat, il est temps de parler du premier défaut, implicite et important, qui semble obérer toute la démarche de Descartes. Faute de document en sens contraire, il semble bien en effet que l'auteur admette froidement, dans ce cas comme les deux autres qu'il a abordés, que *toute section plane d'un cône cartésien est une conique*, ce qui n'est nullement évident [87]. Notre Annexe III indique plusieurs voies permettant de plus ou moins décharger l'auteur de cette grave critique, alors qu'Archimède s'était montré bien plus soigneux.

Cela admis, il existe au moins quatre façons de justifier la formule de Descartes. Elles sont exposées dans l'Annexe IV. La première, usant à plein des techniques de la géométrie analytique, est la plus naturelle en un sens, mais semble assez éloignée de l'esprit de l'époque. Les deux autres sont « apolloniennes ». L'une d'entr'elles repose sur un invariant des quadrilatères complets établi dans l'Annexe II. L'autre est plus directe et ne repose que sur

86. Cette figure semble indiquer une égalité entre les segments DL et LK qui n'est qu'accidentelle. Notons par ailleurs que les longueurs p, q et r qui y sont dessinées le sont de façon fantaisiste : la racine carrée r de pq devrait être inférieure à ce qu'elle est montrée (des valeurs approchées de ces longueurs sont proportionnelles à 7, 29 et 19, alors que $\sqrt{7.29}$ vaut à peu près $\sqrt{7.28} = 14$) ; seule celle de la Correspondance de Mersenne, avec 8, 26 et 15, est moins invraisemblable puisque $\sqrt{8.26}$ est proche de 14,4. Nous verrons plus loin que la qualité des reproductions de Clerselier et de ses successeurs est souvent très loin d'être irréprochable, surtout à propos du *Tertius casus*. D'ailleurs, dans ce siècle, la représentation plane des figures de l'espace posait encore de gros problèmes.

87. Un professeur sévère pourrait ici parler de « cercle vicieux », puisque la nature de ces sections ne sera établie qu'à la fin de la démonstration.

les outils traditionnels de Descartes [88] ; elle présente en outre l'avantage de ne faire apparaître le point K, véritable *Deus ex machina*, qu'au moment où il s'impose de lui-même, mais demande de nommer un point (S) de la figure originelle et d'introduire deux nouveaux points auxiliaires (R et T), dont aucun n'interviennent dans la description de l'algorithme final. Une toute dernière (la meilleure ?) s'inspire de la technique d'Apollonius pour sa proposition I, 13, elle est vraiment très efficace, très traditionnelle, mais peu naturelle [89]. Elle introduit K dès le départ, peut-être à la suite d'une figure et de la construction apollonienne que Descartes a sûrement eu entre les mains ; elle demande comme plus haut de nommer S et d'introduire un segment auxiliaire.

La relative complexité de la construction géométrique décrite ci-dessus est la preuve manifeste que Descartes possédait une parfaite maîtrise de ce *Primus casus*, car il ne l'a pas découverte par hasard [90] ! Le contenu de notre Annexe IV montre qu'il est plus que vraisemblable qu'il ait pu l'obtenir par des moyens purement apolloniens. Il disposait dès lors d'un socle parfait pour asseoir sur lui toute la tactique décrite plus haut.

Avant de quitter ce cas, il est légitime de se demander ce qu'il en reste lorsque l'on part d'une hyperbole comme base et non d'une ellipse. D'autres calculs sont alors possibles, qui montrent effectivement qu'il existe bien au moins une section cyclique, mais les résultats diffèrent selon le rapport du petit axe $DB = b$ à la distance de A au plan de base ; de plus une construction géométrique analogue à celle du point K semble devoir être très lourde [91]. La restriction du *Primus casus* au cas elliptique est donc tout à fait fondée.

---

88. La similitude - pratiquement toujours l'homothétie - entre triangles (théorème de Thalès), la relation de Pythagore et la formule des sinus.

89. Par ailleurs d'autres calculs, à base par exemple de trigonométrie à la Viète, sont aussi envisageables *etc.*

90. Archimède, qui a tenté de résoudre au moins partiellement le problème de Desargues, n'avait pas commis le cercle vicieux que l'on peut reprocher à Descartes sur la nature des sections planes d'un cône cartésien, mais en revanche lui fut très inférieur à cause du recours à un argument de continuité impossible à justifier à cette époque. Par contre son approche du *Secundus casus* fut irréprochable comme nous le verrons dans l'Annexe IX.

91. Le problème reste cependant *plan*, comme on disait dans le langage du dix-septième siècle, c'est-à-dire résoluble par la règle et le compas.

Le *Secundus casus*

Nous admettrons avec Descartes, comme plus haut, que toute section plane d'un cône cartésien est une conique. L'hypothèse de départ est que le sommet A se projette sur un point E de l'un des axes de la base, quelle que soit sa nature. Il faut décomposer en *quatre sous-cas*, selon que l'on est sur l'un des deux axes d'une ellipse, ou sur celui d'une parabole, ou sur l'axe focal d'une hyperbole, ou enfin sur l'axe non focal de cette dernière. Quatre figures explicitent encore ce qu'il y a à faire, avec pour but de trouver une section singulière elliptique telle que l'on puisse se reporter au *Primus casus*.

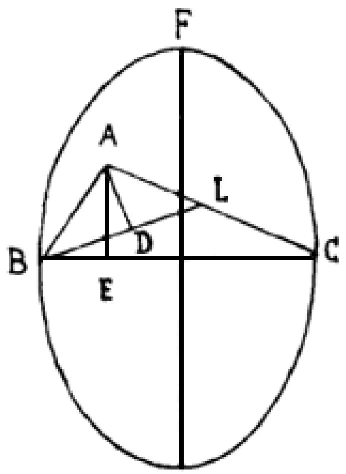


FIGURE 12.3 – *Première figure du Secundus casus*

Ici encore, le plan $ABCDL$[92], plan de symétrie naturel du cône dans les trois premiers sous-cas, est rabattu systématiquement sur le plan de base[93]. Le diamètre BC est sur l'axe qui contient E pour l'ellipse, la parabole et le premier sous-cas de l'hyperbole, et sur l'axe focal pour le second et dernier sous-cas.

Dans tous les cas, la droite AD, qui est dans ce plan $ABCDL$, sera automatiquement orthogonale aux tangentes en B et C (sauf parabole pour ce

92. Le point C est à l'infini pour ce qui est de la base parabolique.

93. Ce rabattement est droit dans les mêmes trois premiers sous-cas, mais non dans le dernier : nous verrons comment en déterminer l'angle.

deuxième point)[94]. Seules les conditions portant sur la longueur[95] $AL = AB$ et sur l'appartenance de L au demi-cône contenant B restent à régler pour que la tactique de réduction au *Primus casus* fonctionne. Dans ce *Secundus casus*, on a heureusement toujours le choix explicite entre deux points L possibles, ce qui permet de choisir celui qui conduira à une section singulière elliptique et non hyperbolique[96].

Cette première figure, consacrée à une base elliptique et ouvrant pratiquement ce *Secundus casus*, est donc facile à déchiffrer puisqu'elle ressemble beaucoup à celle du *Primus casus*[97]. La seule chose à faire est de choisir pour point B le sommet vérifiant l'inégalité $AB < AC$ et de prendre L à l'intersection du segment AC d'avec le cercle de centre A et de rayon AB.

Nous disposons ainsi d'une construction géométrique étonnamment élémentaire[98] ; elle répond bien au problème, puisque le plan contenant $ABCDL$ coupe le cône suivant une conique partageant avec la base la même tangente T en B, perpendiculaire au plan de symétrie. Par symétrie justement, il est clair que la tangente à la section en L est bien parallèle à T, ce qui montre qu'il s'agit d'une ellipse sur le plan de laquelle A se projette en son centre[99] D.

La deuxième figure est parfaitement analogue et se lit aussitôt : il suffit d'imaginer que C est parti à l'infini sur l'axe BE, en prenant soin de choisir L sur AC vérifiant $AB = AL$ et tel que le segment orienté AL soit dirigé vers l'intérieur de la parabole[100].

94. Comme AC (d'où l'égalité $0 = t\,(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{T}) + (\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T})$ pour tout t), ce qui n'est pas sans intérêt comme nous le verrons plus loin.

95. Équivalente à l'orthogonalité de AD et de BL.

96. Cette remarque est essentielle pour la suite du raisonnement ; elle ne figure pourtant pas dans le texte.

97. Notons cependant une différence subtile : ici, l'axe BC n'est pas nécessairement le petit axe de la base, et il peut parfaitement être focal.

98. Il est intéressant de réfléchir un instant au cas où la base serait circulaire : on se trouverait alors dans une situation exactement inverse au *Primus casus*, ce qui est fort naturel !

99. On notera qu'ici est mis en valeur un point F de la base qui joue un rôle particulier, puisqu'il est l'un des sommets situés sur l'axe ne contenant pas E. Par contre, il n'en sera pas de même pour les trois sous-cas suivants, pour lesquels F sera arbitrairement choisi sur la base.

100. Ce détail est bizarrement négligé par Descartes, qui a pourtant bien pris soin de souligner que le choix de B dans le sous-cas précédent était déterminé par une inégalité

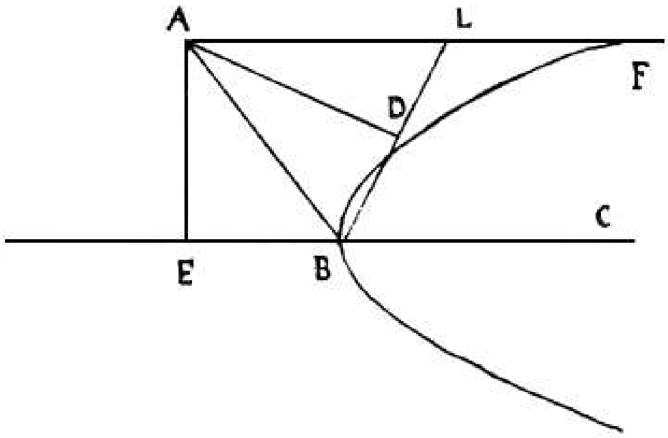


FIGURE 12.4 – *Deuxième figure du Secundus casus*

La troisième figure, celle de la projection de A en E sur l'axe focal d'une hyperbole, est tout aussi lisible que les deux précédentes, auxquelles elle s'apparente parfaitement [101].

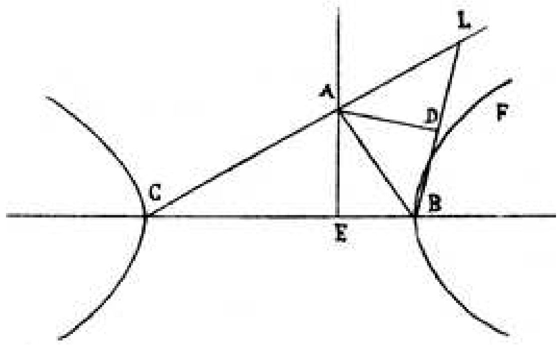


FIGURE 12.5 – *Troisième figure du Secundus casus*

$AB < AC$ et que L devait être placé dans le segment AC, ces précautions ayant comme but de poser L sur le même demi-cône que B, et d'obtenir par conséquent une section singulière elliptique et non hyperbolique.

101. On peut simplement noter que, comme pour le sous-cas d'une base elliptique, Descartes pense à préciser soigneusement qu'il pose *a priori* $AB < AC$, et que L doit être choisi ≪ au delà du point A ≫, alors qu'il s'est laissé aller dans le sous-cas d'une base parabolique.

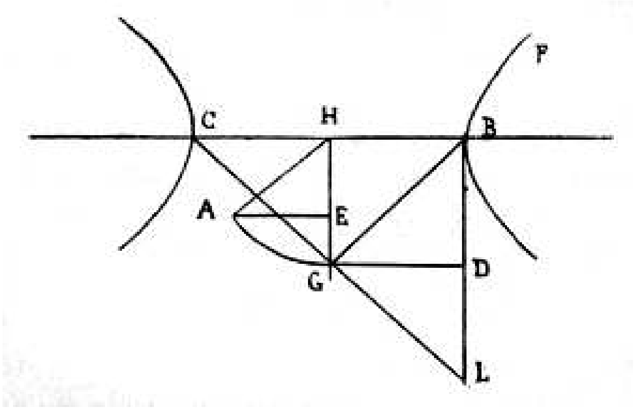


FIGURE 12.6 – *Quatrième figure du Secundus casus*

La quatrième figure, celle de la projection de A en E sur l'axe non focal d'une hyperbole, est au premier abord nettement plus déroutante. Il est vrai que le dessinateur, quel qu'ait été son nom, s'est montré ici particulièrement maladroit. Disons tout d'abord que $HBDG$ semble être un carré, et de plus que les segments BG et HA paraissent parallèles et donc approximativement penchés à 45 degrés sur l'axe CHB, deux hasards improbables, attirant inutilement l'attention lors d'une première lecture par ces régularités inopinées. Mais surtout cette malheureuse figure cumule les difficultés, en s'imaginant à la fois le sommet en G, en E puis enfin [102] en A, à la suite de la présence de deux rabattements différents sur le plan de base !

Pourtant, la situation est on ne peut plus claire. Oubliant un instant la figure, examinons le problème. Ici B et C sont les sommets (peu importe dans quel ordre), de milieu H, centre de l'hyperbole [103] ; A se projette en E situé sur la perpendiculaire [104] à l'axe focal passant par H. La solution proposée par Descartes est ingénieuse mais très simple : il prend pour point L le symétrique de C par rapport au sommet A, évidemment élément du

102. Il est vrai que Descartes avoue ici une petite gêne - ce qui est rare - en tentant d'expliquer que « *(litteræ enim A et G unum et idem punctum supra planum BCE, tanquam in ære imaginandum, repræsentant)* », c'est-dire sans doute « *(car les lettres A et G représentent un seul et même point au-dessus du plan BCE, qu'il faut imaginer dans l'espace)* ».
103. D'où probablement son nom.
104. L'axe dit *non-transverse*.

cône ; dès lors $AL = AC = AB$, le milieu D de BL est tel que la droite AD est à la fois parallèle à l'axe (comme droite des milieux dans le triangle rectangle LBC) et orthogonale à BL ainsi qu'à la tangente T en B à la base. Difficile de trouver une construction géométrique plus simple qu'une élémentaire symétrie ponctuelle ! On termine alors par une justification parfaitement analogue à celle du cas elliptique.

L'interprétation de la figure est finalement la suivante : cette fois-ci le plan $ABCDHL$ n'est plus un plan de symétrie, mais il coupe encore le plan de base suivant l'axe focal BHC. Dans sa position effective, E est bien la projection de A, et A et E sont donc, en un certain sens, confondus. Ce plan est ensuite rabattu sur le plan de base suivant un certain angle (de sinus $\dfrac{AE}{AH}$, donc non droit en général), ce qui envoie A en un certain point G. Ce qui est plus que désagréable, c'est que les points marqués L et D ne sont nullement les vrais points L et D, mais leurs rabattements sur le plan de base !

Pour complètement démystifier les choses, il reste à justifier l'apparition de l'arc de cercle centré en H et passant par les points marqués A et G sur cette figure mal conçue [105]. Cet arc, avec sa demi-corde AE, est simplement le rabattement, mais cette fois-ci à angle droit, d'un arc de cercle de l'espace inclus dans le plan médiateur de BC, et explicitant comment A, projeté en E, vient se placer en G, sa position finale ; il ne s'agit donc finalement que d'un moyen symbolique d'exhiber quelque part la distance AE de A au plan de base, d'ailleurs sans intérêt autre ici.

La simplicité des opérations cartésiennes dans les quatre différents sous-cas du *Secundus casus* est telle [106] qu'il n'y a effectivement peut-être pas besoin, comme le dit d'ailleurs Descartes, d'entrer dans trop de détails. Le seul point qui est peut-être à commenter brièvement est qu'ici toute intervention analytique serait sotte, et que nous sommes donc bien là en pleine géométrie « à l'ancienne ».

105. On sait que c'est loin d'être la seule posant problème.

106. Le lecteur pourra par exemple encore mieux s'en apercevoir en traitant le cas spécial où A se projette en le centre H de la base : la situation est alors particulièrement simple. Une étude un peu plus fouillée montre qu'il existe alors un autre plan singulier hyperbolique, perpendiculaire au plan de base qu'il coupe selon BHC, à côté du de plan singulier elliptique trouvé, lui aussi perpendiculaire au plan de base qu'il coupe selon la tangente en B. Ce triplet de plans singuliers deux à deux orthogonaux est typique du cas général.

Bien que l'on soit a priori dans l'espace (mais les rabattements signalés permettent de se ramener pratiquement à des manipulations planes, comme en descriptive ou sur un écran d'ordinateur) on dispose d'ailleurs ici, comme dans le *Primus casus*, d'une construction géométrique à la règle et au compas de la section désirée. Ce ne sera plus exact plus loin, car les choses se compliquent d'un degré et il faudra au moins l'intervention d'une conique auxiliaire : le problème devient alors *solide*, selon le langage de l'époque.

On notera que, dans les trois premiers sous-cas, comme dans le *Primus casus* le plan singulier elliptique cherché a été obtenu en faisant pivoter le plan de base autour de la tangente en B à la base. Par contre, dans le quatrième, c'est autour de l'axe focal que le plan de base a pivoté [107].

Le *Tertius casus*

Comme nous l'avons vu, c'est ici le seul endroit, il est vrai très important, où Descartes use de sa géométrie analytique : l'éviter semble pratiquement impossible [108]. De plus, pour finir, il recourt silencieusement à un artifice d'analyse (au sens moderne du mot) pour justifier le fait que sa technique lui fournissait toujours au moins un point B convenable sur sa base parabolique [109].

Le point de départ est cette base, de sommet G et de *latus rectum* [110] (côté droit) r. La suite des instructions est claire. On recherche un point B de la

107. Pour obtenir effectivement un plan de section cyclique, on est donc conduit à combiner deux rotations dans l'espace : un tel produit est encore une rotation comme il est bien normal.

108. Certes, il est toujours loisible de camoufler les coordonnées sous des concepts géométriques « purs », mais cela conduirait à une obscurité plus que certaine.

109. Tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine réelle : toute sa *Géométrie*, que l'on peut lire comme un traité de résolution des équations, montre qu'il en était parfaitement conscient, ce qui permet de lui pardonner d'avoir omis de signaler une telle trivialité résultant de ce que l'on appelle de nos jours *théorème des valeurs intermédiaires* ; il était coutumier de ce genre de faits. D'ailleurs, à sa décharge, dans l'Antiquité, les recours invisibles au fait qu'une fonction continue passant de valeurs positives à des valeurs négatives était contrainte à s'annuler étaient banals sous la forme de recours à la célèbre $\nu\epsilon\upsilon\sigma\iota\varsigma$, insertion d'un segment de longueur donnée entre deux objets géométriques donnés. Nous avons déjà noté qu'Archimède s'était laissé aller à cette facilité dans sa tentative de résolution du *Primus casus*.

110. C'est le double de notre paramètre moderne p, tel que l'équation réduite d'une

parabole, caractérisé par son abscisse[111] x ; sa tangente à la base coupe l'axe de la parabole[112] en P. Il convient de construire un point H tel que le vecteur $\overrightarrow{BH}$ soit parallèle à l'axe et de longueur AB. Il en est deux possibles : il faut choisir celui qui est intérieur à la parabole[113].

Le point L est défini par $AB = AL$ et le parallélisme de AL et de l'axe (si $\overrightarrow{AL}$ est tourné vers l'intérieur de la base, ce point L est sur le même demi-cône que B, et l'on obtient une ellipse[114]). C'est aussi le quatrième sommet d'un losange $ABHL$: le milieu[115] D de BL est donc l'intersection de ses diagonales, milieu de AH ; on notera que dès lors l'angle $\widehat{ADB}$ est droit. De plus, texte et figure mettent en place des points intermédiaires Q, K et M. Le premier est la projection de A sur la droite[116] BH ; le deuxième est l'un des deux points de la parabole, au choix, tels que HK soit parallèle à BP, point qui se projette sur le troisième appartenant à l'axe de la parabole[117]. Descartes dit *in fine* que « *l'équation que l'on trouve par cette voie est telle*[118] »

$$x^3 = \left(+\frac{aa}{b} - \frac{cc}{b}\right) xx + crx - \frac{1}{4} brr$$

où $a = AG$, b est l'abscisse[119] de A et c vaut $\frac{r}{2}$ diminué de l'ordonnée[120] du sommet A.

---

parabole s'écrive $y^2 = 2px$, et valant $\frac{b^2}{a}$ pour une conique d'équation $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$.

111. Son ordonnée est alors connue et vaut $y = \frac{x^2}{r}\cdot$

112. Une propriété ultra classique de cette courbe montre que P est le symétrique de la projection N de B sur l'axe par rapport au sommet G.

113. Descartes ne le dit pas explicitement, mais la figure - dont nous dirons pourtant plus loin tout le mal qu'il faut en penser - l'indique nettement.

114. Si ce n'est pas le cas, on a évidemment affaire à une hyperbole.

115. Qui n'est évoqué que dans un cas particulier, mais c'est sans importance.

116. C'est donc aussi celle de sa projection E sur le plan de base.

117. Clerselier donne la version fautive « *KM perpendicularis à puncto A in axem GY* », au lieu de « *à puncto K* ». Il s'agit visiblement d'une erreur de copie, dont l'auteur est peut-être responsable.

118. Clerselier recourt ici, pour l'égalité, à notre signe moderne tourné de 90 degrés alors qu'Adam et Tannery (et Adam et Milhaud) l'ont utilisé sans chercher à faire grand siècle ; mais la *Correspondance de Mersenne* se sert de celui de *La Géométrie* de Descartes.

119. Supposée non nulle, puisque A ne se projette pas sur l'axe.

120. Les mots *coordonnées*, *abscisse* et *ordonnée*, inconnus de Descartes, n'apparaissent pas dans le texte, qui recourt à des circonlocutions : ainsi par exemple « *EF, perpendiculaire de E sur l'axe, que j'appelle b* ».

On notera que, comme dans le *Primus casus*, le plan singulier cherché a été obtenu en faisant pivoter le plan de base autour de la tangente en B.

La justification de cette équation générale est rejetée à la fin du texte ; avant de s'y livrer, Descartes dit que « *per meam Geometriam* », on peut la résoudre par sa méthode d'intersection d'un cercle et d'une parabole auxiliaires [121]. Il ne le fait en réalité que dans un cas particulier où les choses se simplifient, à savoir $a = c$, en construisant un cercle de centre S, déterminé par ses coordonnées qui sont simples, et son intersection d'avec la parabole qui fournit entre un et trois (en fait trois [122]) points B convenables [123]. Non seulement ce problème arguésien lui permettait de briller parmi ses confrères, mais de plus il pouvait ainsi prouver la puissance de sa géométrie analytique et celle de sa méthode de résolution graphique des équations algébriques ! Il ne pouvait laisser passer une telle chance [124].

Dans ce *Tertius casus*, nous disposons pour la première fois d'une ébauche de preuve complète : comme nous l'avons vu, Descartes fixe des notations, et liste explicitement les segments dont il faut calculer les longueurs. L'Annexe V montre comment obéir à l'algorithme cartésien, et prouve que, pour un

121. Voir le Livre Troisième de sa *Géométrie*, pages 389-402 dans les *Essais*, et 464-476 dans le volume VI d'Adam et Tannery.

122. Même dans le cas général où l'on ne suppose plus $a = c$, cette équation admet en effet *trois racines réelles*, dont deux conduisent à des sections singulières hyperboliques, et une seule donne une section singulière elliptique (voir l'Annexe VII). Cela n'était certainement pas justifiable à l'époque ; en tout cas l'idée de notre preuve utilise le moderne théorème spectral. Donnons ici juste une indication succincte sur la réalité des trois racines. Soit (u, v, w) le triplet des coordonnées de A, avec $u = b$, $v = \frac{r}{2} - c$ et $w^2 = a^2 - b^2 - v^2$. Si l'on pose $s = \frac{w^2 x}{x - u}$, reporter $x = \frac{su}{s - w^2}$ dans l'équation conduit à l'équation suivante en s

$$-4s^3 + 4(u^2 + w^2 - rv)\, s^2 + rw^2(r + 4v)\, s - r^2 w^4 = 0.$$

Cette équation possède toutes ses racines réelles car c'est l'équation caractéristique de la forme quadratique $(wX - uZ)^2 + rZ\,(wY - vZ)$ avec $X = x - u$, $Y = y - v$ et $Z = z - w$ (on peut aussi utiliser plus élémentairement un calcul de variation de fonction).

123. Un second *lapsus calami* (Descartes, Clerselier ?) a introduit ici une erreur factuelle : la longueur RS vaut $\frac{b}{8}$ et non $\frac{b}{2}$ (*media pars datæ FE*). Elle a été corrigée par tous les autres éditeurs.

124. Il n'en est que plus étrange que ce texte n'ait pratiquement pas été jusqu'ici l'objet d'une étude approfondie.

coup, l'auteur ne détruit pas toutes les traces les étapes de sa démarche afin de narguer ses adversaires [125]. Disons simplement ici en un mot que l'ignorance au dix-septième siècle du *produit scalaire* de deux vecteurs [126] obligeait à bien des détours. Pour écrire que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BP}$ sont orthogonaux, il est contraint d'introduire le point H où la droite AD coupe le plan de base, ainsi qu'un point K de la parabole tel que $\overrightarrow{HK}$ soit parallèle à $\overrightarrow{BP}$; la relation à écrire se ramène alors à l'égalité pythagoricienne $AK^2 = KH^2 + AH^2$, ce qui oblige à un bien trop long détour.

Le recours à cette relation semble bien peu naturel [127] ; c'était d'ailleurs le cas à l'époque, comme le prouve une lettre de septembre 1641 dans sa correspondance avec Mersenne [128] qui se termine par une récrimination bien aigre : que le Père ne l'ennuie plus avec des questions sottes posées par des incapables qui n'avaient même pas compris ce que venait faire le *Quadratum AK æquatur Quadratis ex KH & AH* dans son texte. Il se contente de se paraphraser : « *Car AH étant la Perpendiculaire qui tombe du sommet du Cone sur le Centre de l'Ellipse cherchée, & HK étant la commune section de cette Ellipse & de la Parabole donnée, il est évident que l'angle AHK est droit* », après des protestations vives de n'avoir « *que faire de perdre du temps à enseigner des gens* [...] *fort peu capables d'estre enseignez* » [129].

Il semble clair que si les directions des axes du repère cartésien s'imposaient (celle de la tangente au sommet et celle de l'axe), Descartes a pu hésiter sur

125. Elle présente également une façon moderne plus simple, mais équivalente, d'arriver au même résultat.

126. Il n'apparaîtra qu'environ deux siècles plus tard, par exemple dans le calcul quaternionien d'Hamilton du 16 octobre 1843.

127. D'autant plus qu'ici, retournant à ses mauvais penchants, Descartes prend évidemment grand soin de ne pas expliciter sa tactique que nous avons tenté de détailler plus haut. Pourquoi exhiber brutalement un triangle rectangle que l'on n'attendait pas ? Au lecteur de s'arranger avec le texte...

128. Clerselier II 57, pages 301-303, Elzevir Epistolæ (1683) II LVII, pages 213-214, Adam Tannery III CCLI, pages 436-438, Adam Milhaud V 312, pages 61-63, Correspondance de Mersenne V 1034, pages 759-762, Belgioioso Armogathe 325, pages 1528-1526.

129. L'expression « commune section » est obscure (écrite trop vite ?). Il assure aussitôt que « *nous avons icy assez de papier pour le dernier vsage* » (sic) pour ne pas désirer recevoir d'autres lettres de médiocres objectant contre sa *Géométrie*.

Il est vrai que ce n'était pas encore l'époque où enseignant et enseignés exultent en s'enrichissent mutuellement de leurs différences, mais celle de la tradition proto-archaïque et orgueilleuse du Maître et de ses élèves, depuis fièrement balayée par l'Histoire.

l'emplacement exact de son origine : le sommet G - c'est notre choix - ou le point de l'axe Y situé à la distance $\frac{r}{2}$ du sommet [130]. Il faut rechercher en fait l'origine de l'introduction bizarre de ce point Y dans le passage du Livre Troisième de *La Géométrie* où Descartes prépare la résolution graphique d'une équation de degré trois ou quatre [131]. Il en résulte que Y n'est là que pour la résolution graphique de l'équation finale !

Quoi qu'il en ait été, le calcul a bien indiqué qu'à la fois $a = AG$ et $c = FY$ jouaient des rôles prééminents dans l'équation. Il lui a donc fallu choisir : G semble nettement plus probable que l'autre, surtout à la lecture de *La Géométrie* ; cela dit, il reste une trace de ce balancement dans la demande cartésienne de détermination simultanée des longueurs des segments MG et MY, ce qui est peu raisonnable et n'apporte rien [132].

En tout cas, l'emploi des lettres (a, b, c) pour les constantes et x pour une inconnue est caractéristique du lien cartésien soumettant la géométrie aux équations algébriques, enrichissant ainsi considérablement l'arsenal grec.

Des figures malencontreuses

Il est malheureusement nécessaire de tempérer l'enthousiasme devant une telle démarche par une critique forte contre la figure que Clerselier nous a transmise [133]. Il y a naturellement une forte chance pour que Descartes n'en soit pas complètement ou partiellement responsable, quoique l'on pourrait

130. Un instant pourrait faire croire que ce point est le foyer de la parabole, mais il n'en est rien, ce dernier étant situé à la distance $\frac{r}{4}$ du sommet G.

131. Page 391 des *Essais*, 465 du volume VI de l'édition Adam Tannery ; il y écrit « *Après cela, supposant que la parabole FAG est déjà décrite, et que son essieu* [axe] *est ACDKL, et que son côté droit est a ou 1, dont AC est la moitié, et enfin que le point C est au-dedans de cette parabole, et que A en est le sommet* » : il suffit d'y changer A en G et a en r pour trouver que Y est le point C de la méthode générale.

132. Dans notre Annexe V, nous avons donc « oublié » de calculer MY.

133. Elle a été reprise par tous les autres éditeurs, néanmoins avec quelques différences. Ainsi le segment AB est-il absent chez Adam Tannery et leurs successeurs, qui à l'inverse ont ajouté le point M décrit dans le texte et le segment KM. De plus, l'appartenance approximative et malheureuse du point N à la droite BDL se transforme, après Clerselier, en un alignement rigoureux, faisant de BL une perpendiculaire à l'axe. Enfin le fait que D soit le milieu de BL, correctement marqué au départ, devient plus problématique.

objecter que son texte, comme d'habitude trop concis, aurait sans aucun doute gagné à laisser filer davantage d'information.

Pour la clarté de la discussion, voici trois figures : celle qui est proposée en première place semble pouvoir donner une idée correcte et plus précise de la situation générale ; la seconde reproduit celle de Clerselier et la troisième celle d'Adam Tannery et les autres [134].

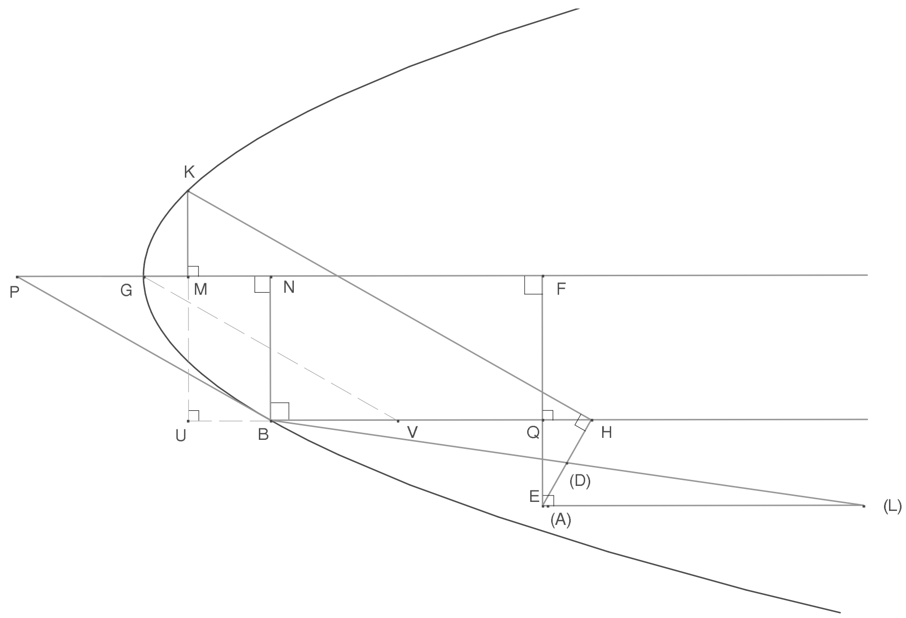


FIGURE 12.7 – *Première figure du Tertius casus*

La première laisse volontairement de côté les points c et Y, ainsi que S et R [135]. Elle confond volontairement A et sa projection E, ce qui est normal si on la considère comme la projection sur le plan de base de l'ensemble des points de l'espace concernés. Elle introduit en revanche deux nouveaux points U et V situés sur la droite BQH, respectivement *projection orthogonale* de M et *projection oblique* [136] de G parallèlement à la tangente BP (et donc à

134. Curieusement, elle est absente du CD-Rom des *Œuvres complètes* de Descartes.

135. Uniquement destinés à illustrer la résolution graphique cartésienne d'une équation du troisième degré.

136. C'est la première exception à la règle que nous nous étions fixée de ne parler que de projections orthogonales.

KH) ; le segment GV a été tracé pour souligner ce parallélisme particulier, lié comme on le verra aux propriétés des diamètres de la parabole.

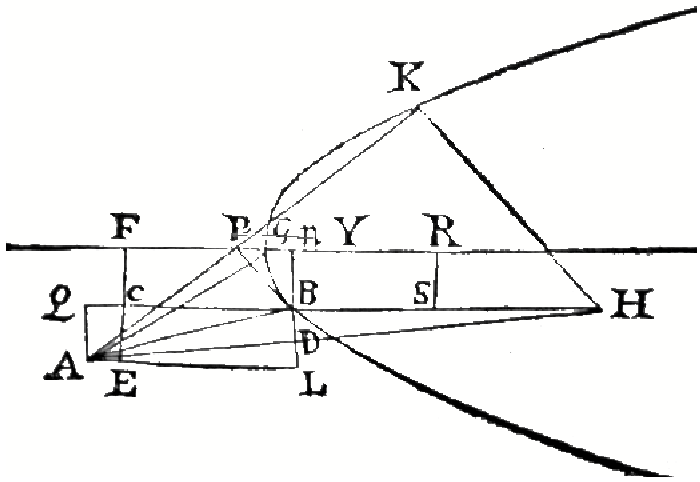


Figure 12.8 – *Deuxième figure (Clerselier) du Tertius casus*

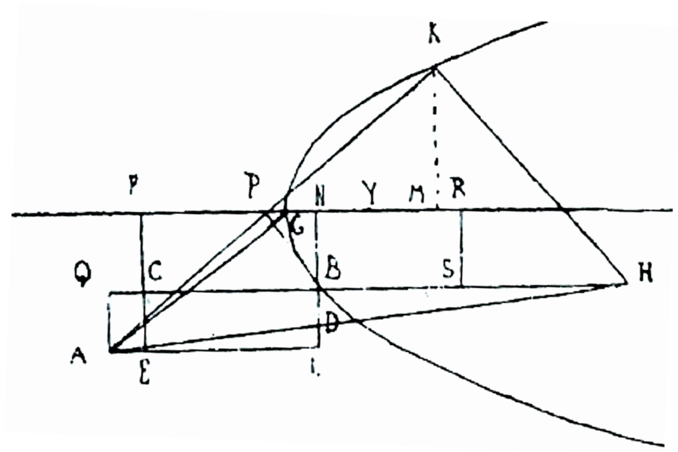


Figure 12.9 – *Troisième figure (Adam et Tannery) du Tertius casus*

La deuxième, comme la troisième qui lui est grosso modo identique, mérite les plus grands reproches. Décaler A de sa projection E, peut-être pour créer un effet de perspective oblique, aurait pu être intéressant, mais alors l'alignement AEL est peu compréhensible. Le point c, peut-être un avatar de Q, ne semble pas avoir de définition simple acceptable. Toute la partie gauche de la figure est plus que bancale.

Mais le pire est à venir. Cinq fautes très graves ternissent ce dernier dessin, le plus connu : le triangle AHK est bien rectangle, mais en K et non en H - ce qui est incroyable - ; les points K, P et A sont, à tort, pratiquement alignés ; les longueurs AL et BH sont inégales et $ABHL$ n'est pas un losange de centre D ; la longueur RS est portée vers le bas au lieu de l'être vers le haut ; enfin S appartient à la droite BH, ce qui n'a aucune raison d'être, même si l'on tient compte de l'erreur de recopie signalée plus haut en note (c'est-à-dire $b/2$ au lieu de $b/8$).

Tout cela fait que s'appuyer sur cette dernière figure (sous la forme où elle nous est parvenue) pour entrer dans son esprit est néfaste et concourt certainement à la réputation d'obscurité de ce texte.

Le *Quartus casus*

Le commentaire sur le dernier paragraphe du mini-traité est clair : Descartes joue ici avec le feu. Non qu'il ait tort : dans un *Quartus casus* tel que nous l'envisageons, on peut étendre le cas parabolique aux cas elliptique et hyperbolique en établissant une équation censée déterminer les points B de la base convenables pour construire une section singulière (éventuellement elliptique comme il est désiré).

Cela dit, il est clair qu'il bluffe. Pour trois raisons : l'obtention par les moyens modernes de calcul du polynôme qu'il évoque [137] montre qu'il était hors de portée même d'un excellent calculateur de cette époque - de surcroît privé de produit scalaire - ; il avoue hésiter sur son degré [138] ; et enfin et surtout ce degré, loin d'être au plus égal à 4, est en fait de 6.

137. Somme de quatre-vingt-dix-neuf termes dont certains multiples de 2, 3, 4 ou 6, s'étalant sur plus d'une quinzaine de lignes.
138. « *une équation qui ne dépassera pas quatre dimensions* ».

Ce degré reste néanmoins encore, théoriquement, dans les limites des résolutions graphiques cartésiennes de *La Géométrie* (à condition de recourir à une *Parabole de Descartes* et non plus une parabole ordinaire comme il croit pouvoir s'en vanter). De plus, par une chance qu'il aurait éventuellement pu entrevoir [139], ce polynôme de degré 6 en x peut-être considéré comme un polynôme de degré 3 en $X = x^2$, qui se laisserait théoriquement facilement traiter par la même méthode que pour le *Tertius casus* [140]. Finalement ce *Deus ex machina* lui permet d'avoir raison *in extremis* en écrivant : « *selon ma Géométrie, la construction se fera par la seule règle et par le cercle pour la section conique donnée* [141] », mais cela tient vraiment à un fil [142].

Rappelons la tactique (vue par un moderne). On commence par déterminer un réel t tel que $\overrightarrow{AL} = t\,\overrightarrow{AC}$ vérifie la nullité des deux produits scalaires

$$0 = 2\,(\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{T}\,) = (\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T}\,) = (t\,\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T}\,) = t\,(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{T}\,)+(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T}\,)$$

(orthogonalité de AD et de la tangente T) et

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,(\overrightarrow{AD} \,|\, \overrightarrow{BL}) = (\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AB}) \\ &= (t\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \,|\, t\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = t^2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 \end{aligned}$$

(orthogonalité de AD et de BL, visiblement équivalente aux deux relations $0 = \|\overrightarrow{AL}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2$ et $AL = AB$).

---

139. Si un point B est convenable, il en va de même de son diamétralement opposé C, et il est donc normal que l'opposé $-x$ de toute solution x soit encore solution, d'où une forte présomption de l'absence de tout terme impair dans l'équation.

140. On dit *polynôme bicubique* en x.

141. Peut-être faut-il traduire « *in data conica sectione* » par « *pour une section conique donnée* », comme nous l'avons fait dans notre Annexe I ? Il s'agit très probablement de la base. Mais de toutes façons cette phrase est obscure : la technique cartésienne de résolution graphique des équations de degrés 3 ou 4 repose sur l'intersection d'un cercle et d'une parabole ; dans le *Tertius casus*, la base est bien une parabole qui convient à la construction des racines. Mais dans le *Quartus*, cette base n'est pas une parabole : peut-être pense-t-il à une variante de sa technique consistant à couper cette base par un cercle bien ajusté ? En tout cas, cela demanderait une étude spéciale qui dépasserait le contenu de son livre.

142. Inutile d'ajouter que l'énormité du nombre des coefficients rend une telle résolution graphique totalement inopérante mais, comme on le sait, Descartes se souciait surtout de théorie abstraite originale et très peu d'applications pratiques de ses idées, même très puissantes.

La première équation est de premier degré en t, ce qui détermine L ; la seconde est alors suffisante pour obtenir une section singulière [143] pour laquelle le point B de la base convient (nous dirons que B est *singulier*). Elle fournit une égalité portant sur les coordonnées (x, y) de B. Mais ce point appartient à la base, d'équation $ax^2+by^2 = 1$ dans un repère adapté. Il suffit alors d'éliminer y entre les deux équations ci-dessus, ce qui donne enfin un polynôme $f(x)$, de degré 6, analogue à celui du *Tertius casus* [144], et dont la nullité détermine ici encore les points B singuliers.

L'Annexe VI donne deux programmes modernes dans les langages de calcul formel *Mathematica* et *Maple* qui effectuent ce gros travail en silence, ainsi que le résultat $f(x)$.

Elle indique également comment se pose le problème pénible consistant à démontrer que $f(x) = 0$ admet toujours au moins une racine réelle, et qu'il lui correspond bien un y tel que le point de coordonnées (x, y) soit un B singulier, et elle le résout dans le cas d'une base elliptique.

Enfin une Annexe VII montre comment on peut modifier ce *Quartus casus* sans calculer $f(x)$ en montrant simplement, par le recours aux bons vieux outils apolloniens, que *tout cône à base elliptique ou hyperbolique admet une section parabolique* : on est alors automatiquement rejeté dans les bras du *Tertius casus* et la démonstration est par conséquent terminée sans l'horrible calcul qu'il croit devoir indiquer [145].

Il n'est peut-être pas inintéressant de rappeler, pour conclure ce point, que Paul Tannery affirme froidement [146] que le degré du polynôme évoqué par Descartes pour le *Quartus casus* est égal à trois. Cela pose deux problèmes : comment Tannery, bon mathématicien mais non pas calculateur exceptionnel, aurait-il pu, évidemment sans ordinateur, trouver notre polynôme bicubique ? S'il avait par exemple utilisé le théorème spectral, bien connu déjà à son époque, pour deviner la forme du résultat sans être allé au bout du *tour de force*, pourquoi n'avoir alors pas signalé que c'était un polynôme du troisième

143. Et nécessaire, mais c'est sans importance ici.
144. Dont Descartes assurait que le degré ne dépassait pas 4.
145. Au passage, on aura ainsi prouvé que tout cône cartésien admet au moins une section singulière elliptique, ce que le théorème spectral permet de retrouver instantanément, et même en précisant l'unicité de sa direction.
146. AT III, page 714.

degré, mais en x^2, et donc de degré six en x ? La question semble devoir rester ouverte, faute de connaître aucune allusion de Tannery à ce problème dans d'autres œuvres.

Un autre point de vue

Voici une variante *a priori* intéressante de la tactique proposée par Descartes ; elle s'en écarte, mais fournit une voie qui semble nouvelle en cherchant à se ramener plutôt au *Secundus casus* plutôt qu'au *Primus*. Pourtant elle conduit à la même équation ! Ce paradoxe peut être facilement levé.

On commence par déterminer un réel t tel que $\overrightarrow{AL} = t\,\overrightarrow{AC}$ vérifie la nullité des deux produits scalaires

$$0 = (\overrightarrow{BL} \mid \overrightarrow{T}\,) = (\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T}\,) = (t\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T}\,) = t\,(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{T}\,) - (\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{T}\,)$$

(orthogonalité de BL et de la tangente T) et

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,(\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BL}) = (\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AB}) \\ &= (t\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \mid t\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = t^2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 \end{aligned}$$

(orthogonalité de AD et de BL, toujours équivalente à la relation $AL = AB$).

La première équation est de premier degré en t, ce qui détermine L ; la seconde est alors suffisante pour que le point B de la base convienne pour exhiber une section conique sur le plan de laquelle *A se projette en un point de l'un de ses axes*[147]. Elle fournit une égalité portant sur les coordonnées (x, y) de B. Mais ce couple vérifie l'égalité $ax^2 + by^2 = 1$: il suffit alors d'éliminer y entre les deux équations ci-dessus, ce qui donne enfin un polynôme $g(x)$ de degré 6, analogue à $f(x)$. Ici, nous ne sommes pas ramenés au *Primus casus* (*A se projette orthogonalement au centre d'une section*), mais au *Secundus casus*, ce qui revient au même quant à la finalité du problème à résoudre.

Ce qui peut paraître étonnant c'est que les deux techniques aboutissent au même polynôme bicubique, à savoir $g(x) = f(x)$. En fait, le calcul montre

147. B n'est donc plus, *a priori*, singulier.

qu'elles donnent deux valeurs opposées du paramètre t ; dès lors, les points L donnés par les deux méthodes - notons-les L_1 et L_2 - sont symétriques par rapport à A, le triangle L_1BL_2 est rectangle en B, et un peu de géométrie très élémentaire montre que les conditions $0 = (\overrightarrow{AD_1} \mid \overrightarrow{T})$ et $0 = (\overrightarrow{BL_2} \mid \overrightarrow{T})$ sont équivalentes, ce qui lève le paradoxe [148].

En guise de conclusion

La *Proposition démontrée par Monsieur Descartes* prétend donner une solution à un vieux problème, déjà partiellement examiné par Archimède et posé de nouveau par Desargues à ses contemporains : **montrer que *tout cône à base conique* est un *cône à base circulaire***.

Malheureusement la preuve ici présentée est incomplète sur deux points

1. Elle semble supposer que toute section plane d'un cône à base conique est une conique, ce qui est exact mais non explicitement prouvé par Descartes (ni semble-t-il par aucun de ses contemporains).

2. Le cas général n'est effectivement résolu que pour une base parabolique, et non elliptique ou hyperbolique.

Toutefois, notre Annexe III montre comment compléter facilement la première lacune en s'inspirant par exemple d'un texte d'Apollonius, ce qui permettrait de penser que Descartes trouvait cela évident [149].

La seconde est censée être comblée par quelques lignes en toute fin du texte, mais une étude moderne montre tout de suite [150] que l'extension évoquée par l'auteur n'aurait pu conduire, à l'époque, à une solution vraiment complète.

148. Cette seconde manière de voir l'annulation du polynôme $f(x)$ n'est pas sans intérêt : la première méthode fournit un point L_1 conduisant à une section singulière hyperbolique dès que L_1 n'est pas sur le même demi-cône que B ; son symétrique L_2 pourrait sembler fournir une section singulière elliptique. Malheureusement la section du cône par le plan contenant la tangente en B et ce point L_2 est bien une ellipse mais en général non singulière. Tout ce que l'on peut montrer au sujet de cette section c'est que A se projette orthogonalement sur un axe métrique de cette conique, à savoir BL_2, mais pas nécessairement en son centre et il faut aussi alors passer par le *Secundus Casus*

149. À moins qu'il n'ait préféré cacher cela à ses adversaires.

150. Notamment à l'aide de logiciels de calcul formel.

Cela dit, la stratégie cartésienne, même si elle a été inspirée par un texte d'Archimède[151], est suffisamment originale et a été poussée assez loin pour que l'on puisse porter au crédit de Descartes d'avoir résolu, pour l'essentiel, la question posée.

Il a notamment pu le faire grâce à son invention majeure : la géométrie analytique. Cependant son texte ne la fait apparaître qu'une seule fois[152] : pour le reste, son texte reste très proche des méthodes anciennes là où cela est possible et préférable, pour des raisons de clarté, aux calculs mécaniques souvent peu lisibles.

Il est important de noter que cette application de la géométrie analytique se limite essentiellement à la géométrie plane : Descartes n'a jamais été à l'aise dans l'espace, ce qui ajoute naturellement à l'impression selon laquelle son invention n'a été pour lui, au moins au départ, qu'un outil intelligent mais limité à ce pourquoi il le destinait primitivement.

Nous disposons donc ici d'un texte particulièrement précieux puisque, daté de 1641, il présente une occasion rare de le voir mettre sa technique récente au service d'un problème ancien[153]. On y voit également une application de ses idées sur la résolution graphique des équations algébriques, qui lui tenait tant à cœur que l'on peut penser que c'est pour elle qu'il a été conduit à développer la géométrie analytique.

Annexe I : Version française du texte cartésien

PROPOSITION DÉMONTRÉE PAR M$^{\text{r}}$ DESCARTES

Soient donnés une section conique quelconque et aussi un point situé comme on veut en dehors du plan de cette section, on cherche un cercle qui soit une base du cône que décrit une droite passant par le point donné comme sommet

151. Qui a pu lui même être à la base de la technique apollonienne évoquée plus haut. Voir notre Annexe IX.
152. Il est vrai en une intervention fondamentale.
153. On pourrait en dire autant par exemple de son évocation du *problème de Pappus* dans *La Géométrie*.

et tournant autour de la section conique donnée ; car il n'est pas douteux que la surface ainsi décrite ne soit celle d'un cône, et on peut facilement le démontrer, après avoir trouvé un cercle qui en est une base.

Solution

Je distingue dans cette proposition trois cas :

Le premier, lorsque la section donnée est une ellipse, et que le point donné tombe perpendiculairement sur son centre ;

Le second, lorsque la perpendiculaire menée du point donné tombe ailleurs sur un axe de l'ellipse donnée, ou, à volonté, sur un axe d'une l'hyperbole ou d'une parabole données ;

Le troisième enfin, lorsque qu'elle tombe en dehors des axes.

Premier cas

Soient l'ellipse BOL, et le point A élevé perpendiculairement sur son centre D à la distance AD. Je mène les lignes AB et AL à partir du sommet A du cône jusqu'aux extrémités B et L du plus petit diamètre de l'ellipse donnée. Ensuite je cherche une ligne p qui soit à AB comme DO est à $DO + DB$; de même une ligne q, qui soit à la même ligne AB comme DO est à $DO - DB$; et une ligne r, moyenne proportionnelle entre p et q. Et enfin du point A comme centre je décris un cercle dont le rayon est égal à la ligne r, et ce cercle coupe le diamètre BL prolongé en K, de telle sorte que, en joignant A et K par une droite, si du point B on y mène la parallèle BC, cette ligne BC est un diamètre d'un cercle cherché, comme on le démontre facilement par l'analyse.

Or les cas suivants se ramènent à celui-ci, parce qu'il sera plus facile d'y trouver une ellipse sur le centre de laquelle tombe la perpendiculaire menée du sommet du cône, qu'un cercle qui soit une base de ce même cône.

Second cas

Soient l'ellipse BFC, et le point A élevé perpendiculairement au-dessus du point E de l'axe BC à la distance AE. Je mène les lignes BA et CA, et sur la plus longue CA prenant AL égal à la plus courte BA, j'ai la ligne BL pour l'un des diamètres de l'ellipse sur le centre D de laquelle tombe perpendiculairement le point A. Et une autre ligne, menée par le point D perpendiculairement à la ligne AD et parallèlement au plan de la section BFC, terminée de part et d'autre à cette section conique, est l'autre diamètre de la même ellipse, conjugué au premier. Or des diamètres conjugués de l'ellipse étant donnés, l'ellipse elle-même est aussi donnée. Et une fois donnée l'ellipse sur le centre de laquelle le sommet du cône surplombe perpendiculairement, on trouve un cercle qui sera une base de ce même cône, de la façon déjà expliquée auparavant.

De même, soient la parabole BF, et le point A élevé perpendiculairement au-dessus du point E de l'axe BC à la distance AE. Je mène la ligne AB, et de même AL égal à AB et parallèle à BC. La ligne BL est l'un des diamètres d'une ellipse sur le centre D de laquelle le point A surplombe perpendiculairement. Et l'on a comme auparavant l'autre diamètre qui lui est conjugué.

De même, soient l'hyperbole BF et son opposée avec le sommet C ; et soit le point A élevé perpendiculairement au-dessus du point E de l'axe BC à la distance AE. Je mène les lignes BA et CA, et en prenant sur la plus longue CA prolongée au delà du point A une longueur AL égale à la plus courte BA, j'ai la ligne BL pour un des diamètres d'une ellipse, *etc.*, comme ci-dessus.

De même, soient l'hyperbole BF et son opposée avec le sommet C ; et soit le point A élevé perpendiculairement au-dessus du point E du second axe HE à la distance AE. Je prend sur l'axe HE une longueur HG égale à HA, et étant menées les lignes BG et CG, celle-ci prolongée en L, de telle sorte que GL égale BG, la droite BL est l'un des diamètres conjugués d'une ellipse cherchée, c'est-à-dire sur le centre D de laquelle surplombe perpendiculairement le point A. Et l'autre ligne, menée par le centre D perpendiculairement à GD ou à AE (car les lettres A et G représentent un seul et même point au-dessus du plan BCE, qu'il faut imaginer dans l'espace), et parallèlement au plan de la section conique BFC et terminée des deux côtés à la surface du cône, est son diamètre conjugué, comme ci-dessus.

Et tout cela est si clair, qu'il ne paraît pas avoir besoin de démonstration.

Troisième cas

Soient la parabole BGK avec le sommet G et une portion de l'axe GY égale à la moitié du côté droit ; et soit aussi en dehors du plan le point A, d'où la perpendiculaire AE tombe en dehors de l'axe sur le point E du plan de la section. Soient aussi donnés les lignes :

AG que j'appelle a ;

EF, perpendiculaire de E sur l'axe, que j'appelle b ;

FY que j'appelle c ;

et le côté droit, que j'appelle r ;

au moyen de ces lignes je cherche un point B, où la parabole est tangente à une ellipse sur le centre de laquelle tombe la perpendiculaire menée du point A, ou je cherche la ligne BN perpendiculaire à l'axe GY, que j'appelle x, et je trouve par l'analyse [154] :

$$x^3 \| + \frac{a^2}{b}x^2 - \frac{c^2}{b}x^2 + crx - \frac{1}{4}br^2,$$

et de cette équation il est facile d'avoir le point B par ma Géométrie. Car, si a et c sont égales, il faut prendre seulement sur l'axe une longueur YR, moitié de la droite donnée FY, et la perpendiculaire RS, moitié [155] de la droite donnée FE, et le cercle mené du centre S par le sommet G de la section, coupera la parabole au point cherché B. Si a et c ne sont pas égales, cette construction sera bien un peu plus longue, mais pas plus difficile. Une fois trouvé le point B, je mène la droite AB, et de même AL qui lui est égale et parallèle à l'axe GY ; et BL est l'un des diamètres d'une ellipse cherchée. Et

154. Voir page 660.
155. Lire : huitième partie.

la ligne menée par son centre D perpendiculairement à AD et parallèlement au plan de la section, avec ses deux extrémités à la surface du cône, est l'autre diamètre qui lui est conjugué.

Or l'analyse, pour trouver le point B, s'établit de cette façon. Au moyen des lignes données ou prises à volonté AG, EF, FY, YG, GN et NB, on cherche AB, de même BP, tangente à la parabole en B ; et faisant BH égal à AB et parallèle à l'axe GY, on trouve AH à partir de AQ, QB et BH ; de même HK qui est parallèle à la tangente BP ; de même KM qui est la perpendiculaire du point K sur l'axe GY ; de même MG et MY. Et au moyen des lignes données ou prises à volonté AG, EF, FY, MY et KM, on trouve AK, dont le carré doit être égal aux [156] carrés de KH et AH, parce que l'angle ADB est droit comme l'est AHK. Et l'équation qu'on trouve par cette voie est telle :

$$x^3 \| \Big(+ \frac{a^2}{b} - \frac{c^2}{b} \Big) x^2 + crx - \frac{1}{4} br^2.$$

La méthode d'analyse est la même pour l'hyperbole et pour l'ellipse, et bien qu'elle doive être quelque peu plus compliquée et plus longue, elle pourra toutefois se ramener nécessairement à une équation qui ne dépassera pas quatre dimensions [157], et c'est pourquoi, selon ma Géométrie, la construction se fera par la seule règle et par le cercle pour une section conique donnée.

Annexe II : Quelques invariants géométriques

Un certain nombre de preuves de théorèmes géométriques par les anciens (Apollonius, Archimède par exemple) se présentent sous la forme de l'égalité de deux rapports. L'outil général pour les justifier consiste à multiplier des couples de triangles semblables, dont Descartes fera lui-même grand usage.

Un autre outil puissant pour déterminer de telles égalités est le *théorème des sinus* [158]. Il signifie (en termes modernes) que, dans un triangle donné, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés. En voici

156. Égal à la somme des carrés.
157. Dont le degré ne dépassera pas quatre.
158. Il joue par exemple un rôle fondamental dans la théorie des normales aux Ovales qui clôt le Livre Second de *La Géométrie*.

une preuve cohérente avec la géométrie euclidienne de base[159] : la hauteur issue de A vaut $AB \sin \widehat{B} = AC \sin \widehat{C}$. Par suite $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}}\cdot$

On en déduit un *invariant fondamental* dans toute figure comportant deux couples de droites sécantes comme ci-dessous.

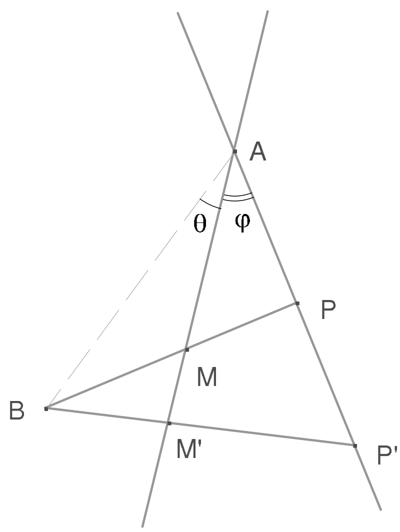


FIGURE 12.10 – *Un invariant géométrique simple*

Fixant les points A et B et les deux droites sécantes en A, pour toute sécante BMP on peut écrire le théorème des sinus dans les triangles AMP et AMB. On en déduit les égalités

$$\frac{AP}{PM} = \frac{\sin \widehat{M}}{\sin \varphi}, \quad \frac{BM}{AB} = \frac{\sin \theta}{\sin \widehat{M}}$$

puis $\dfrac{AP \cdot BM}{PM} = AB \dfrac{\sin \theta}{\sin \varphi}$, expression indépendante de la sécante BMP. En résulte par exemple l'égalité $\dfrac{AP \cdot BM}{PM} = \dfrac{AP' \cdot BM'}{P'M'}\cdot$

159. À l'exception du mot *sinus* lui même, contourné par un rapport mettant en jeu les hauteurs du triangle.

Il existe beaucoup d'invariants du même genre [160], ne serait-ce que $\dfrac{AM \cdot BP}{MP}$ et, par élévation au carré de ce nouvel invariant et multiplication par le premier, $\dfrac{AM^2 \cdot BP^2}{AP \cdot PM \cdot MB}$.

Appliquant cela à la figure ci-dessous, en remplaçant les couples (M, P) et (M', P') respectivement par (Z, L) et (H, C), on obtient ce que nous appellerons *l'invariant du quadrilatère complet*

$$\left(\frac{AZ}{AH}\right)^2 \frac{HB \cdot HC}{ZB \cdot ZL} = \left(\frac{BC}{BL}\right)^2 \frac{AL}{AC}$$

où le second membre ne dépend que de (A, B, C, L) et non du point variable Z. Cet invariant nous sera utile, par exemple, dans l'Annexe suivante pour mieux décrypter une preuve d'Apollonius et, au delà, mieux comprendre comment sortir du « cercle vicieux ».

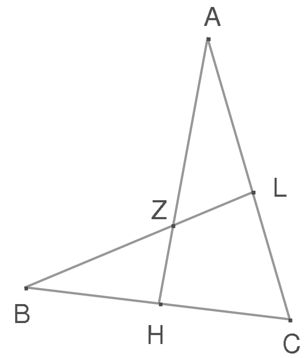


FIGURE 12.11 – *Un cas particulier de cet invariant*

Si le point C, par exemple, est à l'infini, cette égalité devient

$$\left(\frac{AZ}{AH}\right)^2 \frac{HB}{ZB \cdot ZL} = \frac{AL}{BL^2}$$

ce que l'on peut d'ailleurs retrouver directement [161] par l'homothétie de centre Z transformant A en H.

160. Que l'on peut regarder, par exemple, comme des extensions du théorème de Thalés.
161. Nous ne prétendons pas ici, même si c'était théoriquement accessible aux Grecs, que

Annexe III : Un « cercle vicieux » ?

Il a été reproché plus haut à Descartes d'avoir transmis un texte, une démonstration destinée à impressionner ses lecteurs par ses qualités mathématiques, où est implicitement utilisé le fait que toute section plane d'un cône cartésien était une conique, ce qu'il lui aurait fallu établir à l'avance [162]. Le but de cette Annexe est de boucher cette faille fondamentale du texte cartésien, à l'aide de moyens purement apolloniens [163].

L'équation d'une conique d'après Apollonius

La première trace d'une telle équation figure implicitement dans Euclide à propos du cercle : la célèbre proposition III 31 établit que l'angle sous lequel un diamètre AB est vu d'un point M d'un demi-cercle est droit, alors que les propositions [164] VI 8 et VI 17 établissent que, si M se projette en H sur AB, alors HM est moyenne proportionnelle entre HA et HB, puis que [165] $HM^2 = HA \cdot HB$.

---

de tels invariants aient été mis en évidence. Il en allait vraisemblablement de même au dix-septième siècle, ce concept n'étant vraiment apparu qu'au dix-neuvième. Mais c'est un lien commode pour nous pour circuler à l'intérieur de diverses preuves telles que Descartes a pu les concevoir, mais à chaque fois en recourant à des triangles semblables qui pullulent parfois tellement dans certaines figures que trouver les « bons couples » relève d'un art laborieux ou d'une divination géométrique exceptionnelle. Nous en ferons donc libre usage par la suite.

162. Tout au moins lui aurait-on pardonné d'avoir écrit négligemment quelque chose du genre « *on peut aisément prouver cela en relisant par exemple telle proposition d'Apollonius* ». Il ne l'a pas fait, rien ne dit qu'il n'y ait pas pensé ; une vision peut-être trop optimiste peut laisser croire, comme nous allons le voir, que sa grande connaissance des textes grecs fondamentaux l'aurait poussé à trouver cela évident. Ou peut-être a-t-il, comme d'habitude, voulu cacher des étapes à ses adversaires ?

163. Rappelons que cela pourrait aussi se dire archimédiens ou euclidiens.

164. Plus précisément son *porisme* (corollaire).

165. La réciproque n'est pas évoquée ; elle sera pourtant utilisée par Apollonius, par exemple dans la dernière ligne de sa proposition I 5. On peut toutefois noter qu'elle est un corollaire immédiat de la proposition VI 13, donnant la construction classique de la racine carrée d'un produit : de la relation $HN^2 = HA \cdot HB$ si N appartient au cercle de diamètre AB et de l'unicité de la racine carrée (positive) l'égalité $HN = HM$ résulte que le point H est, soit N, soit son symétrique, et appartient donc au cercle. (On peut voir aussi II 14.)

Plus généralement [166], Apollonius établit dans ses propositions I 12 (hyperbole) et I 13 (ellipse) que le rapport $HM^2/HA \cdot HB$ est constant pour une conique dont AB est un certain diamètre connu [167]. Le cas voisin de la parabole avait été étudié en I 11. Le passage à n'importe quel diamètre est assuré plus loin par les propositions I 20 pour la parabole, et I 21 pour les coniques à centre [168].

Voici la figure d'Apollonius [169], destinée à expliquer comment obtenir l'équation d'une section elliptique d'un cône apollonien de sommet A. Avec ces notations, le rapport constant s'écrit $\mathrm{M\Lambda}^2/\mathrm{ME} \cdot \mathrm{M\Delta}$.

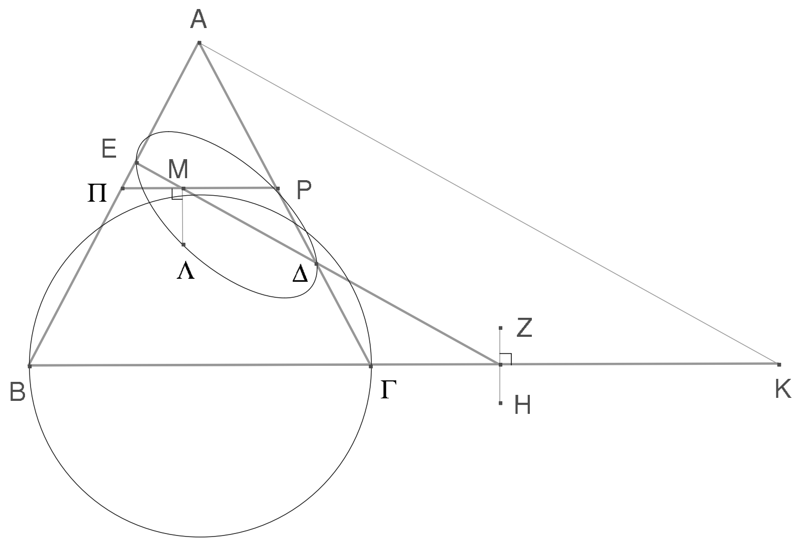


FIGURE 12.12 – *Une figure d'Apollonius*

Au départ, nous disposons d'un cône de sommet A et de base circulaire $\mathcal{C}$, d'un plan $\mathcal{P}$ coupant le plan de base suivant une droite ZH et le cône suivant une conique γ (supposée à centre). Apollonius note BΓ le diamètre de $\mathcal{C}$

166. Voir les pages 21, 24 et 28 de l'édition Ver Eecke.
167. Ici la projection a lieu parallèlement à la tangente en A (c'est la seconde exception dans cette Annexe où une projection est non nécessairement orthogonale).
168. Voir les pages 42 et 43. Les réciproques peuvent s'établir comme plus haut, voire en « remontant les calculs ».
169. D'après la page 30 de l'édition Ver Eecke. Nous avons gardé les notations, mais simplifié légèrement en enlevant des points inutiles pour notre propos cartésien.

orthogonal à ZH et trace sa figure dans le plan ABΓ, contenant également $\mathrm{E} = \mathcal{P} \cap \mathrm{AB}$ et $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathrm{A\Gamma}$.

Soit M un point arbitraire de EΔ, et ΠP un segment homothétique de BΓ par rapport à A et tel que M appartienne à la droite ΠP. Ce point M est aussi la projection de deux points de γ sur ΠP dont nous noterons Λ l'un d'eux, qui appartient au plan ABΓ. Enfin K est le point de BΓ tel que AK soit parallèle à EΔ, ce qui rappelle le point K de la figure de Descartes pour le *Primus casus*.

On doit noter en outre que, sur cette figure, nous avons préféré remplacer d'assez vagues représentations en perspective de $\mathcal{C}$ et γ par des rabattements sur le plan ABΓ (à la mode cartésienne).

Le raisonnement d'Apollonius, légèrement modernisé[170], consiste à remarquer les couples de triangles $\begin{bmatrix}\mathrm{E\Pi M}\\ \mathrm{ABK}\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}\mathrm{\Delta PM}\\ \mathrm{A\Gamma K}\end{bmatrix}$ deux à deux semblables car ayant leurs angles égaux. Il en déduit les égalités

$$\mathrm{M\Pi} \cdot \mathrm{MP} = \mathrm{ME} \cdot \frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{KA}} \cdot \mathrm{M\Delta} \cdot \frac{\mathrm{K\Gamma}}{\mathrm{KA}},$$

$$\text{puis} \qquad \frac{\mathrm{ME} \cdot \mathrm{M\Delta}}{\mathrm{M\Lambda^2}} = \left(\frac{\mathrm{KA}^2}{\mathrm{KB} \cdot \mathrm{K\Gamma}}\right) \frac{\mathrm{M\Pi} \cdot \mathrm{MP}}{\mathrm{M\Lambda^2}}\,.$$

Il en résulte que, puisque le troisième quotient vaut 1 et que le second est indépendant de M, le point variable Λ satisfait à une égalité de la forme $\mathrm{ME} \cdot \mathrm{M\Delta} = k\,\mathrm{M\Lambda}^2$ où k est une constante : c'est l'équation de γ qui est ainsi justifiée[171]. Le symétrique Λ' de Λ par rapport à ΠP vérifiant également cette équation, on trouve ainsi au passage que EΔ est bien un diamètre de γ.

Cette démonstration est évidemment, telle quelle, inapplicable à une section parabolique, mais les modifications à y apporter sont faciles à imaginer.

170. L'usage de l'époque voulait que ces calculs soient présentés dans un style extrêmement verbeux et couvrent plusieurs pages.

171. Bien entendu une réciproque devrait figurer pour que l'on puisse parler d'*équation*, mais les calculs sont visiblement nécessaires et suffisants.

Comment ce texte éclaire le « cercle vicieux »

Nous avons tenu à expliciter complètement le raisonnement apollonien, forcément bien connu de Descartes, parce que l'on peut en tirer très facilement l'idée d'une démonstration géométrique que **toute section d'un cône cartésien par un plan P coupant le plan de base suivant une parallèle à la tangente en un point** B **de la base est une conique**[172]. Ce théorème est exactement celui qui manque aux manipulations cartésiennes. On peut donc imaginer que sa connaissance profonde des *Coniques* ait pu conduire Descartes à son omission.

La figure suivante a ses notations inspirées de celle associée à la proposition I 5 mettant en évidence la double famille de sections cycliques d'un cône apollonien : la technique sous-tendant ce qui suit s'inspire à la fois de sa preuve et de ce qui précède, les deux démarches étant fondamentalement analogues.

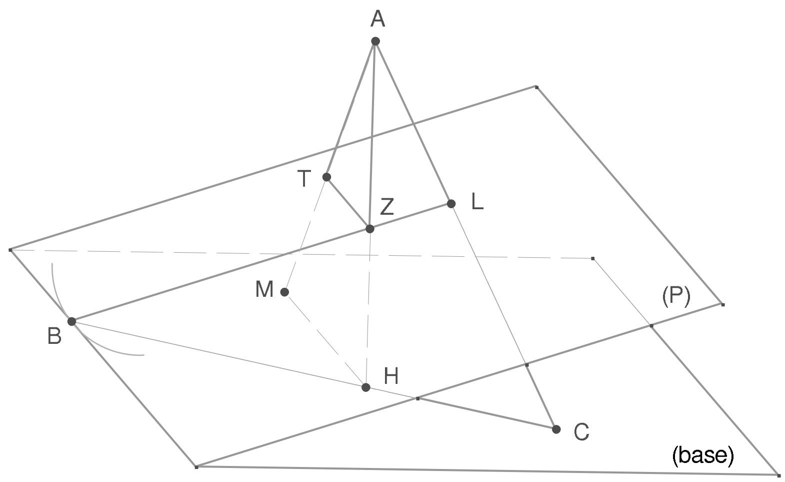


FIGURE 12.13 – *Pour lever le « cercle vicieux »*

On voit sur cette figure le sommet A du cône, deux points B et C de la base ainsi qu'un arc de cette dernière et la tangente en B à cette conique. Cette

172. En outre, nous retrouverons sa trace dans l'Annexe suivante consacrée à la construction géométrique cartésienne du *Primus casus*.

droite est l'intersection du plan de base et du plan P dont on désire connaître la nature de la section du cône qu'il définit. Enfin $L = P \cap AC$.

À tout point T de P on associe le point Z de BL tel que TZ soit parallèle à la tangente, ainsi que l'intersection M de AT et du plan de base [173] dont il est facile de prouver l'alignement [174] avec A et Z. On dispose évidemment de l'égalité $\dfrac{ZT}{HM} = \dfrac{AZ}{AH}$ par homothétie.

Parmi toutes les preuves possibles (dont certaines uniquement à l'aide de couples de triangles semblables) nous choisissons la plus courte. L'invariant du quadrilatère complet décrit dans l'Annexe II permet d'écrire

$$\frac{ZT^2/ZB \cdot ZL}{HM^2/HB \cdot HC} = \left(\frac{AZ}{AH}\right)^2 \frac{HB \cdot HC}{ZB \cdot ZL} = \left(\frac{BC}{BL}\right)^2 \frac{AL}{AC} = m$$

où m est indépendant du choix de T. Il en résulte que, si M décrit une conique (la base), alors l'équation apollonienne des coniques montre que T en décrit également une [175], ce qui prouve le théorème annoncé [176].

Si la base est une parabole, on peut imaginer C à l'infini, et l'invariant s'écrit alors $\dfrac{ZT^2}{ZB \cdot ZL} = \dfrac{AL}{BL^2} \dfrac{HM^2}{HB} = m \dfrac{AL}{BL^2}$ d'où la même conclusion [177].

Un peu de géométrie analytique dans l'espace

Une autre preuve du théorème fondamental de cette Annexe peut être présentée qui n'utilise que le résultat de Descartes par lequel il montre [178] que toute équation de la forme $F(x, y) = 0$ où F est un polynôme à deux variables de degré 2 représente une conique. Plus précisément, F peut se décomposer

173. Nous nous plaçons naturellement dans le cas générique dans lequel toutes ces intersections sont bien ponctuelles.

174. L'intersection de deux plans sécants distincts est une droite.

175. Et réciproquement.

176. Il n'est pas alors difficile d'en déduire que la tangente en L à l'intersection est parallèle à la tangente en B dès que les tangentes en B et C sont elles aussi parallèles.

177. Pour tenter d'être complet, il faut aussi considérer le cas où C est à distance finie, mais où c'est L qui est à l'infini : le calcul est alors essentiellement identique.

178. Dans le Livre Second de *La Géométrie* : voir les pages 324-334 des *Essais*, reprises dans les pages 397-405 du volume VI de l'édition d'Adam et Tannery.

en une somme $F = U + V + W$ où $U \neq 0$, V et W sont homogènes et respectivement de degrés 2, 1 et 0. Il a aussi démontré, au passage, la possibilité de changements de repère cartésien [179].

Supposons les axes choisis de façon que le plan sécant [180] ait une équation de la forme $z = my + n$, que le cône soit de sommet O et que la base ait pour équations $z = h$ et $F = 0$. Il est immédiat, par des considérations d'invariance par homothétie, que

$$h^2U(x,y) + hz\,V(x,y) + z^2W = 0$$

est une équation du cône. En y reportant $z = my + n$, on obtient une équation : $U^*(x,y) + V^*(x,y) + W^* = 0$ avec, ici encore, U^*, V^* et W^* homogènes et de degrés respectifs 2, 1 et 0. C'est une équation de la projection sur le plan $z = 0$ de l'intersection du cône et du plan. Donc cette projection est une conique, et suffit de remonter cette projection sur le plan dont elle est issue pour voir que la section étudiée est, elle aussi, une conique [181].

Nous venons de montrer que le théorème annoncé est donc une conséquence, à la portée de Descartes, de son grand théorème sur les équations des coniques, lui-même issu de son étude du célèbre problème de Pappus. Cela dit, c'est quand même peu vraisemblable, Descartes n'ayant que très peu pratiqué la géométrie dans l'espace [182].

179. Dans la preuve même du résultat rappelé ci-dessus.

180. Sur lequel nous ne faisons plus de restriction, apportant ici le résultat le plus général possible, au lieu de nous limiter au cas - suffisant - des plans coupant le plan de base suivant une parallèle à au moins une tangente à la base.

181. En notant (X,Y) les coordonnées du point du plan dont la projection a pour coordonnées $x = X$ et $y = \dfrac{Y}{\sqrt{1+m^2}}$, on voit que l'équation de la section dans le repère (X,Y) s'écrit encore sous la forme $U^*(X,Y) + V^*(X,Y) + W^* = 0$.

182. On peut quand même noter quelques très rares cas, dont le dernier paragraphe du Livre Second (avec malheureusement une erreur spécialement grave), des allusions à un problème de *quatre sphères* (AT I page 277, II page 246 et IV page 228 où est également présentée une question concernant trois cadrans solaires associés à *trois bâtons*, à traiter dans un chapitre consacré à la *Correspondance*) et évidemment à cette *Propositio*, dans lesquels l'auteur s'arrange en fait pour ne travailler essentiellement qu'en géométrie plane. Le véritable début d'une géométrie cartésienne à trois dimensions date de 1728, avec un article d'Euler intitulé *De linea brevissima in superficie quacunque duo quælibet puncta iungente*, où la troisième coordonnée t joue un rôle à part, suivi par les *Recherches sur les courbes à double courbure* de Clairault en 1729 - l'auteur, âgé de 16 ans, a présenté son

Apollonius a-t-il inventé les coordonnées ?

Terminons en rappelant trop brièvement que ces textes d'Apollonius ont pu faire croire qu'il connaissant déjà une sorte de géométrie analytique. Cette opinion est abandonnée depuis longtemps. Citons simplement l'historien des mathématiques Carl Benjamin Boyer [183] : son principal argument repose sur le fait que, chez les Grecs, « *Les droites de référence* [les axes] *constituaient simplement dans chaque cas une construction auxiliaire surimposée* a posteriori *sur une courbe donnée* [...] *il n'apparaît dans la géométrie des anciens aucun cas où un système de coordonnées de référence ait été construit* a priori *pour obtenir des constructions graphiques ou résoudre un problème donné.* » [184].

Autre différence très importante : les Grecs ont peut-être appliqué l'idée fondamentale de la géométrie analytique, mais c'était *à propos d'une courbe connue*, à l'inverse de Descartes qui, lui, a utilisé cette dernière pour *construire de nouvelles courbes* [185], et ainsi ouvrir infiniment le champ d'activité des mathématiciens. Chacun peut élargir la liste à sa guise...

Annexe IV : La construction du Primus casus

Descartes ne donne aucune indication sur ce qui l'a conduit à la construction du point K puis de la section cyclique annoncée. Voici plusieurs pistes pour justifier son affirmation.

texte de manière anonyme - où apparaissent le triplet (x, y, z) et des plans de référence deux à deux orthogonaux. Le *De superficiebus ad æquationes locales revocatis, variisque earum affectionibus* de Jacob Hermann (1733), même s'il utilise également (x, y, z), place encore à part « *la directrice*, ou troisième axe en relation avec un plan. C'est en 1748, dans sa célèbre *Introductio in analysin infinitorum* (paragraphes 91 et 92 du *Traité abrégé des surfaces*, chapitre IV), qu'Euler introduira enfin, par la définition des angles qui portent son nom, une homogénéité parfaite entre les trois coordonnées.

183. *History of analytic geometry*, page 27 de l'édition Dover.

184. Cela dit, les axes du *Tertius casus* ont été aussi soigneusement choisis à partir de la parabole de base et de la proposition à démontrer, une preuve de plus du caractère très proche de ce texte de Descartes d'avec les traités des Anciens : le grand œuvre cartésien est évidemment son livre majeur, et non cet exercice, si passionnant soit-il.

185. Tout particulièrement pour essayer d'établir un algorithme général de résolution des équations algébriques de tout degré.

Une solution logique trop moderne

Reprenons la figure originale de Descartes, telle que nous la connaissons par l'édition de Clerselier.

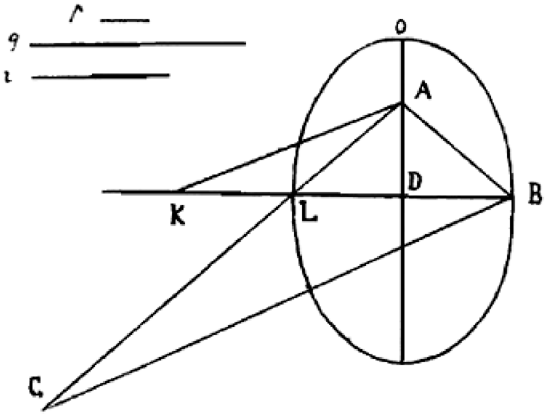


FIGURE 12.14 – *Le Primus casus*

Notons h la distance AD. Par un choix adapté des coordonnées, on peut supposer que le cône a pour équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma z^2$ avec par exemple $\dfrac{1}{b^2} = \beta \geqslant \alpha = \dfrac{1}{a^2} > 0$ et $\gamma = \dfrac{1}{h^2} > 0$ en nous référant aux notations classiques relatives à une ellipse. Nous ne rechercherons *a priori* que les plans de section cyclique d'équation de la forme $z = my + k$. Notons y_1 et y_2 les racines de l'équation $\beta y^2 = \gamma\,(my+k)^2$, c'est-à-dire $(\gamma m^2 - \beta)\,y^2 + 2mk\gamma y + \gamma k^2 = 0$. Si l'on pose $Y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{mk\gamma}{\beta - \gamma m^2}$ et $Z = mY + k = \dfrac{k\beta}{\beta - \gamma m^2}$, on voit que le demi-axe[186] perpendiculaire à la figure a pour longueur x tel que $\alpha x^2 = \gamma Z^2 - \beta Y^2$ donc tel que $\alpha\,(\beta - \gamma m^2)\,x^2 = \beta\gamma k^2$.

Par ailleurs, $(y_1 - y_2)^2 = \dfrac{\Delta}{(\beta - \gamma m^2)^2} = \dfrac{4\beta\gamma k^2}{(\beta - \gamma m^2)^2}\cdot$ Le demi-axe de la section conique situé dans le plan de symétrie a pour longueur y vérifiant les égalités

$$4y^2 = (1+m^2)\,(y_1 - y_2)^2 = \frac{4(1+m^2)\beta\gamma k^2}{(\beta-\gamma m^2)^2} = \frac{4(1+m^2)\alpha x^2}{\beta - \gamma m^2}\cdot$$

186. Rappelons qu'il est tacitement admis que la section est conique.

Nous désirons que cette section soit un cercle, ce qui équivaut à $x = y$, soit $\alpha\,(1+m^2) = \beta - \gamma m^2$ ou enfin $m^2 = \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\gamma}\cdot$

Il existe donc bien deux solutions (à homothétie près) de pentes opposées, ce qui est conforme à la proposition I, 5 d'Apollonius [187].

Soit par exemple m la solution positive, qui vaut $\sqrt{\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\gamma}} = \dfrac{h\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2+h^2}}\cdot$ Si l'on mène par A le plan parallèle au plan de section cyclique trouvé et K son intersection d'avec BL, les coordonnées de ce dernier point sont $(0, h/m, h)$ d'où les égalités

$$AK^2 = \frac{h^2}{m^2} + h^2 = \frac{b^2(a^2+h^2)}{c^2} + h^2 = \frac{a^2(b^2+h^2)}{a^2-b^2} = \frac{a^2}{a^2-b^2}\,AB^2\Big(=\frac{AB}{e}\Big)^2.$$

Rien *a priori* n'aurait pu empêcher Descartes d'imaginer une telle preuve, mais il est bien clair que l'esprit de ces calculs ne lui ressemble pas. Il vaut mieux se tourner vers des méthodes plus traditionnelles auxquelles il a pu recourir.

Une solution reposant sur un invariant

Gardons la même figure. Le point O est le point de l'ellipse de base qui se projette en D sur AD ; nous noterons de même T un point de la section de diamètre BL et Z sa projection sur BL, M un point de la base et H sa projection sur BC. On dispose clairement de l'égalité $\dfrac{AZ}{AH} = \dfrac{ZT}{HM}\cdot$ L'équation apollonienne des coniques permet d'écrire $\dfrac{ZT^2}{ZB\cdot ZL} = \dfrac{DO^2}{DB\cdot DL} = \dfrac{a^2}{b^2}$ et $HM^2 = HB\cdot HC$. Soit $d = AB = AL$. L'invariant du quadrilatère complet permet d'écrire

$$BC^2 = BL^2\,\frac{AC}{AL}\cdot\frac{ZT^2}{ZB\cdot ZL}\cdot\frac{HB\cdot HC}{HM^2} = \frac{4a^2AC}{d}\cdot$$

187. Seules comptent ici les solutions réelles. Il faut noter également qu'il se pourrait qu'il y ait d'autres sections par des plans n'ayant pas d'équation du type $z = my + k$.

Par ailleurs les triangles homothétiques $\begin{bmatrix} AKL \\ CBL \end{bmatrix}$ montrent que

$$AK = CB\,\frac{LA}{LC} = CB\,\frac{LK}{LB}, \qquad \frac{d}{LK} = \frac{LA}{LK} = \frac{LC}{LB} = \frac{LA \pm LC}{LK \pm LB} = \frac{CA}{BK}\,.$$

Par suite

$$AK^2 = CB^2\left(\frac{LK}{LB}\right)^2 = 4a^2\,\frac{AC}{d}\left(\frac{LK}{LB}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{AC\cdot KL}{AL}\cdot LK = \frac{a^2}{b^2}\cdot KB\cdot LK$$

par le théorème de Thalès appliqué aux parallèles AK et CB, puis

$$AK^2 = \frac{a^2}{b^2}\cdot(DK \pm b)\,(DK \mp b) = \frac{a^2}{b^2}\cdot(DK^2 - b^2)$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\cdot(DK^2 + DA^2 - DA^2 - b^2) = \frac{a^2}{b^2}\cdot(AK^2 - d^2)$$

soit enfin $AK = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,AB$.

Cette démonstration est, bien entendu, correcte ; elle n'utilise que des moyens apolloniens, mais reste lourde. Elle n'est à prendre en considération que si l'on pense que Descartes a pu, d'une manière ou d'une autre, mettre la main sur un invariant analogue au nôtre [188].

Une solution apollonienne sans point K

La preuve précédente repose sur la connaissance d'un invariant ; celle-ci s'en passe. Elle reste purement apollonienne et présente l'avantage de ne faire intervenir le point K qu'à la fin, à un moment où son irruption dans le problème s'impose presque d'elle-même.

188. Ce n'est pas du tout impossible, s'il a construit son calcul à l'envers, c'est-à-dire en cherchant comment combiner les deux équations apollonienne de l'ellipse et du cercle pour obtenir ce qu'il voulait. Une petite indication sur cette possibilité est que cela a été justement notre fil d'Ariane en cherchant à reconstituer la démarche cartésienne, mais c'est très loin d'être une preuve. Cela dit, elle ne figure ici que surtout dans la mesure où la mise en évidence de cet invariant donne une certaine homogénéité à tous les calculs envisagés au cours de la démonstration cartésienne.

La figure est exactement celle de Descartes, à cela près que le point d'intersection de AD et BC a reçu un nom, S, et que l'on a construit le quatrième sommet R d'un losange $BSLR$. Les triangles homothétiques $\begin{bmatrix} ALR \\ ACS \end{bmatrix}$ donnent [189] $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{RL}{SC} = \dfrac{AR}{AS} = \dfrac{AD - DS}{AD + DS}$.

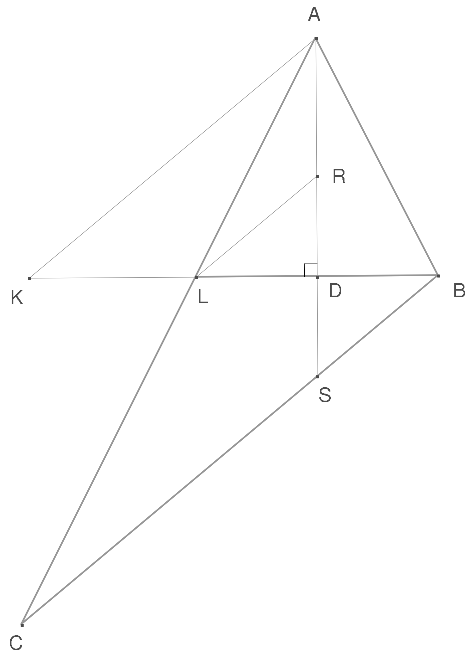


FIGURE 12.15 – *Une variante plus logique ?*

Soient comme plus haut T un point de la section de diamètre BL et Z sa projection sur BL, M un point de la base et H sa projection sur BC. Par hypothèse, la section cherchée doit être circulaire ; l'homothétie de centre A et de rapport AS/AD permet alors d'écrire

$$SB.SC = ST^2 = \Big(DO\,\frac{AS}{AD}\Big)^2 = \Big(\frac{a}{AD}\cdot(AD + DS)\Big)^2.$$

189. En regardant la figure, comme d'habitude en géométrie ancienne ; il faudrait légèrement modifier cela si, par exemple, S était intérieur et R extérieur au triangle ABL.

Par combinaison et simplification par $AD + DS$ on trouve donc

$$b^2 + DS^2 = SB^2 = \frac{a^2\,(AD^2 - DS^2)}{AD^2}, \quad DS^2 = \frac{(a^2 - b^2)\,AD^2}{a^2 + AD^2},$$

$$SB^2 = b^2 + DS^2 = \frac{a^2(b^2 + AD^2)}{a^2 + AD^2} = \frac{a^2 AB^2}{a^2 + AD^2}, \quad \frac{DS}{SB} = \sqrt{\frac{c^2 AD^2}{a^2 AB^2}} = e\,\frac{AD}{AB}\,\cdot$$

L'introduction du point K de BL défini par le parallélisme de AK et de BC devient maintenant tout à fait naturelle ; en effet on dispose alors de triangles homothétiques $\begin{bmatrix} DAK \\ DSB \end{bmatrix}$ d'où l'égalité $AK = AD \cdot \dfrac{SB}{SD} = \dfrac{AB}{e} \cdot$

C'est ce côté presque nécessaire de considération ultime de K qui pourrait faire penser que Descartes a peu ou prou suivi ce chemin-là.

Une solution apollonienne avec point K

Cela dit, la coïncidence entre une partie de cette figure et celle d'une proposition d'Apollonius peut faire au contraire croire que, pour Descartes, K s'est imposé dès le départ : c'est la base de la dernière démonstration présentée ci-dessous, sans doute la solution la plus élégante, qui introduit au départ [190] le point K. Soit donc S comme plus haut et PQ le segment dont le support contient S et est image de LB dans une certaine homothétie de centre A. On construit également le point T de la section qui se projette en S sur la droite AD. La similitude des couples de triangles $\begin{bmatrix} BQS \\ ABK \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} CPS \\ ALK \end{bmatrix}$ permet d'écrire les égalités

$$\frac{SQ \cdot SP}{ST^2} = \frac{SQ}{ST} \cdot \frac{SP}{ST} = \left(\frac{SB}{ST} \cdot \frac{KB}{KA}\right)\left(\frac{SC}{ST} \cdot \frac{KL}{KA}\right) = \left(\frac{KB \cdot KL}{KA^2}\right)\frac{SB \cdot SC}{ST^2}\,\cdot$$

190. Ce qui peut paraître artificiel, mais en fait la lecture de la figure de la proposition 13 du premier livre d'Apollonius a pu suggérer d'introduire une telle parallèle auxiliaire.

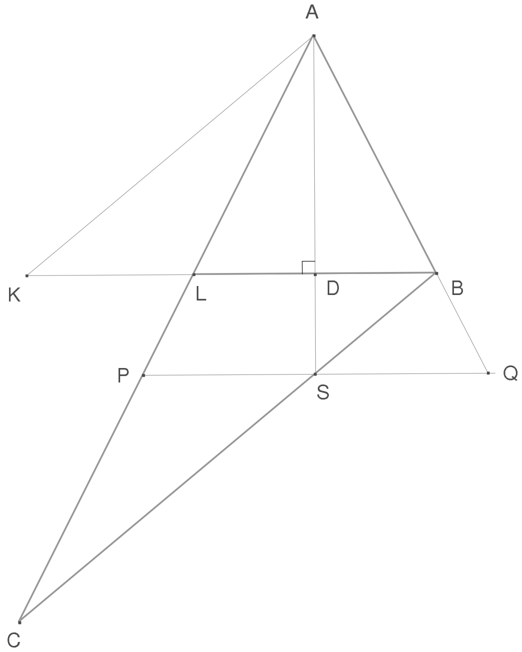


FIGURE 12.16 – *Encore une variante...*

Par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{AS}{AD}$, on a $\dfrac{SQ \cdot SP}{ST^2} = \dfrac{DB}{DL} = \dfrac{b^2}{a^2}$ (équation apollonienne de l'ellipse de base). On veut que T décrive un cercle, et donc que $SB \cdot SC = ST^2$. Pour cela, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} KA^2\,\frac{b^2}{a^2} &= KB \cdot KL = (KB + DB)\,(KD - DL) = (KB + DB)\,(KD - DB) \\ &= KD^2 - DB^2 = (KD^2 + DA^2) - (DB^2 + DA^2) = KA^2 - AB^2 \end{aligned}$$

soit $AB^2 = \left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right) KA^2 = e^2 KA^2$.

Annexe V : L'algorithme du Tertius casus

Le lecteur trouvera ci-dessous, outre la reproduction d'une figure déjà présentée plus haut, le preuve que les calculs indiqués explicitement par Descartes peuvent effectivement conduire à l'équation qu'il a écrite.

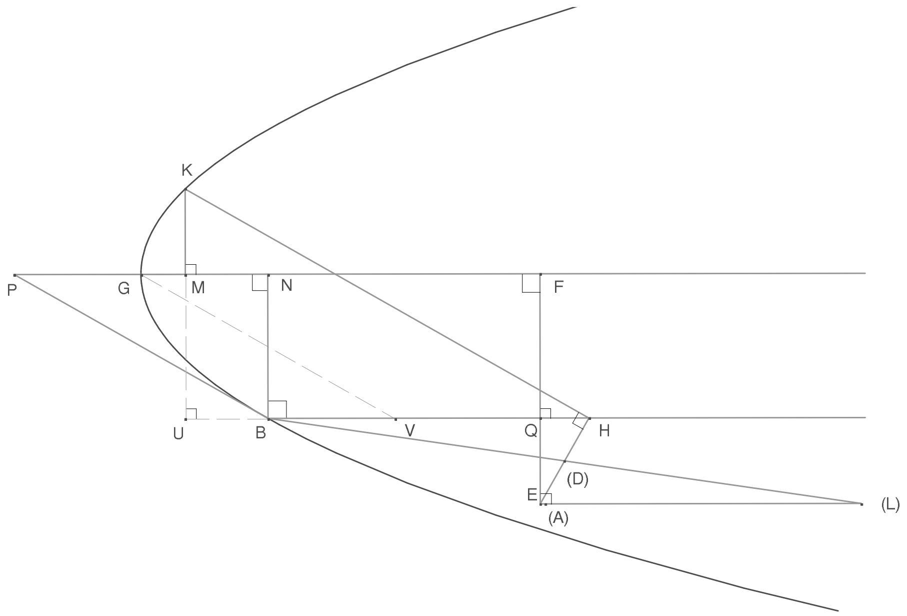


FIGURE 12.17 – *Le Tertius casus*

À part les points U et V, absents des figures publiées dans le passé, nous avons gardé les notations anciennes. Rappelons que Descartes propose de calculer, à partir de notations imposées (a, b, c, r), les longueurs suivantes [191]

$$AB, \quad BP, \quad AH, \quad HK, \quad KM, \quad MG, \quad AK^2 - AH^2 - KH^2$$

(il nous permet d'introduire des longueurs auxiliaires en cas de besoin). Ce qui suit est, pour des raisons évidentes, transcrit dans des notations modernes : mais le fond est totalement compatible avec le dix-septième siècle.

Nous poserons (u, v, w) les coordonnées du sommet A, reliées aux notations de Descartes par les égalités [192] : $u = b$ et $v = \dfrac{r}{2} - c$. Les coordonnées de

191. Nous nous sommes expliqué ailleurs sur la raison pour laquelle MY est volontairement absent de cette liste.

192. Pour alléger la démarche, nous feignons de croire, par exemple, que le nombre imposé c peut prendre des valeurs négatives : de telles ambiguïtés sont constantes dans les travaux cartésiens, pour qui les coordonnées sont théoriquement toujours positives - car ce sont des longueurs - mais peuvent silencieusement changer de signe en cas de besoin. On se contentera donc d'écrire des relations en rapport avec la figure particulière ; l'ab-

B seront notées $(x, x^2/r, 0)$, et, en posant $d = AB = AL$, $(b, v+d, w)$ et $(x, d + x^2/r, 0)$ celles de L et de H.

1. $d^2 = AB^2 = AE^2 + EQ^2 + QB^2 = w^2 + (b-x)^2 + \Big(v - \dfrac{x^2}{r}\Big)^2$
$= \dfrac{x^4}{r^2} + \Big(1 - \dfrac{2v}{r}\Big)x^2 - 2bx + b^2 + v^2 + w^2 = \dfrac{x^4}{r^2} + \dfrac{2cx}{r^2} - 2bx + a^2.$

2. La propriété ultra-classique de la tangente à une parabole, qui s'écrit ici $PG = GN$, donne $BP^2 = x^2 + \Big(\dfrac{2x^2}{r}\Big)^2 = \dfrac{x^2(4x^2+r^2)}{r^2}\cdot$

3. En suivant la figure, on peut écrire $AH^2 - AE^2 = EH^2 = EQ^2 + QH^2$ $= (b-x)^2 + (BH - BQ)^2 = (b-x)^2 + (d - GF + GN)^2 = (b-x)^2$ $+\Big(d - v + \dfrac{x^2}{r}\Big)^2.$

4. Les équations apolloniennes donnent $\dfrac{HK^2}{HB} = \dfrac{VG^2}{VB} = \dfrac{BP^2}{GP} = \dfrac{BP^2}{NG}$, d'où $HK^2 = \dfrac{d\,(4x^2+r^2)}{r}\cdot$

5. Les triangles semblables $\begin{bmatrix} UKH \\ NBP \end{bmatrix}$ (trois angles égaux) donnent les égalités $UK^2 = HK^2\Big(\dfrac{NB}{PB}\Big)^2 = \dfrac{d\,(4x^2+r^2)x^2}{rx^2(4x^2+r^2)/r^2} = dr.$

6. En suivant la figure, nous poserons $X = -MK = UM - UK = x - \sqrt{dr}$ (on aurait également pu prendre $X = x + \sqrt{dr}$ sans changer grand chose).

7. D'après l'équation usuelle de la parabole, $MG = \dfrac{MK^2}{r} = \dfrac{X^2}{r}\cdot$

---

sence de nombres négatifs devrait nous obliger à regarder ce qui se passe dans chaque cas de figure essentiellement différent. Bien entendu ce genre de difficulté est aujourd'hui obsolète, notamment grâce à la notion de *mesure algébrique* d'un segment, malheureusement provisoirement absente des programmes scolaires français.

8. $AK^2 - AE^2 = EH^2 = FM^2 + (EF + MK)^2 = \left(v - \dfrac{X^2}{r}\right)^2 + (b - X)^2.$

9. Par soustraction il vient $AK^2 - AH^2 = (X^2 - x^2) - 2b\,(X - x)$ $+\dfrac{X^4 - x^4}{r^2} - 2v\,\dfrac{X^2 - x^2}{r} - \dfrac{2dx^2}{r} - d^2 + 2dv.$

10. Reporter $X = x - \sqrt{dr}$ dans cette dernière égalité conduit à des calculs faciles mais assez longs (quelques cinq à six lignes). Nous nous contenterons d'en donner le résultat après simplifications
$$AK^2 - AH^2 - HK^2 = -2\,\frac{\sqrt{dr}}{r^2}\,(2x^3 + r(r + 2d - 2v)\,x - br^2).$$

11. Descartes veut annuler cette expression pour trouver une section singulière, donc écrire $0 = 2x^3 + r(r + 2d - 2v)\,x - br^2$, ce qui donne enfin $d = \dfrac{br^2 - 2crx - 2x^3}{2rx}\cdot$

12. Reporter cette valeur de d dans la valeur de AB^2 donne
$4d^2r^2x^2 = (br^2 - 2crx - 2x^3)^2 = 4x^2(x^4 + 2rcx - 2br^2x + a^2r^2)$
soit (après simplification des termes en x^6 et x^4)
$-4\,br^2x^3 + 4c^2r^2x^2 - 4\,bcr^3x + b^2r^4 = 4x^2(-2br^2x + a^2r^2)$
et enfin l'équation voulue $x^3 = \dfrac{a^2 - c^2}{b}\,x^2 + crx - \dfrac{br^2}{4}\cdot$

Une solution moderne

Nous garderons les notations précédentes $(d, u, v, w, a, b, c, r, x)$ et utiliserons librement le produit scalaire noté $(\bullet\,|\,\bullet)$. Les coordonnées de L sont évidemment $(u, v + d, w)$, celles du milieu D de BL forment le triplet $\big((x + u)/2, [x^2 + r(v + d)]/2r, w/2\big)$ et $(r, 2x, 0)$ définit un vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ à la base au point B.

L'annulation du produit scalaire $(\overrightarrow{AD}\,|\,\overrightarrow{T})$ donne $d = v - \dfrac{x^2}{r} - \dfrac{r}{2}\left(1 - \dfrac{u}{x}\right)$.
L'égalité $AB = AL$ se traduit par l'égalité $d^2 = (x - u)^2 + \left(\dfrac{x^2}{r} - v\right)^2 + w^2$.
Finalement l'équation est obtenue en éliminant d entre ces deux relations [193].

193. On peut également utiliser un logiciel de calcul formel, par exemple pour vérifier :

Comment Descartes résout graphiquement l'équation

Descartes est fier de pouvoir ici utiliser sa méthode générale de résolution des équations algébriques. Pour le cas particulier du degré 3, il commence par augmenter ce degré jusqu'à l'entier pair le plus proche en ajoutant une racine artificielle $x = 0$. Il choisit de nous donner l'exemple particulier où $a = c$, évidemment un peu plus simple. Placé devant l'équation $x^4 = crx^2 - br^2x/4$, il y introduit l'égalité $x^2 = ry$, ce qui donne

$$y^2 - cy + \frac{bx}{4} = 0,$$

relation compatible avec $x^2 + y^2 - (r + c)\, y + bx/4 = 0$, équation du cercle de centre de coordonnées $(-b/8, (r+c)/2)$ passant par l'origine [194]. Tout point B de la base parabolique dont l'abscisse x est racine du polynôme cartésien est évidemment situé sur ce cercle ; il y en a au moins un puisque tout polynôme du troisième degré a au moins une racine réelle [195], obtenu par la règle et le compas une fois admise la construction de la parabole donnée.

Non seulement ce problème de Desargues lui permet donc de mettre en œuvre, sur un point absolument central, son nouvel outil analytique, critiqué par Fermat, mais sa méthode de construction des racines grâce à une parabole auxiliaire - ici toute prêt à l'emploi - y fonctionne à merveille.

Cette *Propositio* nous est donc précieuse, puisqu'elle montre le Maître en pleine démonstration de son originalité ; si sa géométrie analytique a bien entendu connu depuis d'innombrables applications, il en est peu qui soient de la plume de Descartes lui-même, et il est étonnant que ce texte qui en constitue un exemple des plus rares n'ait pas été davantage remarqué et disséqué. Mais elle reste un outil, ne vouant pas Apollonius à la mort.

---

il suffit de prendre l'un des programmes présentés dans l'Annexe suivante et de l'adapter au cas d'une base parabolique.

194. Rappelons que Descartes a commis une faute d'inattention en écrivant $b/2$ et non $b/8$, et que la figure classique accompagnant le *Tertius casus* place ce centre de façon totalement incongrue.

195. On peut même montrer que ce polynôme de Descartes admet trois racines réelles, mais c'est ici sans importance.

Annexe VI : Les calculs du Quartus casus

Le *Quartus casus*, fiction que nous avons imaginée afin de combler le vide laissé par Descartes quant aux cas où la base serait elliptique ou hyperbolique [196], est construit comme le troisième : mais il faut ici, même pour un calculateur très expérimenté, passer aujourd'hui par le biais d'un logiciel puissant de calcul formel pour obtenir une équation analogue à celle du *Tertius casus*, dont les résultats étonnants sont très parlants.

Nous noterons $ax^2 + by^2 = 1$ une équation de la base, maintenant supposée centrée, et (u, v, w) les coordonnées de A, toutes non nulles car le cas où A se projette sur le plan de base selon un axe a déjà été traité dans les deux premiers cas.

Rappelons la tactique cartésienne telle que nous pensons avoir pu la reconstituer : supposant choisi un diamètre BC de la base, prendre L sur AC, lui imposer la condition selon laquelle BL est orthogonale à la tangente en B (ce qui le détermine, ainsi que le milieu D de BL), puis écrire l'égalité $AL = BL$ (équivalente à l'orthogonalité de AD et de BL) qui fournit alors une condition suffisante pour que la section de diamètre BL situé dans le plan orthogonal à AD soit singulière.

Un peu d'informatique

Voici donc, comme exemples, deux programmes de calcul de l'équation évoquée par Descartes à la fin de son *Tertius casus*. Le premier utilise le logiciel de calcul formel *Mathematica* [197]

```
A :={u,v,w} ; B :={x,y,0} ; CC :=-B ; T :={b*y,-a*x,0} ;
L :=(1-t)*A+t*CC ; DD :=(B+L)/2 ;
t=t/.ToRules[Roots[(DD-A).T==0,t]][[1]] ;
NN=Numerator[Simplify[Expand[(DD-A).(L-B)]]] ;
Collect[Resultant[NN, a*x*x+b*y*y-1,y],x]
```

196. Il ne faut pas tenir compte ici de ses déclarations où il minimise fortement les difficultés du calcul, comme le prouveront les lignes qui suivent.

197. Dans ce langage, les lettres `C,D,N` ont une signification préétablie, d'où la nécessité de les remplacer par `CC,DD,NN`.

(la troisième ligne signifie seulement que `t` doit prendre la valeur de la première[198] racine de l'équation `(DD-A).T=0` où le signe `.` représente le produit scalaire usuel). Le résultat est le polynôme bicubique en `x` cherché, que l'on pourrait d'ailleurs simplifier en le divisant par $4 * b^2$.

Le second est identique quant au fond, mais est écrit dans le langage *Maple* plus répandu que le précédent[199]

```
with(linalg) :
A :=vector([u,v,w]) : B :=vector([x,y,0]) : C :=-B :
T :=vector([b*y,-a*x,0]) : L :=(1-t)*A+t*C : DD :=1/2*(B+L) :
t :=solve(dotprod((DD-A),T,'orthogonal'),t) :
NN :=numer(factor(dotprod(DD-A,L-B, 'orthogonal'))) :
collect(resultant(a*x*x+b*y*y-1,NN,y),x) ;
```

Voici la réponse, impressionnante

$$
\begin{aligned}
&4 * b^2 * (b * v^2 * a^3 - 2 * b^2 * u^4 * a^3 - 2 * b * u^2 * a^3 + b^3 * v^6 * a^3 + b^2 * u^2 * a^2 \\
&+2 * b * u^4 * a^4 + b^2 * u^6 * a^4 + 2 * b^3 * v^4 * a^2 - 2 * b^2 * v^4 * a^3 + b^3 * v^2 * a \\
&-2 * b^2 * v^2 * a^2 + 2 * b^3 * u^4 * a^3 * v^2 + b^4 * u^2 * a^2 * v^4 + b * v^2 * a^5 * u^4 \\
&-2 * b^3 * u^2 * a^2 * v^2 + 2 * b^2 * u^2 * a^4 * v^4 - 2 * b * u^2 * a^4 * v^2 + 4 * b^2 * u^2 * a^3 * v^2 \\
&+b^2 * u^2 * a^4 * w^4 + 2 * b * v^2 * a^4 * w^2 + b * v^2 * a^5 * w^4 - 2 * b^2 * v^4 * a^4 * w^2 \\
&+b^3 * v^2 * a^3 * w^4 + 2 * b * v^2 * a^5 * u^2 * w^2 + 2 * b^4 * u^2 * a^2 * v^2 * w^2 \\
&-2 * b^3 * u^2 * a^3 * w^4 + 2 * b * u^2 * a^4 * w^2 + 2 * b^3 * v^4 * a^3 * w^2 + 2 * b^3 * u^2 * a^2 * w^2 \\
&-4 * b^2 * u^2 * a^3 * w^2 + b^4 * u^2 * a^2 * w^4 - 2 * b^3 * u^4 * a^3 * w^2 + 2 * b^2 * u^4 * a^4 * w^2 \\
&+2 * b^3 * v^2 * a^2 * w^2 - 4 * b^2 * v^2 * a^3 * w^2 - 2 * b^2 * v^2 * a^4 * w^4 - 2 * b^3 * u^2 * a^3 * v^2 * w^2 \\
&-2 * b^2 * u^2 * a^4 * v^2 * w^2 + u^2 * a^4) * x^6 \\
&+4 * b^2 * (-b^3 * v^2 - a^2 * b * v^2 + 4 * a^2 * b * u^2 - b^3 * v^6 * a^2 - 2 * b^3 * v^4 * a + 2 * b^2 * v^4 * a^2 \\
&+2 * b^2 * v^2 * a + 4 * b^2 * u^4 * a^2 - 4 * b * u^4 * a^3 - 2 * b^2 * u^6 * a^3 - 2 * b^2 * u^2 * a - 2 * a^3 * u^2 \\
&-4 * b^2 * u^4 * w^2 * a^3 - 2 * b^2 * u^2 * w^4 * a^3 - 2 * b^4 * u^2 * w^4 * a + 4 * b^3 * u^4 * w^2 * a^2 \\
&+4 * b^3 * u^2 * w^4 * a^2 - 6 * b^2 * u^2 * a^2 * v^2 - b * v^2 * a^4 * u^4 + 4 * b * u^2 * a^3 * v^2 \\
&-2 * b^2 * u^2 * a^3 * v^4 - 2 * b^4 * u^2 * v^4 * a - 4 * b^3 * u^4 * v^2 * a^2 + 2 * b^3 * u^2 * a * v^2 \\
&+2 * b^2 * u^2 * a^3 * v^2 * w^2 - 2 * b * v^2 * w^2 * a^3 - b * v^2 * w^4 * a^4 - 2 * b^3 * v^4 * a^2 * w^2 \\
&+2 * b^2 * v^2 * w^4 * a^3 - 4 * b^4 * u^2 * v^2 * a * w^2 + 2 * b^2 * v^4 * a^3 * w^2 - b^3 * v^2 * w^4 * a^2 \\
&-2 * b^3 * v^2 * w^2 * a + 4 * b^2 * v^2 * w^2 * a^2 + 8 * b^2 * u^2 * a^2 * w^2 - 4 * b^3 * u^2 * a * w^2
\end{aligned}
$$

198. Et d'ailleurs unique.

199. Ici le mot `dotprod` représente à la fois le produit hermitien et le produit scalaire ordinaire, d'où la nécessité ici d'ajouter le qualificatif `'orthogonal'`.

$-4*b*u^2*a^3*w^2+4*b^3*u^2*a^2*v^2*w^2-2*b*v^2*a^4*u^2*w^2)*x^4$
$+4*b^2*(-2*a*b*u^2+a^2*u^2-2*b^3*v^2*w^2*a*u^2+b^4*u^2*v^4-2*b^2*u^4*a$
$+2*b^2*u^4*w^2*a^2+b^2*u^6*a^2+2*b^2*v^2*a*u^2+b^2*u^2*w^4*a^2+b^2*u^2*a^2*v^4$
$-2*b^3*u^4*w^2*a+2*b*u^4*a^2+2*b^4*u^2*v^2*w^2+b^2*u^2+2*b*u^2*w^2*a^2$
$-4*b^2*u^2*w^2*a+2*b^3*u^2*w^2+b^4*u^2*w^4-2*b^3*u^2*w^4*a+3*b^3*u^4*v^2*a$
$-2*b*u^2*a^2*v^2)*x^2-4*b^5*v^2*u^4$.

Au vu de ces quatre-vingt dix-neuf termes, il est difficile de penser que Descartes aurait pu obtenir une telle équation, d'autant plus qu'il prédisait un degré d'au plus 4 alors qu'il est de 6 (ou de 3, si l'on remarque que nous avons ici un polynôme en x^2).

Ces deux programmes peuvent être très légèrement remaniés de façon à suivre la tactique alternative suggérée dans notre commentaire du *Quartus casus*[200]. On pourra alors vérifier que, si le nombre t calculé par la première condition est tout simplement changé en son opposé, le résultat final est absolument identique.

Un paradoxe informatique

Le recours à un programme informatique doit toujours s'entourer d'un peu de méfiance, car le contrôle de son fonctionnement est plus difficile que sur un calcul à la main. Ici peut en effet se poser un problème : il n'est pas tout à fait exact que L soit toujours entièrement déterminé par la première condition, car le paramètre t tel que l'obtient l'un des programmes précédents s'écrit sous la forme n/d, avec $d = avx - buy + axy - bxy = (\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{T})$ comme dénominateur, expression qui peut parfaitement être nulle pour un ou plusieurs points B de la base.

Heureusement, un peu de réflexion montre que de tels points seront automatiquement éliminés par la seconde condition. En effet, pour le logiciel, l'expression $(\overrightarrow{AB}+t\,\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{BA}+t\,\overrightarrow{AC})/2$ se présente sous la forme d'un couple (N, D) avec, comme numérateur, $N = n^2AC^2 - d^2AB^2$ puisque t lui même est gardé en mémoire comme étant le couple (n, d). La nullité de N et celle, accidentelle, de d entraîneraient alors celle de n (ce qui impliquerait l'égalité $L = A$), ou celle de AC (ce qui impliquerait l'égalité $C = A$), cas qui ne peuvent convenir à la recherche de sections singulières.

200. Remplacer par exemple $(\overrightarrow{AD}|\overrightarrow{T})$ par $(\overrightarrow{BL}|\overrightarrow{T})$.

Peut-on manipuler ce polynôme ?

Puisque le calcul ci-dessus n'a visiblement pas pu être mené à terme par Descartes, le fait de savoir ce qu'il aurait fait devant ce polynôme bicubique est sans intérêt. Consacrons-y cependant quelques instants, ne serait-ce que pour savoir si la voie originale ouverte par la *Propositio* pouvait être close sur un résultat totalement positif à partir des indications de son auteur.

Notons $p(x)$ le polynôme précédent, divisé par $4b^2$ qui y est en facteur rationnel évident. On le simplifie notablement en y posant $U = u^2$, $V = v^2$, $W = w^2$ et surtout $X = x^2$: il devient alors $P(X)$ de degré 3 et non plus 6. Du coup nous savons [201] que P possède au moins une racine réelle. Toutefois, pour obtenir une section singulière, il faut encore montrer que cette racine en X peut-être choisie positive pour pouvoir poser $x = \sqrt{X}$ et, de plus, qu'à ce x corresponde au moins un y réel vérifiant l'égalité $ax^2 + by^2 = 1$, équation de la base.

Nous ne possédons pas, au moins pour le moment, de preuve de cette existence d'au moins un couple (x, y) réel convenable dans le cas général. C'est pourtant étonnamment simple dans le cas d'une base *elliptique*, pour laquelle a et b sont tous deux strictement positifs [202].

Un coup d'œil montre en effet que $P(0) = -b^3U^2V = -b^3u^4v^2 < 0$. Après des essais nécessairement laborieux [203], il appert [204] que l'on dispose de l'égalité

$$P\Big(\frac{1}{a}\Big) = ab^2UV^2 = ab^2u^2v^4 > 0$$

d'où il ressort immédiatement que P possède au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1/a[$, donc positive comme $1/a$, et après un instant que l'équation

$$y^2 = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{a} - x^2\right) = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{a} - X\right)$$

possède au moins une racine réelle y.

201. Descartes aurait su remarquer cela.
202. Car nécessairement de même signe, celui du nombre 1.
203. Très probablement impossibles à conduire sans recours informatique.
204. Ce résultat remarquable nous a été signalé par le mathématicien et historien des sciences Luc Sinégre.

Cela prouve l'existence d'au moins une base singulière, et donc d'au moins une section cyclique par application du *Primus casus* avec un passage éventuel par le *Secundus*.

Cela dit, si la base est hyperbolique, il ne semble pas exister de *Deus ex machina* aussi facile à admirer. C'est pourtant vrai dans le cas très particulier d'une *hyperbole équilatère*. Nous supposerons ici $a = -b < 0$; on écrit alors encore $P(0) = -b^3U^2V < 0$ puisque $U^2V = u^4v^2 > 0$.

a. Si $V > U$, alors un logiciel de calcul formel montre que, si l'on pose $p = \dfrac{U}{b\,(V-U)} > 0$, on peut écrire

$$F(p) = \frac{16\,b^2U^2V^2W}{b\,(V-U)} > 0$$

d'où l'existence d'un X entre 0 et p, puis celle d'un réel y vérifiant les relations $by^2 = 1 + bX = 1 + bx^2 = 1 - ax^2$.

b. Si $U > V$, alors un logiciel de calcul formel montre que, si l'on pose par analogie $q = \dfrac{V}{b\,(U-V)} > 0$, $H = (U-V) + b\,(U+V)\,W > 0$ puis $K = U + V + b\,(U-V)(U+V+W) > 0$, on peut écrire

$$F(q) = \frac{4\,bUV}{(U-V)^3}\,HK > 0$$

d'où l'existence d'un X entre 0 et p, puis celle d'un réel y vérifiant les relations $by^2 = 1 + bX = 1 + bx^2 = 1 - ax^2$.

c. Si $U = V$, l'examen du terme de plus haut degré de P, égal à $16\,b^5UWX^3$, montre que P prend des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$, et possède donc au moins une racine strictement positive, d'où l'existence d'un y réel tel que $by^2 = 1 + bX = 1 + bx^2 = 1 - ax^2$.

La conclusion attendue est donc vérifiée dans ce cas très particulier de base hyperbolique, mais de nombreux essais ont montré qu'il semblait très difficile de l'étendre au cas général de base hyperbolique.

La surprenante différence de comportement entre les bases elliptiques et hyperboliques est peut-être reliée à ce fait d'évidence : les premières admettent des tangentes *dans toutes les directions*, ce qui est inexact pour les secondes [205]. Il en va presque de même pour les bases paraboliques, pour lesquelles il existe une tangente parallèle à toute direction donnée (à l'exception d'une seule, perpendiculaire à l'axe).

Quoi qu'il en soit, l'état actuel de tous ces calculs semblent montrer que le *Quartus casus* ne peut fonctionner de manière raisonnable dans le cas de bases hyperboliques non équilatères.

Heureusement, le rêve de Descartes peut néanmoins être conduit à son terme par un autre traitement du *Quartus*, systématiquement ramené au *Tertius*, comme celui qui est développé, par des considérations géométriques purement apolloniennes, dans l'Annexe VII qui suit. Si ce qui précède est exact, cela signifie d'une certaine façon un échec de la géométrie analytique (dans l'espace) par une conduite basée sur l'obtention d'un tel polynôme monstrueux, et rétablit une primauté de la géométrie pure : qu'en aurait pensé Descartes ? Il n'est pas impossible que, tout persuadé de l'excellence de sa découverte d'un outil prestigieux qu'il ait été, il n'aurait pas manqué de sourire devant cette revanche subtile de ses très anciens maîtres.

Annexe VII : Le Quartus sans calculs horribles

Le but de cette Annexe est de montrer comment, avec aussi peu de calculs que possible, nous pouvons transformer la stratégie cartésienne en une stratégie gagnante, c'est-à-dire en combler les omissions de façon à pouvoir qualifier de *demonstrata* sa *Propositio*.

Ramener le Quartus casus au Tertius casus

L'idée est très naturelle : prouver par des moyens apolloniens que *tout cône cartésien admet au moins une base parabolique*, ce qui fait que les seuls calculs nécessaires à valider la preuve seront ceux du *Tertius*. À l'époque de

205. Et l'on sait l'extrême importance que jouent les tangentes à la base dans la stratégie cartésienne.

Descartes, il semble que c'est là la seule voie de succès, faute de connaître le théorème spectral.

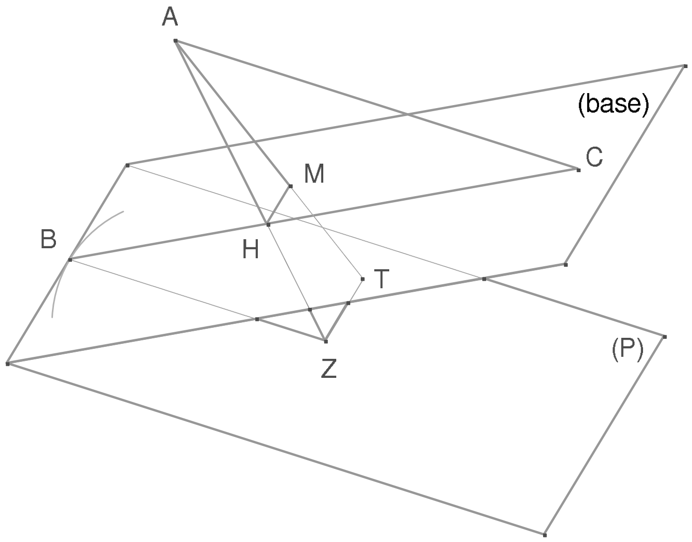


FIGURE 12.18 – *Vers une base parabolique*

Examinons une figure proche de celle qui nous a permis de récupérer au moins partiellement le « *cercle vicieux* » cartésien. Ici BC est un diamètre arbitraire de la base [206], et l'on considère une section du cône par l'un des plans (P) contenant la tangente à la base en B et parallèles à AC ; nous allons montrer qu'un tel plan coupe le cône suivant une parabole [207].

On dispose toujours ici d'un couple de triangles homothétiques, à savoir $\begin{bmatrix} AZT \\ AHM \end{bmatrix}$, auquel nous ajoutons $\begin{bmatrix} HBZ \\ HCA \end{bmatrix}$. Appliquer le théorème de Thalès aux deux segments parallèles AC et ZB donne $\dfrac{ZA}{ZH} = \dfrac{BC}{BH}\cdot$ Par ailleurs, puisque M décrit la base dont BC est un diamètre et que HM est parallèle à la direction conjuguée de celle de BC, il existe une constante k telle que $HM^2 = k\,HB \cdot HC$. Tout cela permet d'écrire les égalités

$$\frac{ZT^2}{ZB} = \frac{HM^2}{ZB} \cdot \left(\frac{ZA}{HA}\right)^2 = \frac{k\,HB \cdot HC}{ZB} \cdot \left(\frac{BC}{HC}\right)^2$$

206. Supposée centrée, sans cela, il n'y aurait rien à prouver !
207. Contrairement aux sections cycliques ou singulières, les sections paraboliques sont donc en nombre essentiellement infini.

$$= \frac{k\,BC^2}{HC} \cdot \frac{HB}{ZB} = k\,\frac{BC^2}{HC} \cdot \frac{HC}{AC} = k\,\frac{BC^2}{AC} \cdot$$

Le dernier terme est une constante quand M et T décrivent respectivement la base et la section du cône par le plan (P). Il en résulte que cette intersection du cône et du plan (P) est une parabole décrite par T, ce qui permet d'appliquer le *Tertius casus* à cette nouvelle base. Il n'y a pas besoin de calculs analytiques nouveaux, à elles seules les deux ou trois lignes ci-dessus règlent la question [208].

Un algorithme (presque) sans calculs

Compte tenu de ce qui précède, voici une version, sans lacunes, du programme cartésien, où les calculs analytiques sont réduits au minimum (*Tertius casus*). Telle quelle, la liste ci-dessous paraît bien être un achèvement logique qui ne trahit pas fondamentalement la grande idée qui sous-tend la *Propositio*

A. Si la base est circulaire, il n'y a rien à faire.

B. Sinon, mais si la base est elliptique et si le sommet se projette en son centre sur son plan, appliquer la détermination d'une section cyclique exposée dans le *Primus casus*.

C. Sinon, mais si le sommet se projette en un point d'un axe de la base sur son plan, se ramener au *Primus casus* en suivant les instructions du *Secundus casus*.

D. Sinon, mais si la base est parabolique, résoudre l'équation du troisième degré du *Tertius casus* et se ramener, soit directement au *Primus casus*, soit après un passage par le cas le plus simple du *Secundus casus*.

E. Sinon, se ramener au *Tertius casus* par la technique développée ci-dessus qui montre comment obtenir une base parabolique du cône.

208. Il y aurait également moyen de démontrer ce théorème en utilisant l'invariant du quadrilatère complet avec un point à l'infini, mais ce qui précède suffit largement à nos besoins.

Une variante spectrale

Nous reprenons ici une démarche évoquée dans une note du texte général. Elle est basée sur la mise en œuvre du théorème spectral, *qui passe elle aussi par la résolution d'une équation du troisième degré*. Le cas trivial des cônes droits (de révolution) est mis à part pour sa trop grande simplicité. Cela fait, grâce à cette théorie [209], l'équation d'un cône peut se mettre sous la forme $px^2 + qy^2 + rz^2 = 0$. Pour qu'il possède plus d'un point réel, il est nécessaire et suffisant que ces trois valeurs propres (p, q, r) ne soient pas toutes de même signe. Il existe donc essentiellement une seule manière d'écrire cette équation réduite sous la forme $ax^2+by^2 = cz^2$ avec a, b $(\neq a)$ et c strictement positifs (à permutation près). L'étude des plans de symétrie du cône (voir page 581) montre qu'une projection de section singulière elliptique admet une équation de la forme $ax^2 + by^2 = cw^2$ où w est constant ; l'existence et le nombre de telles directions sont donc établis. La perpendiculaire à ces plans issue du sommet s'appelle *axe principal du cône* et appartient au plan de symétrie du cône [210]. Si l'on regarde le nombre analogue de directions singulières hyperboliques, il est de deux pour des raisons très voisines (cette fois, il existe deux formes convenables distinctes et non plus une, à savoir $cz^2 - ax^2 = bv^2$ et $cz^2 - by^2 = au^2$).

Finalement, le nombre de directions singulières réelles est généralement de trois, celles des plans propres de la quadrique, l'axe principal étant parallèle aux vecteurs propres correspondant à la valeur propre de signe opposé à celui des deux autres.

Il en résulte que tout cône cartésien non de révolution possède exactement *une direction singulière elliptique* et *deux directions singulières hyperboliques*. Pour une base elliptique ou parabolique, cela implique que les équations cartésiennes qui déterminent les points B convenables de la base - de degré trois ou six selon les cas - ont toutes leurs racines réelles, et ces directions sont toutes atteintes par la stratégie et la tactique cartésiennes.

Dans le cas d'une base hyperbolique [211] la situation est plus complexe. Par exemple, le cas où le sommet se projette orthogonalement sur l'axe non focal

209. Par un changement de repère orthonormé, qui exige la résolution de l'équation caractéristique d'une matrice symétrique réelle.
210. Voir Chasles, page 546, qui renvoie à Mersenne sur Desargues.
211. Qui ne possède pas de tangentes ayant une direction arbitraire.

d'une hyperbole, traité dans le *Secundus casus*, montre bien qu'alors il existe une section singulière hyperbolique coupant le plan de base selon l'axe focal, alors qu'aucun point de la base ne possède de tangente parallèle à cet axe : elle ne pourra donc pas être obtenue par une équation de Descartes.

Annexe VIII : La « Propositio » aujourd'hui

Le texte suivant [212] montre comment, aujourd'hui, on peut démontrer le théorème cartésien en supposant simplement le théorème spectral, qui affirme qu'il existe un changement de repère orthonormé pour lequel une équation du cône étudié s'écrit sous la forme $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2$. Il prouve l'existence de deux directions de sections cycliques (le cas d'un cône de révolution étant naturellement mis à part).

Sa portée est donc plus grande que celle de Descartes dans la mesure où il permet donc d'obtenir *toutes* les directions cycliques, au lieu de se contenter d'en exhiber une ou deux. Par ailleurs, c'est une preuve directe, qui ne passe pas par le *Primus casus*. Mais elle présente une certaine technicité qui n'en facilite pas la lecture.

Soient (a, b, c) un triplet de réels non nuls et Γ la surface d'équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2$$

par rapport à un repère orthonormé de l'espace. Quels sont les cercles inclus dans Γ ?

1. Démontrons un lemme : si $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy = 0$ est une autre équation de Γ, alors $D = E = F = 0$ et (A, B, C) sont proportionnels à $(a^2, b^2, -c^2)$.

   L'égalité $E = 0$ s'obtient en retranchant les deux égalités obtenues en écrivant que $(c, 0, \pm a)$ sont des coordonnées de points de Γ puisque $ac \neq 0$. De même $D = 0$. Pour F, il suffit maintenant de considérer de façon analogue les triplets $(bc, \pm ac, ab\sqrt{2})$.

212. Rédigé à partir d'une question posée en 2003 à l'oral d'un concours d'entrée dans une école d'ingénieurs : le problème de Desargues n'est pas mort !

Il ne reste plus qu'à poser $C = -kc^2$ pour vérifier, à l'aide du triplet $(c, 0, a)$ que $Ac^2 = -Ca^2 = ka^2c^2$ d'où $A = ka^2$, puis de manière analogue que $B = kb^2$.

2. Si γ est un cercle de l'espace situé dans un plan P passant par l'origine, il ne pourrait être inclus dans Γ que si ce cône contenait une infinité de droites de P ce qui est impossible.

   Si γ est un cercle de l'espace situé dans un plan P ne passant pas par l'origine, il est l'intersection de P avec une sphère passant par l'origine (prendre pour centre l'intersection de la normale à P passant par le centre Ω de γ avec le plan médiateur de $[OM]$ où M est un point de γ). Il est donc l'intersection d'un plan d'équation $ux + vy + wz = 1$ et d'une sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = px + qy + rz$, aucun des deux triplets (u, v, w) et (p, q, r) n'étant égal à $(0, 0, 0)$. Le cône de sommet O s'appuyant sur γ est formé de l'origine et de l'ensemble des points de coordonnées $(X, Y, Z) = (mx, my, mz)$ où m est un réel arbitraire non nul et où $ux+vy+wz = 1$ et $x^2+y^2+z^2 = px+qy+rz$, soient $uX+vY+wZ = m$ et $X^2 + Y^2 + Z^2 = m(pX + qY + rZ)$, ce qui implique la nullité de

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (uX + vY + wZ)(pX + qY + rZ)$$

   puis celle de

$$(1-pu)X^2+(1-qv)Y^2+(1-rw)Z^2-(qw+rv)YZ-(ru+pw)ZX-(pv+qu)XY.$$

   D'après le lemme ci-dessus, on a donc

$$qw = -rv, \quad ru = -pw, \quad pv = -qu,$$

$$1 - pu = ka^2, \quad 1 - qv = kb^2, \quad 1 - rw = -kc^2,$$

   puis $pqruvw = -pqruvw = 0$ et donc $(1 - ka^2)(1 - kb^2)(1 + kc^2) = 0$. Si $kc^2 = -1$, alors $(1 - pu)c^2 = -a^2$, $(1 - qv)c^2 = -b^2$, soit $pu = 1 + \dfrac{a^2}{c^2} > 0$ et $qv = 1 + \dfrac{b^2}{c^2} > 0$ ce qui est incompatible, pour des questions de signe, avec les égalités $pv = -qu$ et $p^2qv = -q^2pu$.

   Donc $1 + kc^2 \neq 0$. Il vient alors par exemple $ka^2 = 1$, d'où $pu = 0$. Si $p = 0 \neq u$, il en résulte $r = 0$ et $q = 0$ ce qui n'est pas. Si $u = 0 \neq p$, on a de façon analogue $w = 0$ et $v = 0$. Par suite, $p = u = 0$.

Mais par ailleurs $(1-qv)a^2 = kb^2a^2 = b^2$ et $(1-rw)a^2 = -c^2$; cette dernière égalité montre que $rw \neq 0$ d'où $q = -\dfrac{rv}{w}$ et

$$\frac{v^2}{w^2} = -\frac{q}{r}\frac{v}{w} = \frac{-qva^2}{rwa^2} = \frac{b^2-a^2}{a^2+c^2}$$

ce qui implique naturellement que a^2 soit inférieur ou égal à b^2.

Si $kb^2 = 1$, on trouve de la même façon $\dfrac{u^2}{w^2} = \dfrac{a^2-b^2}{b^2+c^2}$ et la condition inverse de la précédente.

Si $a^2 \neq b^2$, on obtient dans chaque cas au plus deux directions de plan coupant Γ suivant des cercles, à savoir respectivement

$$Y\sqrt{b^2-a^2} \pm Z\sqrt{a^2+c^2} = h \quad \text{ou} \quad X\sqrt{a^2-b^2} \pm Z\sqrt{b^2+c^2} = h$$

pour $h \neq 0$.

Le cas intermédiaire $a^2 = b^2$ est clair : alors les seuls plans convenables sont, peut-être, les plans d'équation $Z = h \neq 0$ et Γ est bien entendu un cône de révolution.

3. La remontée des calculs prouve que, réciproquement, ces directions de plans conviennent. On peut noter que le fait que tout cône du second degré non dégénéré admettait au moins une base circulaire était, au moins implicitement, déjà connu des Grecs.

Il serait très facile d'amender ce texte afin d'obtenir également les quatre autres directions de sections cycliques non réelles.

Annexe IX : Les solutions d'Archimède

Le *Primus casus* et une partie du *Secundus casus* ont été abordés dans le traité *Des Conoïdes et Sphéroïdes*[213].

213. Commandino, pages 31-33 ; Peyrard, pages 141-145 ; Heath, pages 115-118 ; Ver Eecke, volume I pages 157-163 ; Mugler, volume I pages 171-176.

La proposition 7 (autrefois numérotée 8) est exactement le *Primus casus* de Descartes, qui ne pouvait l'avoir ignorée. Elle ne donne pas la construction cartésienne à l'aide du point K, et présente surtout un gros handicap (un recours à la continuité des fonctions, peut-être banal pour l'époque, mais peu acceptable à nos yeux alors qu'une solution géométrique était tout à fait possible même en ce siècle[214]) mais a le grand mérite de prouver très soigneusement qu'une section plane d'un cône à base singulière elliptique était une conique[215], ce que la *Propositio* néglige de faire comme nous l'avons déjà lourdement signalé[216].

La proposition suivante 8 (anciennement 9) est exactement le premier sous-cas du *Secundus casus*, celui où le sommet se projette sur l'un des axes de la base supposée elliptique.

Cette fois-ci le travail est impeccable. La solution est naturellement identique à celle de Descartes, avec renvoi au *Primus casus*, mais ici sans « cercle vicieux » sur la nature de la section plane introduite. L'ensemble de l'œuvre archimédienne sur ce problème présente donc un objectif beaucoup moins ambitieux que la *Propositio*, mais est remarquable par sa qualité technique : elle a certainement inspiré Apollonius pour tout son livre et par exemple dans sa proposition I, 5.

En un sens, elle est donc à l'origine de notre tentative de justifications quant à l'oubli cartésien. La relire aujourd'hui en même temps que l'œuvre mathématique de Descartes n'est pas seulement enrichissant ; c'est une preuve presque directe de la profonde influence que les anciens ont eu et gardé dans son esprit, même si naturellement son puissant outil analytique allait leur porter les coups les plus sévères jusqu'à rendre leurs traces presque invisibles[217], ce qu'il aurait très probablement regretté.

214. Voir notre Annexe III.

215. En fait, il ne démontre qu'une inclusion et non une égalité de courbes, comme il le fera aussi dans la proposition suivante, mais c'est sans importance ici. On peut également noter que ses preuves sont par l'absurde, ce qui n'était pas nécessaire. D'ailleurs ce recours à l'absurde est seulement une formule de rhétorique : devant prouver une implication $P \Longrightarrow Q$, Archimède prétend démontrer (P et non Q) $\Longrightarrow Q$ mais n'utilise jamais en fait la proposition (non Q) !

216. Voir par exemple cette même Annexe III.

217. Heureusement toute recherche bibliographique un peu poussée, aidée par internet par exemple, montre que l'on dispose aujourd'hui de bonnes rééditions des grands classiques, d'Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante et même Pappus. Merci Heath et Ver Eecke !

Un premier invariant archimédien

On peut lire la proposition 7 comme la conjugaison d'une égalité et d'une inégalité. Regardons la première. La figure ci-dessous respecte celle des différents éditeurs.

Tout se passe dans le plan de symétrie naturel du cône cartésien de sommet Γ et de base une ellipse de centre Δ dont AB est le *petit* diamètre principal (le BL de Descartes). Archimède joint le sommet A à un point Z sur la droite AB au delà de B, et note E l'intersection des droites AZ et $\Gamma\Delta$; par celui-ci il trace le segment ΠP homothétique de AB dans l'homothétie de centre Γ transformant Δ en E.

À ces huit éléments fixes, il ajoute quatre variables : un point Λ du segment AZ, l'intersection K des droites $\Gamma\Lambda$ et AB, et le segment ΞO homothétique de AB dans l'homothétie de centre Γ transformant K en Λ.

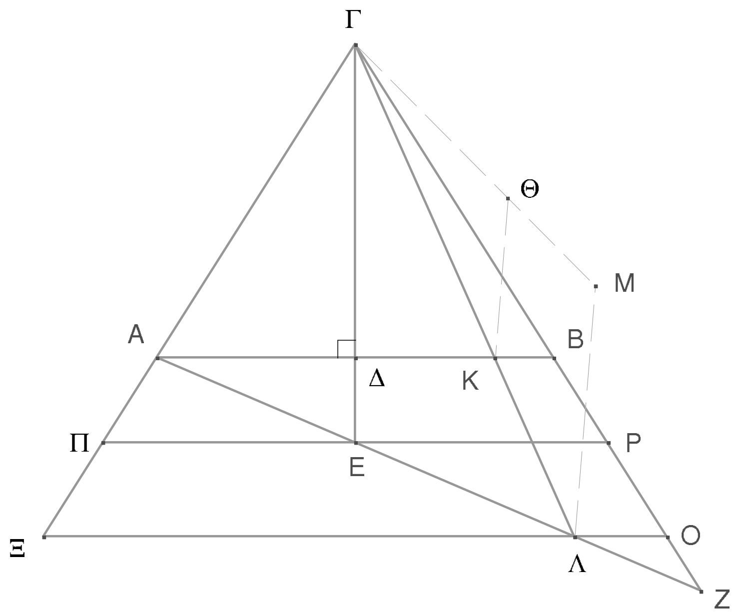


FIGURE 12.19 – *Une figure d'Archimède*

Le calcul d'Archimède revient à démontrer l'égalité [218]

$$\frac{\Lambda A \cdot \Lambda Z}{\Lambda\Gamma^2} \cdot \frac{E\Gamma^2}{EA \cdot EZ} = \frac{KA \cdot KB}{K\Gamma^2} \cdot \frac{\Delta\Gamma^2}{\Delta A \cdot \Delta B}.$$

Indiquons deux preuves : la première (conforme à l'originale) passe par les similitudes des six couples de triangles $\begin{bmatrix}\Gamma E\Pi \\ \Gamma\Delta A\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}EA\Pi \\ \Lambda A\Xi\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}\Gamma KA \\ \Gamma\Lambda\Xi\end{bmatrix}$ d'une part, pour les rapports aux rapports $E\Gamma/E\Pi$, $E\Pi/EA$ et $K\Gamma/KA$, puis $\begin{bmatrix}\Gamma EP \\ \Gamma\Delta B\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}EZP \\ \Lambda ZO\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}\Gamma KB \\ \Gamma\Lambda O\end{bmatrix}$ d'autre part, appliquées aux rapports $E\Gamma/EP$, EP/EZ et $K\Gamma/KB$.

La seconde passe par le biais de l'*invariant fondamental* décrit dans l'Annexe II ; il faut introduire la projection Δ' de Z sur ΓΔE et l'intersection K' de ΓΚΛ et ZK'. Elle consiste à décomposer le membre de gauche en le produit

$$\frac{E\Gamma \cdot \Lambda A}{\Lambda E} \cdot \frac{E\Lambda}{\Lambda\Gamma \cdot EA} \cdot \frac{E\Gamma \cdot \Lambda Z}{E\Lambda} \cdot \frac{\Lambda E}{\Lambda\Gamma \cdot EZ}$$

et à systématiquement remplacer chacun de ces quatre rapports par un rapport égal portant sur AΔK ou ZK'Δ' ; il ne reste plus enfin qu'à remonter par homothétie ZK'Δ' en BKΔ pour obtenir l'égalité désirée.

Bien entendu cette méthode était peu imaginable à l'époque, mais elle présente le mérite, semble-t-il, de donner un peu d'unité à l'ensemble de toutes les preuves présentées dans ce chapitre, qu'elles soient d'esprit moderne - disons du dix-neuvième siècle - ou apollonienne [219].

Une inégalité archimédienne

Le second pivot du traitement du *Primus casus* par Archimède consiste à prouver l'inégalité

$$\frac{EZ \cdot EA}{E\Gamma^2} > \frac{\Delta A \cdot \Delta B}{\Delta\Gamma^2} = \frac{b^2}{\Delta\Gamma^2}$$

218. Que l'on peut voir comme la définition d'un invariant relatif au point variable Λ.

219. Ici, parlant d'Archimède, cette expression est particulièrement mal venue compte tenu des dates, mais elle a été utilisée tout au long des pages qui précèdent et a le mérite de la simplicité.

où $b = \Delta\mathrm{A}$ représente la longueur du demi-petit axe de l'éllipse. Il ne la démontre d'ailleurs pas, comme si c'était une propriété alors bien connue. Il est possible d'en donner une preuve basée sur le fait que Γ et P divisent harmoniquement le segment [220] BZ ; nous préférerons donner ici celle d'une note de l'édition Peyrard [221], que Ver Eeecke a plus ou moins maladroitement tenté de reprendre. Cette reconstitution semble tout à fait conforme aux coutumes grecques [222].

Il suffit d'introduire un point [223] S sur AE tel que l'angle EΠS soit égal à l'angle EZP, lui-même strictement inférieur à l'angle $\mathrm{EP\Gamma} = \mathrm{E\Pi A}$. L'homothétie de centre Γ transformant Δ en E montre que

$$\frac{\Delta\mathrm{A}\cdot\Delta\mathrm{B}}{\Delta\Gamma^2}=\frac{\mathrm{E\Pi}\cdot\mathrm{EP}}{\mathrm{E}\Gamma^2}\,.$$

Or la similitude des triangles EΠS et EZP implique l'égalité $\mathrm{E\Pi}\cdot\mathrm{EP}=\mathrm{EZ}\cdot\mathrm{ES}$, d'où finalement

$$\frac{b^2}{\Delta\Gamma^2}=\frac{\Delta\mathrm{A}\cdot\Delta\mathrm{B}}{\Delta\Gamma^2}=\frac{\mathrm{EZ}\cdot\mathrm{ES}}{\mathrm{E}\Gamma^2}<\frac{\mathrm{EZ}\cdot\mathrm{EA}}{\mathrm{E}\Gamma^2}\,.$$

Démontrer la proposition 7

Ces deux préliminaires posés, Archimède affirme (sans preuve explicite) l'existence d'un point Z vérifiant l'égalité $\dfrac{\mathrm{EZ}\cdot\mathrm{EA}}{\mathrm{E}\Gamma^2}=\dfrac{a^2}{\Delta\Gamma^2}$ où a est le demi-grand axe de l'ellipse, vérifiant $a \geqslant b$. L'idée est la suivante : le premier membre de cette expression est une fonction que nous dirions aujourd'hui continue du point Z. Puisqu'elle tend vers l'infini lorsque Z part à l'infini sur la droite AB, et qu'elle ne prend que des valeurs supérieures à $b^2/\Delta\Gamma^2$, elle doit bien prendre au moins une fois [224] la valeur $a^2/\Delta\Gamma^2$.

220. Commencer par minorer EA et EZ par leurs distances à la droite ΓE.

221. À cette époque, au lycée Bonaparte [Condorcet] où enseignait ce professeur de Mathématiques Spéciales né en 1759, bibliothécaire de l'École polytechnique jusqu'en 1804, mort à l'hôpital Saint-Louis en 1822 (peut-être dans la misère), la géométrie pure était encore considérée comme un art prestigieux...

222. Elle rappelle fortement par exemple une figure de la proposition 7 du livre VI d'Euclide, qu'il a également traduit. (Voir par exemple le volume 2 de Vitrac, page 175.)

223. Noté Σ dans Peyrard.

224. En fait un peu de géométrie analytique montre même que cette fonction est strictement croissante, d'où l'unicité de ce Z, mais c'est sans importance ici.

Reportons cela dans l'invariant d'Archimède. On obtient la suite d'égalités

$$\frac{\Lambda\mathrm{A}\cdot\Lambda\mathrm{Z}}{\Lambda\Gamma^2}=\frac{a^2}{\Delta\Gamma^2}\cdot\frac{\mathrm{KA}\cdot\mathrm{KB}}{\mathrm{K}\Gamma^2}\cdot\frac{\Delta\Gamma^2}{\Delta\mathrm{A}\cdot\Delta\mathrm{B}}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{KA}\cdot\mathrm{KB}}{\mathrm{K}\Gamma^2}\cdot$$

Il est maintenant temps d'introduire deux points Θ et M de la figure originale, qui sont les deux points d'une génératrice se projetant en K et en Λ sur la droite ΓΛ [225]. L'homothétie des triangles $\begin{bmatrix}\Gamma\mathrm{K}\Theta\\ \Gamma\Lambda\mathrm{M}\end{bmatrix}$ montre que $(\mathrm{K}\Theta/\mathrm{K}\Gamma)^2$ est égal à $(\Lambda\mathrm{M}/\Lambda\Gamma)^2$. Mais la propriété caractéristique de l'ellipse [226] s'écrit $\mathrm{K}\Theta^2=\dfrac{a^2}{b^2}\,\mathrm{KA{\cdot}KB}$, soit enfin

$$\Lambda\mathrm{A}.\Lambda\mathrm{Z}=\Lambda\Gamma^2\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{\mathrm{KA}\cdot\mathrm{KB}}{\mathrm{K}\Gamma^2}=\Lambda\Gamma^2\,\frac{\mathrm{K}\Theta^2}{\mathrm{K}\Gamma^2}=\Lambda\mathrm{M}^2$$

ce qui prouve que M décrit dans un plan perpendiculaire à la figure un cercle de diamètre AB. Le cône cartésien, défini comme la surface décrite par les droites passant par Γ et s'appuyant sur l'ellipse de diamètre AB, est donc bien un cône apollonien.

Un second invariant archimédien

Examinons maintenant la proposition 8, qui montre que, si le sommet Γ se projette sur l'un des axes AB de la base supposée elliptique, il existe alors une section singulière elliptique de diamètre BE, ce qui nous ramène clairement à la proposition [227] 7.

La figure ci-dessous respecte celle des différents éditeurs. Tout se passe dans le plan de symétrie naturel du cône cartésien de sommet Γ et de base une ellipse de centre Δ dont AB est un diamètre principal [228]. Archimède joint

225. Normalement, ces points devraient être invisibles sur la figure, car confondus avec leurs projections ; Archimède a préféré les décaler légèrement afin qu'on puisse les apercevoir.
226. Systématisée vingt-cinq ans plus tard par Apollonius.
227. La démarche est donc exactement celle de Descartes : ce n'est sûrement pas par hasard. Mais ce dernier a eu le courage de pousser plus loin, et de résoudre (presque) entièrement le problème posé par Desargues.
228. La figure de Mugler ne respecte pas l'égalité $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B}\Delta$, mais de toute façon cette égalité ne joue aucun rôle dans la preuve.

le sommet B à un point E sur la droite ΓA du côté de A vérifiant l'égalité ΓE = ΓB. S'y ajoute un segment ZH contenant Δ et image de EB dans une certaine homothétie de centre Γ.

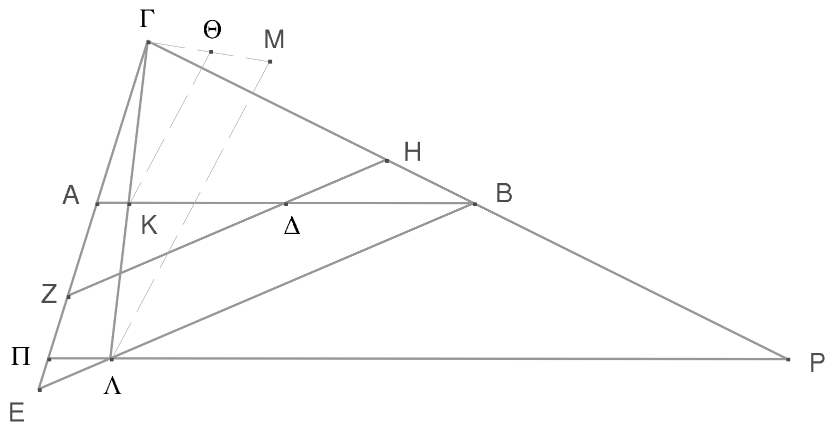


FIGURE 12.20 – *Toujours Archimède*

À ces sept éléments fixes, il ajoute quatre variables : un point Λ du segment BE, l'intersection K des droites ΓΛ et AB, ainsi que le segment ΠP homothétique de AB dans l'homothétie de centre Γ transformant K en Λ. Le calcul d'Archimède revient à démontrer l'égalité

$$\Gamma\mathrm{K}^2\frac{\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{AK}\cdot\mathrm{BK}}=\Gamma\Lambda^2\frac{\mathrm{Z}\Delta\cdot\mathrm{H}\Delta}{\mathrm{E}\Lambda\cdot\mathrm{B}\Lambda}\,.$$

Indiquons deux preuves : la première (conforme à l'originale) passe par les similitudes des quatre couples de triangles $\begin{bmatrix}\Pi\Gamma\Lambda\\ \mathrm{A}\Gamma\mathrm{K}\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}\mathrm{P}\Gamma\Lambda\\ \mathrm{B}\Gamma\mathrm{K}\end{bmatrix}$ d'une part, appliquées aux rapports $\Pi\Lambda/\Gamma\Lambda$ et $\mathrm{P}\Lambda/\Gamma\Lambda$, puis $\begin{bmatrix}\mathrm{E}\Lambda\Pi\\ \mathrm{Z}\Delta\mathrm{A}\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}\Lambda\mathrm{PB}\\ \Delta\mathrm{BH}\end{bmatrix}$ d'autre part, appliquées aux rapports $\Pi\Lambda/\mathrm{E}\Lambda$ et $\mathrm{P}\Lambda/\mathrm{B}\Lambda$. Il ne reste alors plus qu'à éliminer entre les deux égalités obtenues le produit $\Pi\Lambda\cdot\mathrm{P}\Lambda$ pour aboutir.

La seconde passe par le biais de l'*invariant fondamental* décrit dans l'Annexe II ; il faut introduire l'intersection L de ΓΛ et de ZH. Elle consiste à décomposer le membre de gauche en le produit

$$\frac{\Gamma\mathrm{K}.\Delta\mathrm{A}}{\mathrm{KA}}\cdot\frac{\Gamma\mathrm{K}.\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{KB}},$$

et à systématiquement remplacer chacun de ces deux rapports par un rapport égal portant sur ΔAK ou ΔBK ; il ne reste plus enfin qu'à remonter par homothétie LZH en ΛEB pour obtenir l'égalité désirée [229].

Démontrer la proposition 8

Introduisons maintenant, comme plus haut, deux points Θ et M de la figure originale, qui sont les deux points d'une génératrice se projetant en K et en Λ sur la droite $\Gamma\Lambda$. L'homothétie des triangles $\Gamma K \Theta$ et $\Gamma\Lambda M$ montre que $(K\Theta/K\Gamma)^2$ est encore égal à $(\Lambda M/\Lambda\Gamma)^2$. Mais la propriété caractéristique de l'ellipse signifie que $\dfrac{K\Theta^2}{KA \cdot KB}$ est une constante k. Cela permet d'écrire

$$\frac{1}{k}\,\frac{\Lambda M^2}{\Lambda E \cdot \Lambda B} = \frac{\Lambda M^2/\Lambda E \cdot \Lambda B}{K\Theta^2/KA \cdot KB} = \left(\frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma K}\right)^2 \frac{AK \cdot BK}{E\Lambda \cdot B\Lambda} = \frac{A\Delta \cdot B\Delta}{Z\Delta \cdot H\Delta} = \text{constante}$$

et prouve donc que M décrit dans un plan perpendiculaire à la figure une ellipse de diamètre EB sur lequel Γ se projette en son centre (c'est ici qu'intervient l'égalité $\Gamma E = \Gamma B$), c'est-à-dire une section singulière elliptique. En s'appuyant maintenant sur la proposition 7, on voit que le cône cartésien, défini comme la surface décrite par les droites passant par Γ et s'appuyant sur l'ellipse de diamètre AB, est encore un cône apollonien.

Pour conclure cette brève étude du texte d'Archiméde comparé à celui de Descartes, nous lisons ici à deux reprises une étude très bien fouillée quant à la nature des sections planes des cônes cartésiens, et que les mathématiciens du début du dix-septième siècle ne pouvaient ignorer [230]. Est-ce là la raison pour laquelle la preuve de la *Propositio* est muette sur ce point, puisque que c'était là une technique familière à tous ?

Annexe X : La remarque de Fermat

Dans les pages 181 à 188 du premier volume des *Œuvres complètes* de Fermat, on peut lire un micro-traité sous le titre NOVUS SECUNDARUM ET

229. Contrairement à ce qui se passe dans la proposition 7, cette égalité n'est pas à rigoureusement parler la mise en évidence d'un invariant ; nous n'avons utilisé ce terme de « deuxième invariant » que par abus de langage.
230. Voir par exemple la date - 1558 - de la publication de Commandino.

ULTERIORIS ORDINIS RADICUM IN ANALYTICIS USUS[231]. À la fin de ce court texte (page 188), Fermat fait allusion au problème des cônes cartésiens en ces termes

Lubet et, coronidis loco, famosi illius problematis :

`Datis ellipsi et puncto extra ipsius planum, superficiem conicam, cujus vertex sit punctum datum et basis ellipsis data, ita plano secare ut sectio sit circulus,`

solutionem, quæ huic methodo debetur, indicare, eamque simplicissimam. Eo deducunt quæstionem Geometræ ut, sumptis quinque punctis ad libitum in ellipsi et junctis rectis a vertice conicæ superficiei ad puncta illa, per junctas quinque rectas circulum describant ; inveniuntque problema hoc pacto esse solidum. Sed, quum puncta in ellipsi sint infinita, si loco quinque punctorum sumantur sex, fiet problema abundans et orietur necessario duplicata æqualitas, quæ tandem ignotam quantitatem per simplicem applicationem patefaciet[232].

Paul Tannery a traduit comme ceci cette page très obscure[233]

Voici, comme couronnement, la solution très simple que notre méthode donne de ce fameux problème :

`Étant donnés une ellipse et un point en dehors de son plan, couper par un plan, de façon que la section soit un cercle, la surface conique ayant pour sommet le point donné et pour base l'ellipse donnée.`

231. *Nouvel usage des racines du second ordre et d'un ordre supérieur dans l'analyse* dont les dernières pages constituent un *appendice à la méthode précédente* qui constituait une *méthode d'élimination* dont il était très fier.

232. Il semble bien difficile de dater ce fragment. Toutefois Paul Tannery, dans une note au bas de la page 184, paraît le rapprocher d'un *billet de Monsieur de Fermat, puisqu'il est en latin* auquel Descartes répond dans une lettre écrite d'Egmond le 18 décembre 1648 (AT V, pages 254-258, et 555) : cela indiquerait donc une réflexion probablement menée avant cette date. Il rappelle également une lettre de Fermat à Carcavi du 20 août 1650, accompagnant l'envoi d'un Traité entier, ce qui renforcerait cette hypothèse.

233. Cette traduction française figure à la page 163 du volume III des *Œuvres complètes*. On peut lire aussi avec intérêt Émile Brassinne (1853), à la page 15 de son *Précis des œuvres mathématiques* de Fermat.

Les géomètres ramènent la question à prendre ad libitum cinq points de l'ellipse, à joindre ces points par des droites au sommet de la surface conique, et à décrire un cercle passant par ces cinq droites : ils trouvent ainsi que le problème est solide[234]*. Mais, puisque sur l'ellipse le nombre de points est indéfini, si au lieu de cinq, on en prend six, le problème sera surabondant, et on arrivera à une double équation, qui donnera finalement l'inconnue par une simple division.*

Fermat se propose ici de couper un cône à base elliptique par un plan afin d'obtenir un cercle, possibilité dont il ne doute probablement pas. Supposant apparemment, comme Descartes, qu'une section plane d'un tel cône est une conique, il prend cinq points sur la base ce qui lui donne cinq arêtes et détermine donc entièrement la section, dont il ne reste plus qu'à écrire qu'elle est circulaire : aucune indication n'est donnée sur la façon de le faire, mais ce qui intéresse ici l'auteur c'est d'indiquer que l'emploi d'une sixième arête, non indispensable, peut être utilisé pour simplifier les calculs, ramenés - dit-il - à une simple division.

L'intérêt de citer ici ce texte réside dans le seul fait, assez mince, qu'il prouve que la question de Desargues avait intéressé tout le monde professionnel des mathématiciens de la première moitié du dix-septième siècle : mais nous n'avons pas de preuve que Fermat ait vraiment pris la plume pour la résoudre, tout au plus s'est-il sans doute contenté d'imaginer comment il aurait pu y parvenir. Cela dit, ne pas citer Fermat lorsqu'il touche à un sujet sur lequel son aîné et rival s'est si bien illustré aurait constitué une faute professionnelle !

Annexe XI : Le Tertius casus vu par La Hire

Philippe de La Hire (1640-1718) est un mathématicien et astronome relativement important du dix-septième siècle[235]. Il s'est occupé de la *Propositio* de Descartes, qu'il a critiquée et retraitée, à sa manière, dans un texte jusque maintenant inédit, que nous reprenons ici pour une partie.

234. C'est-à-dire que sa résolution n'est possible qu'en utilisant une conique auxiliaire car le degré de l'équation associée à ce problème est 3 ou 4.

235. Ami d'Abraham Bosse, disciple de Desargues, il fut également peintre, comme son père Laurent (1606-1656).

Il semble utile de le commenter ici comme exemple des balbutiements de la géométrie analytique cartésienne des coniques encore débutante, bien qu'il soit évidemment postérieur à Descartes.

L'Académie des Sciences possède un manuscrit daté du 29 mars 1692 (quatorze années après l'élection de Philippe de La Hire), visiblement rédigé non par son Secrétaire mais par notre auteur lui-même. Il y fait remonter le problème à une remarque de Mydorge dans son *Traité des coniques* de 1639. Il est alors proposé sous la forme

Un segment de cône étant donné dont la base soit une des sections coniques hormis le cercle ; couper ce segment de sorte que la section sur ce plan coupant soit un cercle.

La Hire dit que « dans ce temps-là » (sans être plus précis) Desargues, mort en 1661, l'avait résolu, mais sans publier de preuve. Puis il se réfère explicitement à la *Propositio demonstrata à D. Descartes* publiée par Clerselier à la page 475 du troisième volume de le *Correspondance*, qu'il pense avoir été rédigée après que le Père Mersenne l'ait lancé sur cette question intrigante. Il en critique fortement certains passages, surtout le fait que la résolution du *Tertius casus* était ramené à une équation de degré trois alors que lui, La Hire, est certain qu'il faut monter à cinq, et peut le démontrer. Il y annonce qu'après y avoir consacré (« il y a fort longtemps ») une recherche non analytique à ce problème, puis qu'en recourant, cette fois-ci, aux coordonnées, il en a découvert (« il y a déjà quelques années ») trois solutions originales, dont une « mécanique », qu'il expose ensuite par le menu. Nous ne nous intéresserons ici qu'à la première.

De manière assez étrange, les vicissitudes de l'histoire ont fait que ce travail, fort imparfait mais passionnant, reste longtemps dans les oubliettes, plus précisément enfoui dans une bibliothèque pourtant très importante. Le nom de La Hire est pourtant très connu, et son œuvre passionnante. Il reste à espérer que la publication de ce chapitre conduise d'autres chercheurs à aller plus à fond sur ce point.

Il semble que la première allusion à ce texte ait été faite vers 2000 par le mathématicien Didier Bessot, travaillant pour l'IREM de Caen, sans qu'il en livre explicitement le contenu ni même une cote, se réservant d'en donner plus tard une analyse (qu'il n'a toujours pas sortie). Elle vint aux oreilles de son confrère Luc Sinégre, de l'IREM de Rouen, déjà cité à plusieurs reprises dans ce chapitre, qui a pu retrouver le manuscrit à la Bibliothèque de l'Institut le 28 mai 2009.

Notons au passage qu'un article cosigné par Luc Sinègre, Thierry Hamel et l'auteur, sur la totalité du texte cette fois-ci, est actuellement en préparation en vue d'une publication dans une revue professionnelle.

Reprenons la figure fondamentale du *Tertius casus* de notre page 598

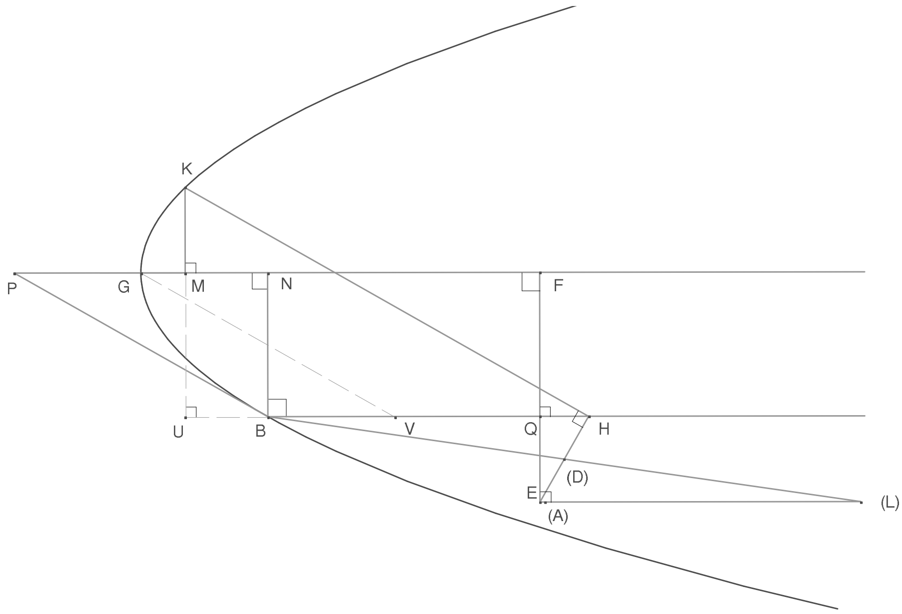


FIGURE 12.21 – *Le Tertius casus chez Descartes*

et comparons-là à une autre figure tentant d'expliciter la première technique de La Hire pour résoudre ce même *Tertius casus*

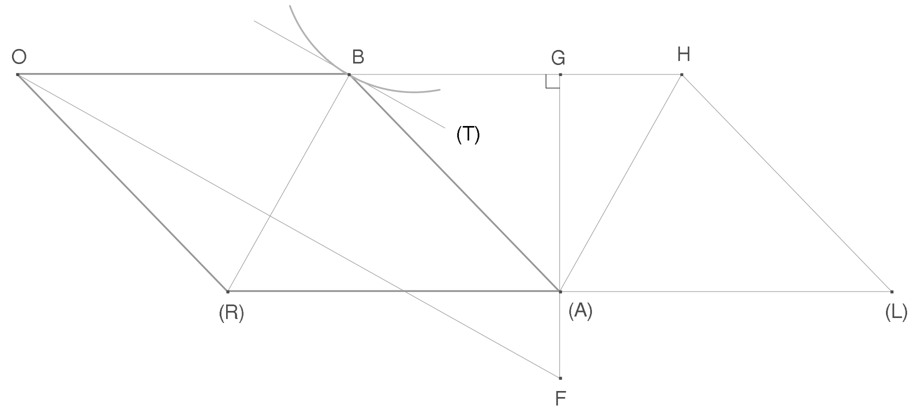


FIGURE 12.22 – *Une figure décrivant la technique de La Hire*

Dans sa première solution analytique, La Hire note $\overrightarrow{T}$ l'un des vecteurs tangents en un point B de la base, prend un point O sur le diamètre issu de B et complète un parallélogramme[236] $OBAR$ en posant $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{BA}$. Il construit enfin le point F du plan de base qui se projette orthogonalement en A sur le plan $AGBOR$.

On notera que $\overrightarrow{FA}$ est orthogonal à toutes les droites de ce plan, et donc en particulier à la diagonale BR du parallélogramme $OBAR$: par suite

$$\big(\overrightarrow{BR} \,|\, \overrightarrow{OF}\big) = \big(\overrightarrow{BR} \,|\, \overrightarrow{OA}\big).$$

Il s'intéresse aux configurations définies ci-dessus pour lesquelles sont remplies ce que nous appellerons les deux *conditions de La Hire*, à savoir

- $BO = BA$, équivalente au fait que $OBAR$ est un losange, soit encore

$$\big(\overrightarrow{BR} \,|\, \overrightarrow{OF}\big) = \big(\overrightarrow{BR} \,|\, \overrightarrow{OA}\big) = 0;$$

- $\overrightarrow{OF}$ est parallèle à $\overrightarrow{T}$, alors équivalente à $\big(\overrightarrow{BR} \,|\, \overrightarrow{T}\big) = 0$.

236. En réalité, il n'introduit pas explicitement le symbole $\overrightarrow{T}$ et utilise les notations (S, V, D, B) au lieu de (B, A, G, F). Par ailleurs, contrairement à ce que nous écrivons ici, le point R est pour lui arbitraire sur la parallèle à l'axe de la base issue du sommet (il indique simplement une direction). Mais c'est sans importance pour la compréhension de la technique utilisée, nos conventions ayant simplement pour but de mettre un peu de clarté dans un texte original assez confus, même pour l'époque.

Il explique son intérêt, de manière un peu confuse, par le fait que ces conditions impliquent que le sommet A du cône se projette orthogonalement sur l'axe focal de son intersection (hyperbolique) avec un plan arbitraire[237] parallèle à $AGBOR$, axe parallèle à la bissectrice AO de l'angle $\widehat{BAR}$: il est alors systématiquement ramené au *Secundus casus*, puis au *Primus*[238].

Rappel de la stratégie cartésienne

Intéressons-nous à comparer la technique de La Hire avec celle de Descartes dans sa résolution du *Tertius casus*. Pour la confronter à la preuve de la *Propositio*, ajoutons à la figure de La Hire les deux points H et L définis par

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OB}$$

introduisant un parallélogramme $BHLA$, translaté de $OBAR$. Dès lors il est équivalent que $BHLA$ et $OBAR$ soient à la fois des losanges. Regardons de nouveau la figure mère après la précédente augmentée de H et L

On sait que pour se ramener au *Primus casus*, au prix d'un éventuel passage par le *Secundus*, il suffit de noter $\overrightarrow{T}$ l'un des vecteurs tangents en un point B de la base et L_1 un point sur la parallèle à l'axe de la base passant par A, définir H_1 par $\overrightarrow{BH_1} = \overrightarrow{AL_1}$, puis chercher à vérifier les deux *conditions de Descartes*, à savoir

- $AB = AL_1$, équivalente au fait que BH_1L_1A est un losange, soit encore
$$\left(\overrightarrow{BR}\,|\,\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{H_1A}\,|\,\overrightarrow{BL_1}\right) = 0;$$
- $\overrightarrow{H_1A}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}$.

237. Ne passant pas par A.

238. Nous n'examinerons pas ici en détail la preuve de cette affirmation, qui relève de la géométrie projective. Qu'il suffise à un moderne de remarquer que si Π et Π' sont les plans tangents en M et M', deux points distincts d'une quadrique $\mathcal{Q}$, tout point P de $\Pi \cap \Pi'$ est à la fois conjugué de M et de M' par rapport à $\mathcal{Q}$ et donc que MM' est sa polaire de la conique $\Gamma = \mathcal{Q} \cap PMM'$: il en résulte que P est donc l'intersection des tangentes en M et M' à Γ : il suffit alors de prendre le cône pour $\mathcal{Q}$, et M et M' les points à l'infini des arêtes AB et AR (VS et VR dans ses notations).

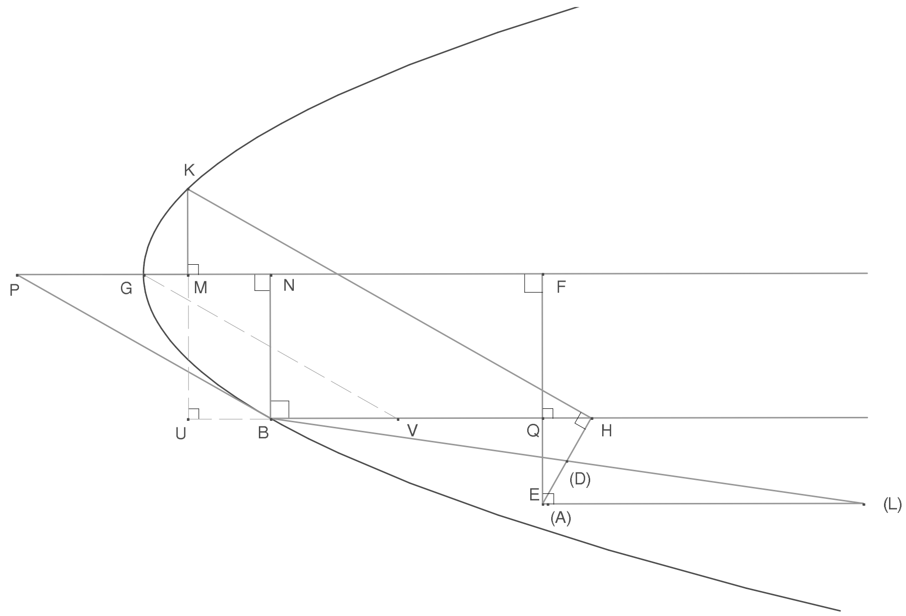


FIGURE 12.23 – *La figure fondamentale du Tertius casus*

Si B satisfait aux conditions de La Hire, alors $BHLA$ est, comme $OBAR$, un losange, et $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BR}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}$. Cela signifie que L et H vérifient les conditions de Descartes que L_1 et H_1 doivent vérifier : il en résulte que B les satisfait aussi.

Réciproquement, si B vérifie les conditions de Descartes avec L et H en guise de L_1 et H_1, alors $OBAR$ est, comme $BHLA$, un losange et $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{HA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}$. Cela signifie que B satisfait aussi les conditions de La Hire.

Il y a donc finalement équivalence entre les deux couples de conditions, et il serait donc normal que les points B recherchés soient donnés par la même équation, ce que nous allons vérifier un peu plus loin. Mais avant de nous livrer à la comparaison entre les deux recherches calculatoires de Descartes et de La Hire [239], il faut noter que l'on se trouve finalement, en cas de succès, dans une très riche situation.

239. Dans sa première solution, seule à être traitée ici.

Une fois un point B de la base reconnu comme « convenable » ou « possible » pour la résolution de l'antique problème des cônes à base conique, on peut lui associer à sa guise

a) Deux points auxiliaires « *cartésiens* », issus du texte de la *Propositio* et d'une réflexion moderne sur une variante intéressante[240], notés plus haut L_1 et L_2, avec leurs compagnons H_1 et H_2, tels que

- La conique section du cône définie par la tangente en B et L_1 est *singulière*, c'est-à-dire que A s'y projette orthogonalement en son centre ; on est alors ramené au *Primus casus* après, deux fois sur trois, un éventuel détour par le *Secundus*.

  Elle est obtenue en annulant le produit scalaire $\big(\overrightarrow{AH_1} \mid \overrightarrow{T}\big)$.

- La conique définie par la tangente en B et L_2 est telle que A s'y projette orthogonalement sur un axe ; on est alors ramené au *Secundus casus*, puis au *Primus*.

  Son plan est perpendiculaire au précédent à cause de l'orthogonalité de BL_2 à BL_1 et à $\overrightarrow{T}$ (dirigeant la tangente en B commune aux trois coniques : les deux précédentes et la base).

  Elle est obtenue en annulant le produit scalaire $\big(\overrightarrow{BL_2} \mid \overrightarrow{T}\big)$.

Pour chacun des trois points B possibles, tout cela définit une infinité de couples de plans perpendiculaires permettant une recherche effective de sections cycliques du cône, se transformant les uns en les autres par les homothéties de centre A.

b) Une (troisième) infinité de solutions « *la hiriennes* », hyperboles également deux à deux homothétiques telles que A s'y projette orthogonalement sur un axe ; on est alors ramené au *Secundus casus*, puis au *Primus*.

Par rapport aux solutions cartésiennes, on doit remarquer les égalités $V = A$, $S = B$, $L = L_1$, $H = H_1$, $R = L_2$ et $O = H_2$.

240. Bien que non mise en œuvre par Descartes.

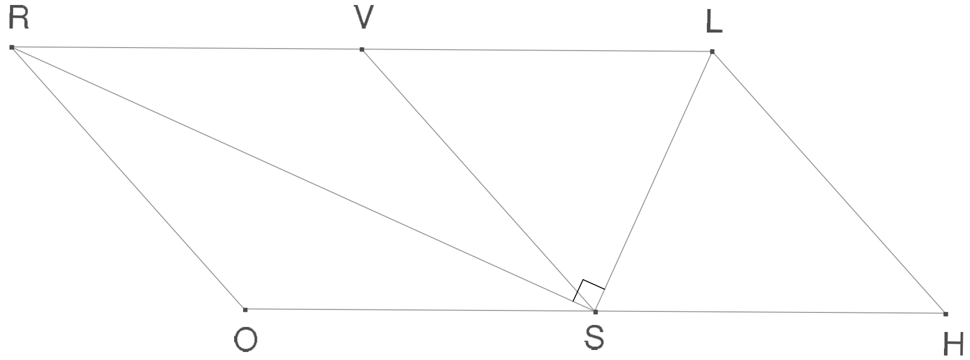


FIGURE 12.24 – *Les trois types de solutions cartésiennes et la hirienne*

Sauf cas tout à fait exceptionnels, ces trois familles sont deux à deux disjointes. Bien que La Hire n'ait traité que le *Tertius casus*, il est facile d'étendre sa découverte au *Quartus* qui nous paraît indispensable pour compléter la recherche de son prédécesseur : son traité est donc un enrichissement de celui de Descartes, même s'il n'en a pas l'extraordinaire nouveauté et s'il se trompe tout autant sur le problème du « cercle vicieux ».

Le calcul de La Hire

Déchiffrons la figure du manuscrit de l'Académie des Sciences, elle n'est pas très facile à lire.

Trône en évidence la base parabolique, commune à Descartes et à La Hire pour l'étude du *Tertius casus*. Son sommet est X, son paramètre p (le double du nôtre) est la longueur XZ, son axe est la verticale passant par X. Le point P est la projection orthogonale du sommet V sur le plan. La perpendiculaire à l'axe coupe ce dernier en un point A. Cela clôt la liste des éléments de la figure indépendants du choix de S sur la parabole.

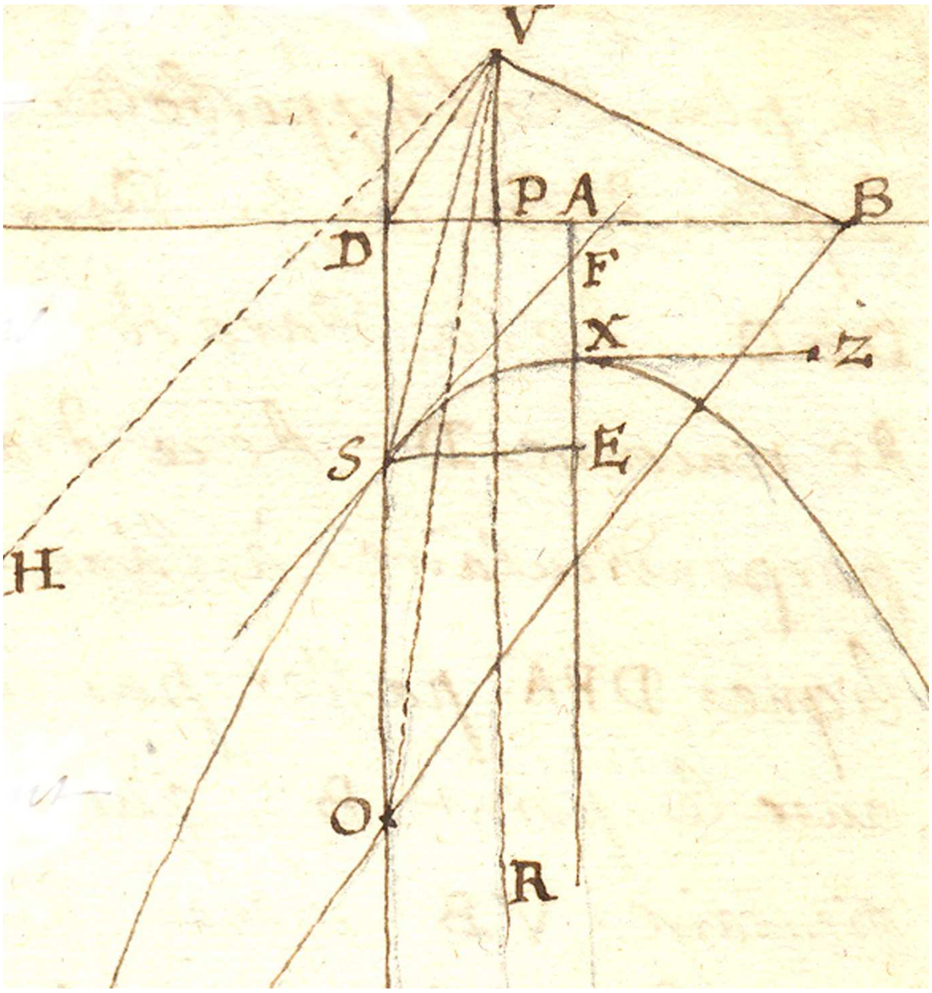


FIGURE 12.25 – *La figure de la première solution de La Hire*

En principe, tous les points de cette figure sont dans le plan de base, à quelques exceptions notoires. Le sommet V (A chez Descartes) est évidemment au dehors. Mais, par une technique déjà rencontrée dans les figures de la *Propositio*, il apparaît dans le dessin après avoir subi un rabattement d'angle droit sur le plan de base [241]. Le triangle DVB, rectangle en V, dépend du choix *a priori* arbitraire du point S (B chez Descartes) sur la base : D est sa projection sur PA, B s'en déduit aussitôt.

241. Prémisse de la géométrie descriptive de Monge.

La tangente en S à la base coupe l'axe en F. Si E est la projection de S sur l'axe, X est classiquement le milieu du segment EF. Le point O est l'intersection de SD et de la parallèle à la tangente SF issue de B : il appartient donc aussi au plan de base.

Par maladresse du dessinateur, nous pouvons lire des droites comme VD, VS et VO qui posent problème. Comme nous venons de le dire, la première résulte d'un simple rabattement, mais les deux autres sont inadmissibles : elles devraient joindre P à S et à O. Et cela n'est pas sans importance, puisque l'une des conditions de La Hire va s'écrire $SV = SO$. Or dans la figure la hirienne, si SO est bien en vraie grandeur, par contre $SV = \sqrt{SP^2 + PV^2}$, longueur évidemment différente de la distance séparant sur le papier les points S et V de la figure.

Contrairement à ce que nous avons écrit plus haut, le point R ne vérifie pas ici l'égalité $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{SV}$. Ce n'était qu'une liberté que nous avions prise afin de simplifier un peu une présentation nécessairement fort lourde : chez La Hire, R est simplement un point de la parallèle à l'axe de la base issue de V ; notre spécialisation de R pour fermer un parallélogramme $OSVR$ (destiné à devenir un losange) est sans conséquence sur les mathématiques sous-jacentes.

Enfin la droite VH ne sera utilisée par La Hire qu'au cours de la démonstration selon laquelle sa méthode règle le *Tertius casus* ; son intervention importe peu ici.

Définissons, comme La Hire, le sommet V par les trois nombres [242] $XA = d$, $AP = a$, $PV = h$. Notons tout de suite que h n'est pas nul, puisque le cône n'est pas aplati.

Cela posé, le point S est choisi *a priori* arbitrairement sur la base parabolique de sommet X. Nous poserons $AD = SE = x$, $SV = w$, $OS = v$ et établirons la condition sur x pour que la relation $v = w$ soit vérifiée.

---

242. Dont on ne discutera pas le signe, le problème du statut des coordonnées éventuellement négatives étant, comme ce travail le montre en plusieurs endroits, intraitable au dix-septième siècle.

Les triangles semblables $\begin{bmatrix} DPV \\ VPB \end{bmatrix}$ conduisent aux égalités [243]

$$PB = PV\,\frac{VP}{DP} = \frac{hh}{DP} = \frac{hh}{DA - AP} = \frac{hh}{x-a}\cdot$$

Par définition de la parabole, si p est le double de notre paramètre moderne, on dispose de la relation $EX = \dfrac{xx}{p}$, puis par une célèbre propriété de la tangente SF en S, de $EF = 2\,EX = \dfrac{2xx}{p}\cdot$ On a donc notamment

$$(y =)\;\; DS = AE = AX + XE = d + \frac{xx}{p}\cdot$$

Les triangles semblables $\begin{bmatrix} FES \\ ODB \end{bmatrix}$ conduisent aux égalités

$$\frac{2x}{p} = \frac{2xx/p}{x} = \frac{FE}{ES} = \frac{OD}{DB} = \frac{OS+SD}{DP+PB}$$
$$= \frac{OS+SD}{DA-AP+PB} = \frac{v + (xx/p) + d}{x - a + \dfrac{hh}{x-a}}$$

soit $xx - 2xa + \dfrac{2xhh}{x-a} = pv + pd$ et

$$v = \sqrt{hh + xx - 2ax + aa + dd + \frac{2dxx}{p} + \frac{x^4}{pp}}\cdot$$

Par ailleurs nous disposons des égalités

$$w^2 = SV^2 = SP^2 + PV^2 = SD^2 + DF^2 + PV^2 = AE^2 + DP^2 + PV^2$$
$$= AE^2 + (DA - AP)^2 + PV^2 = \left(d + \frac{xx}{p}\right)^2 + (x-a)^2 + hh,$$

243. Où, conformément aux habitudes de l'époque, on « regarde » parfois la figure pour établir des égalités telles que $DP = DA - AP$.

et donc de l'équivalence entre les propositions $v = w$ et

$$p^2\,(v^2 - w^2) = \Big(x^2 - 2ax - pd + \frac{2xh^2}{x-a}\Big)^2 - p^2\big((x-a)^2 + h^2\big) - (pd + x^2)^2 = 0$$

c'est-à-dire encore en développant [244]

$$\begin{gathered} 4a\,x^5 - (12a^2 - 4pd + 4h^2 - p^2)\,x^4 + 4a\,(3a^2 - 3pd + 3h^2 - p^2)\,x^3 \\ +(-4a^4 + 12a^2dp - 8a^2h^2 + 6a^2p^2 + 4dph^2 - 4h^4 + p^2h^2)\,x^2 \\ -2ap\,(2a^2d + 2a^2p + 2dh^2 + ph^2)\,x + a^2p^2\,(a^2 + h^2) = 0. \end{gathered}$$

La Hire a donc *a priori* raison de dire que, contrairement à Descartes qui avait obtenu une équation en x du troisième degré, sa méthode le conduit à une équation du cinquième degré (qu'il n'explicite d'ailleurs pas).

Cela étant, un examen fouillé de cette égalité, et la foi en le génie mathématique de Descartes, montrent qu'il doit exister quelque part une solution à ce paradoxe. De fait, c'est tout simple : *le polynôme ci-dessus se factorise* en

$$\big((x-a)^2 + h^2\big)\,(4a\,x^3 + (p^2 + 4pd - 4a^2 - 4h^2)\,x^2 - 2ap\,(2d + p)\,x + p^2a^2$$

avec un premier facteur ne pouvant s'annuler puisque h ne peut être nul.

Les signes d'égalité dans le manuscrit de La Hire

De manière précise, La Hire avait recours à un signe d'égalité qui nous paraît un peu étrange, à savoir $\|$. Quand il voulait exprimer notre égalité $\dfrac{p}{q} = \dfrac{r}{s}$, il écrivait $p|q \parallel r|s$ si longues que puissent être les expressions p, q, r et s. D'après Florian Cajori (page 288 de son premier volume), on trouve notamment ce symbolisme aux pages 184 des éditions de 1679 et 1701 de ses *Nouveaux elemens des sections coniques* chez Pralard à Paris [245]. Il semble avoir

244. Comme la précédente, cette égalité polynomiale ne figure pas explicitement dans le texte, elles sont donc nôtres pour la clarté du développement du calcul.

245. Et bien sûr aussi dans les *Cogitationes Privatæ* de Descartes, lorsqu'il écrit (AT X, page 241)

$$1|2 \parallel 4|8 \parallel 16|32$$

pour exprimer l'égalité des rapports 1/2, 4/8 et 16/32, et aussi dans sa *Correspondance* éditée par Clerselier (voir page 594).

été introduit en 1571 dans l'*Arithmétique* de Diophante traduite en latin par Wilhelm Holtzmann (= Guilielmus Xylander) comme l'indique Cajori, *op. cit.*, page 299, alors que le signe moderne = était déjà apparu en 1557 dans la *Clavis mathematicæ* de Robert Recorde (1510-1558), mais mettra presque un siècle à s'imposer.

Dans son manuscrit, nos égalités

$$\frac{2x}{p} = \frac{2xx/p}{x} = \frac{v + (xx/p) + d}{x - a + \dfrac{hh}{x-a}}$$

s'écrivent

$$2\,\frac{xx}{p}|x \parallel 2x|p \parallel v + d + \frac{xx}{p}|x - a + \frac{hh}{x-a}$$

ce qui ne les rend pas très faciles à lire. Il n'écrit pas d'expression analogue à notre

$$\begin{gathered}4a\,x^5 - (12a^2 - 4pd + 4h^2 - p^2)\,x^4 + 4a\,(3a^2 - 3pd + 3h^2 - p^2)\,x^3 \\ +(-4a^4 + 12a^2dp - 8a^2h^2 + 6a^2p^2 + 4dph^2 - 4h^4 + p^2h^2)\,x^2 \\ -2ap\,(2a^2d + 2a^2p + 2dh^2 + ph^2)\,x + a^2p^2\,(a^2 + h^2) = 0,\end{gathered}$$

mais se contente de l'égalité (théoriquement équivalente)

$$\begin{gathered}pphh + ppxx - 2ppax + ppaa + 4pdxx \propto\ - 4ax^3 \\ -\frac{4hhx^3}{x-a} + 4aaxx - \frac{8axxh^3}{x-a} + 4apdx + \\ \frac{4h^4xx}{xx - 2ax + aa} - \frac{4pdhhx}{x-a}\,.\end{gathered}$$

Cette fois-ci, c'est le signe d'égalité $\propto$ de *La Géométrie* de Descartes qui est employé, sans autre commentaire.

Mais cette dernière équation pose un énorme problème : en effet, le signe du quotient $-\dfrac{4hhx^3}{x-a}$ est faux. Il s'agit peut-être d'une simple erreur de recopie, mais le fait que La Hire n'ait pas poussé plus loin laisse au contraire penser que cette erreur est enfouie dans le calcul même de La Hire, jusque là correct, ce qui bloquait toute possibilité de factorisation, et l'autorisait à écrire, non sans hauteur, qu'il « *n'avait pu s'empêcher de soupçonner que M. Descartes aurait pu se tromper n'ayant pas achevé toute son analyse et surtout dans ce problème quelqu'une des circonstances étant négligée il exprime à un degré plus bas qu'il ne doit l'être* ».

Comparaison des deux calculs

Comme nous venons de le voir, la détermination des points S $(= B)$ par La Hire revient en fait à la résolution de l'équation du troisième degré

$$(4a\,x^3 + (p^2 + 4pd - 4a^2 - 4h^2)\,x^2 - 2ap\,(2d + p)\,x + p^2a^2 = 0$$

où $x = SE$, $a = AP$, $d = AX$, p est le *latus rectum* (double de notre paramètre) de la base parabolique et $h = PV$.

Comme on le sait (voir page 594), Descartes a obtenu de son côté, pour déterminer les mêmes points, l'équation du troisième degré

$$4b\,x^3 + 4\,(c^2 - a^2)\,x^2 - 4bcr\,x + b^2r^2 = 0$$

où $x = BN$, $a = AG$, $b = EF$, r est le *latus rectum* de la base, $c = \dfrac{r}{2} + FG$ et $h = EA = \sqrt{AG^2 - EG^2}$.

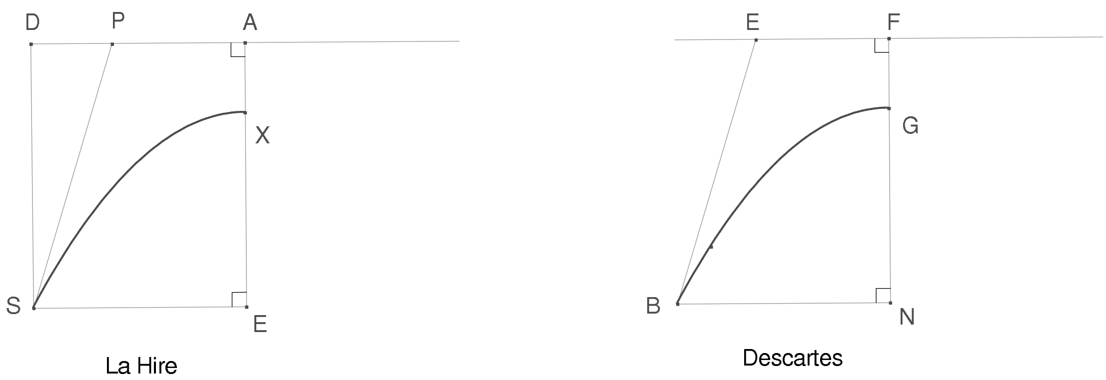


FIGURE 12.26 – *Comparaison graphique des deux calculs*

L'examen des figures montre que[246] $SE = BN$, $EF = PA$ et $AX = -GF$.

Il en résulte que l'on peut passer de l'équation de La Hire à celle de Descartes en gardant l'inconnue x et en remplaçant les notations de gauche du tableau ci-dessous par celles de droite

La Hire	Descartes
p	r
a	b
d	$c - r/2$
h	$\sqrt{a^2 - b^2 - (c - r/2)^2}$

ce qui se vérifie en effet très simplement.

Le manuscrit de Philippe de La Hire

Nous donnons ci-dessous le début du texte du fonds La Hire de l'Académie des Sciences tel que l'a exhumé Luc Sinègre[247].

Probleme de Geometrie resolu de trois manieres par M. de la hire

M. Midorge ayant fait imprimer son traité des sections coniques en 1639, les savants geometres qui les trouverent alors, y remarquèrent d'abbord le paralogisme où il était tombé dans la 32 proposition de son premier livre, ou il veut démontrer que toutes les lignes qui passent par le milieu du diametre originaire sont des diametres qui ont leurs ordonnées, ou appliquées d'ordre, aussi bien que l'originaire. Car il dit *Sit enim in exposita* ABC *cono scaleno facta ipsa sectio hyperbola sine ellipsis* DER, *rectoque primum* &tc. sans avoir démontré auparavant s'il était possible de former un cone avec les conditions

246. En écrivant à gauche comme La Hire et à droite comme Descartes ; les « longueurs » utilisées peuvent en fait être positives sur une figure, et négatives dans l'autre : le charme du signe des coordonnées balbutiantes...

247. D'après une indication verbale de Didier Bessot.

qu'il demande, et sans avoir donné la methode d'y faire la section proposée [248].

On connût bien que cette methode estait plus abbregée, et moins embarrassante que celle d'Apollonius pour ce qui regardait tous les diametres ; mais elle estait imparfaite, supposant des choses beaucoup plus difficiles que celles qui estaient en question.

Ce fut donc alors autant qu'on le peut conjecturer et par ce que M. de la hire en a pu savoir de nos anciens geometres que l'on propose le problème suivant

Probleme

Un segment de Cone estant donné dont la base soit une des Sections Coniques hormis le cercle ; couper ce segment en sorte que la section sur ce plan coupant soit un Cercle.

M. Desargues lionnais et savant geometre dit dans ce temps la qu'il avait resolu ce Probleme : mais on n'a pas entendu dire qu'il l'ait publié et M. de la hire <a> de grandes raisons de douter qu'il l'eût publiee, au moins universellement comme il est exposé ; car on sait qu'il n'estait pas fort versé dans l'analyse, mais qu'il avait une grande connaissance des plans et des dissections des solides ce qui luy aurait pû lui ouvrir le chemin à cette solution, si elle eût esté possible par la géométrie ordinaire.

On trouve une analyse de ce problème dans le troisieme volume des lettres de M. Descartes pages 475 et il y a lieu de croire qu'il luy aurait esté proposé par le P. Mersenne et qu'il y aurait travaille.

Il en fait trois cas differens. Dans le premier il suppose que la base du segment est une Ellipse dont le centre est dans le point ou la perpendiculaire menée du sommet du segment au plan de la base, rencontre ce plan.

Dans le second cas il suppose que ce point de rencontre de la perpendiculaire et de la base, est dans laxe de lune des trois sections coniques qui peuvent estre la base du segment.

248. Ce qui précède semble fort obscur, au moins sous cette forme écrite.

Et dans le troisiéme il suppose que ce point de rencontre est hors de l'axe.

Les deux premiers cas sont tres faciles à resoudre et lon y peut venir par differentes voyes : mais pour ce qui est du troisiéme il est tres difficile. On ne voit pas aussi que M. Descartes traite ce Probleme comme il le fait la plupart des autres. Il donne une construction analytique de ce troisiéme cas en supposant que la base du segment soit une Parabole, ce qu'il est toujours possible de faire, et il dit seulement qu'il cherche un point de la Parabole dans lequel elle est touchée par une Ellipse qui a son centre au point de rencontre de la perpendiculaire menée du sommet du segment au plan de la Parabole. Il ne dit point a quoy doit servir cette ellipse qui touche la Parabole, ni de quelle maniere on doit couper le segment, ce point touchant estant donné, pour avoir un cercle comme il est proposé.

M. de la hire a cherché ou le pouvait conduire cette Ellipse touchante mais a trouvé plus de difficulté dans cet examen, que dans la solution du Probleme, quoy qu'il soit tres difficile de venir à l'équation, et c'est ce qui lui a fait abandonner l'examen de la solution de M. Descartes.

Enfin on ne trouve rien de ce probleme dans les ouvrages meslez de Fr. Schooten, qui avait pourtant un grand commerce avec ceux qui se meslaient d'Analyse, et qui n'aurait pas manqué d'en parler, s'il en avait eu quelque solution de quelle nature elle eût esté. On sait aussi qu'il avait assez de liaison avec M. Descartes pour ne pas ignorer ce qu'il avait fait. On pourrait donc conjecturer avec assez de raison que tous les mathematiciens l'avaient abandonné, ne pouvant pas en trouver de solution : car il n'y a pas d'apparence qu'ils n'y eussent travaillé, puisqu'en ce temps la où lon commençait a faire grand usage du calcul analytique dans la resolution des Problemes de Geometrie, chacun s'y addonnait avec beaucoup d'application comme on peut le voir par les ouvrages des geometres qui estaient alors.

Il y a fort longtemps que M. de la hire avait travaillé à la solution de cette question sans se servir du calcul analytique : mais dans le temps qu'il croiait l'avoir achevé, il fut détourné par d'autres occupations qui l'empescherent de le pousser jusqu'au bout, et il n'aurait pas manqué sans doute d'y trouver une difficulté insurmontable qu'il ne prévoyait pas alors, car il se persuadait l'avoir resolu. Depuis ce temps la ayant vû les lettres de M. Descartes et y ayant trouvé la solution de ce probleme, sans marquer, comme il lui arrive souvent le peu de cas qu'il en faisait, il a crû que ce probleme meritait d'estre examiné dans toute son étendue. Il a trouve dabord que les deux premiers cas n'avaient rien que de tres facile comme dit M. Descartes ; mais pour le troisieme ce n'a pas esté sans quelque peine qu'il est venu à une équation par les voyes analytiques. Mais comme il est tombe dabbord dans une équation assez composée dont l'inconnuë a 5 dimensions, il a cru qu'il n'avait pas trouve la plus simple voye de resolution, puisque M. Descartes dit qu'il pouvait resoudre par les sections coniques, quoy qu'il n'expliquât pas sa methode : c'est ce qui l'a obligé de chercher d'autres manieres de venir à l'équation et il en a trouvé plusieurs fort différentes entr'elles, mais dans laquelle l'inconnuë monte toujours à plus de quatre dimensions, ce qui ne se rencontre pas ordinairement quand il est possible de resoudre le probleme par une voye plus simple, comme il arrive a celui de Pappus qui sert d'exemple à M. Descartes dans sa geometrie. C'est pourquoi M. de la hire a eu quelque soubcon que M. Descartes aurait pu se tromper, n'ayant pas acheve toute son analyse, et surtout dans ce probleme, ou quelqu'une des circonstances estant negligées il se deprime a un degré plus bas qu'il ne doit estre.

M. de la hire a donné deux solutions analytiques de ce Probleme en expliquant exactement par quelle voye il est venu à l'équation, et comme les constructions en seraient plus que solides ne se pouvant faire, qu'avec une ligne du second genre et non certes par des voyes tres embarrassees, il en donne une troisieme construction avec deux lignes du second genre qu'on decrit d'une maniere tres simple et tres aisee, et il appelle cette construction mechanique.

Il y a deja quelques annees que M. de la hire avait resolu ce Probleme et qu'il avait sollicité plusieurs de nos geometres d'y travailler et de tascher à decouvrir la methode dont M. Descartes s'estait servi ; mais comme ils ne luy ont point rendu de reponses il a cru qu'il pouvait encore les exciter à cette recherche en ne publiant icy que la derniere de ses trois solutions, et reservant les deux autres dans six mois pour donner du temps a ceux qui voudront y penser. Il a mis ces deux solutions entre les mains de M. le Secrétaire de l'academie le 29 Mars 1692.

Premiere Resolution

du probleme de geometrie dont il a ete parlé dans le memoire du[249]

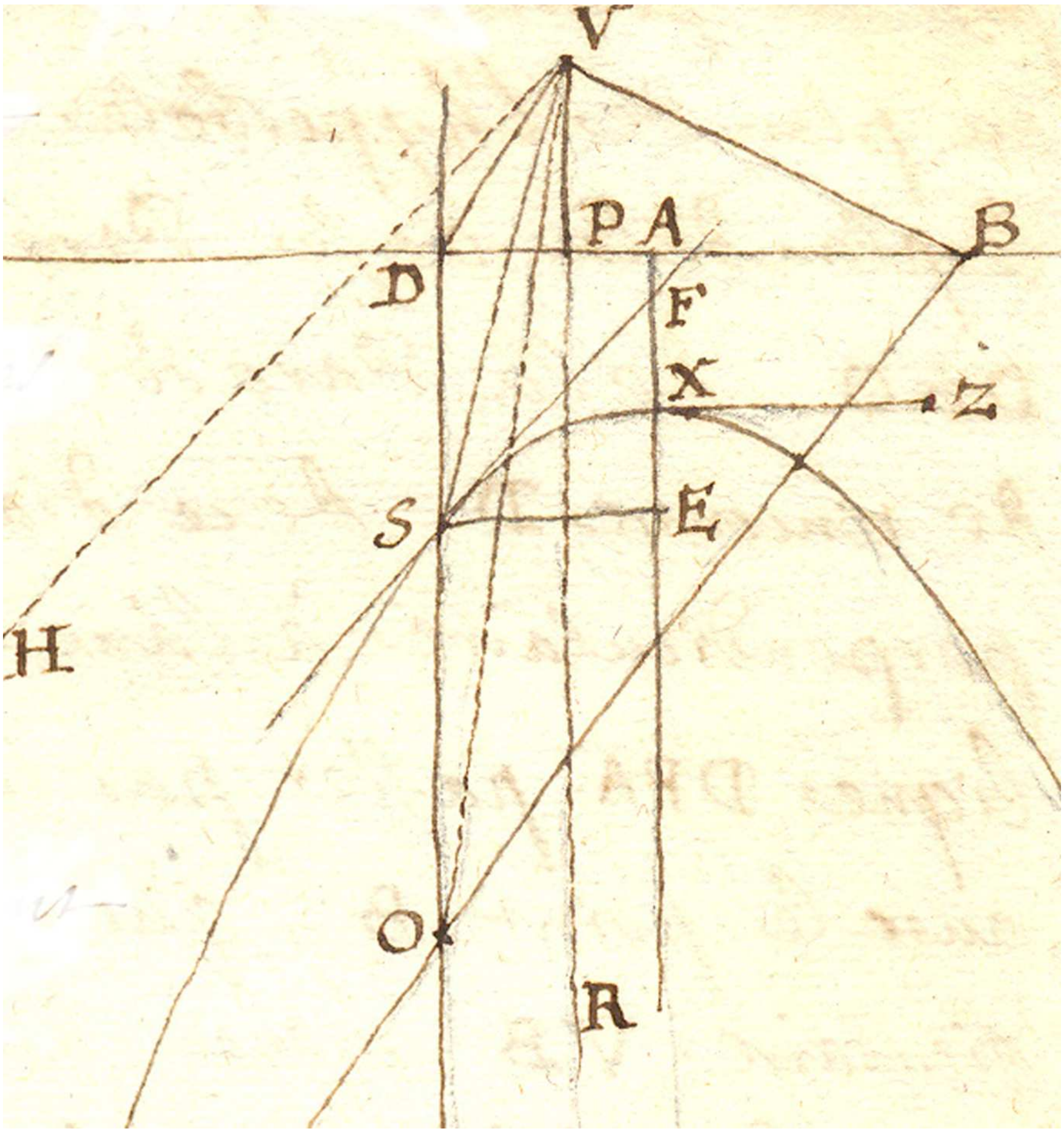


FIGURE 12.27 – *Figure de la première solution (manuscrit de La Hire)*

249. La date manque, mais il s'agit évidemment du 29 mars 1692.

M. delahire suppose qu'on ait entendu ce qu'il a écrit des Sections Coniques imprimé in folio ; car sans cela il serait difficile de le suivre.

Il suppose maintenant que le segment de cone proposé est coupé par un plan parallele à quelque plan qui le touche, afin que la Section qui sera faite sur ce plan coupant soit une Parabole, laquelle sera SX, et le point P sera la rencontre de la perpendiculaire menée du sommet V du cone sur le plan de la Parabole avec ce même plan ; lequel point P ne rencontre pas l'axe de la Parabole, et cet axe est AXE qui a XZ pour son paramètre.

Maintenant je [250] veux couper le segment de Cone proposé reduit à la base Parabolique SX, avec un plan qui rencontre le plan de Parabole dans un de ses Diametres, sur lequel plan coupant il se fasse une section hyperbolique, dont l'axe déterminé passe par le point de rencontre de la perpendiculaire menée du sommet V du Cone sur le plan de l'hyperbole.

Premièrement je cherche quelle doit estre la position du plan par le sommet du cone, lequel plan soit parallele a la section hyperbolique proposée. Ce plan par le sommet V du cone lequel est parallele au plan de l'hyperbole cherchée, doit aussi rencontrer le plan de la base Parabolique dans un des diametres DSO de la Parabole, en telle sorte que le point de rencontre D de ce diametre avec la ligne DPA perpendiculaire à l'axe de la Parabole, laquelle ligne DPA passe par le point P estant determiné avec le point B, qui est la rencontre de la perpendiculaire VB menée à la ligne DV sur le plan $DPBV$ perpendiculaire au plan de la base Parabolique, lequel plan passe par le sommet V ; si du point B on mene BO ordonnée au diametre DSO, ou parallele à SF tangente à l'extremité S de ce mesme diametre, la partie interceptée SO de ce diametre soit égale à la distance SV depuis l'extremité S jusqu'au sommet V du cône.

Ce qui estant ainsi il est certain que la section du segment de cone faite par un plan parallele au plan $VDSO$, sera une hyperbole qui aura les conditions requises. Car si l'on imagine un plan VRH par le sommet V lequel soit parallele au plan de base Parabolique SXO ; le plan par le sommet $VDSO$ rencontrera le plan VRH dans la ligne VR laquelle sera parallele à DSO à cause des plans paralleles entre eux. Mais la ligne VR est la rencontre du Cone et du plan qui touche sa superficie, lequel plan est parallele au plan

250. *Sic.*

de la Parabole ; et la ligne VX sera la rencontre d'un autre plan touchant VSF avec la superficie conique, donc ces deux plans touchants formeront les Asymptotes sur le plan de l'hyperbole, parallele au plan $VDSO$, lesquelles Asymptotes contiendront un angle egal à l'ange SVR qui est sur le plan par le sommet V parallele au plan coupant de l'hyperbole.

De plus puisque SO est égale à SV, et que les lignes SO, R sont parallèles l'angle SVR sera coupé en deux également par la ligne VO ; cette ligne VO sera donc parallèle à l'axe de l'hyperbole ; et le plan qui passera par la ligne VO et par la ligne VH qui est la rencontre de deux plans touchants qui forment les asymptotes, laquelle est aussi parallèle à BO et SF, formera l'axe sur lhyperbole.

Mais le plan OVH qui forme l'axe de lhyperbole rencontrera le plan de la base Parabolique dans la ligne OB ; car ce plan passe par le point O et il doit rencontrer le plan de la Parabole dans une ligne parallèle à VH par ou il passe, acause des plans HVR, $SXBO$ parallèles entre eux. Le plan qui formera l'axe de l'hyperbole rencontrera donc le plan $VDPB$ dans la ligne VB ; et par la construction, la ligne VB est perpendiculaire au plan VDO, à cause des plans VDB, VDO qui sont perpendiculaires entr'eux.

Si l'on prolonge donc la ligne VB sur ce plan qui forme l'axe, jusqu'au plan de l'hyperbole, elle le rencontrera dans l'axe qui est formé par le plan $HBVO$ et elle le rencontrera aussi à angles droits, puisqu'elle rencontre à angles droits le plan par le sommet VDO parallele au plan coupant de l'hyperbole ; et c'est ce qu'il fallait trouver pour reduire le troisiéme cas de ce Probleme suivant la division de M. Descartes a son second cas.

Venons maintenant à la Resolution en determinant la position du diametre DSO qui ait les propriétés requises.

Soit $VP \propto h$. $AP \propto a$. $AX \propto d$. $XZ \propto p$. $AD \propto x$. SV ou $SO \propto v$.

Maintenant a cause du triangle rectangle DVB, DP sera a PV, comme PV a PB ; c'estadire

$$x - a|h \parallel h|\frac{hh}{x-a} \propto PB$$

Mais àcause de la Parabole ayant mené SE ordonnée à l'axe, EX sera $\propto \dfrac{xx}{p}$, et SD ou $AE \propto d + \dfrac{xx}{p}\cdot$ Mais aussi acause de la tangente SF, XF sera égale à XE ; et SF étant parallele à OB, les deux triangles rectangles FES, ODB seront semblables. Cestpourquoy FE sera a ES, comme OD à DB, ce qui est en termes analytiques

$$2\,\frac{xx}{p}|x \parallel v + d + \frac{xx}{p}|x - a + \frac{hh}{x-a}$$

mais comme $2\,\dfrac{xx}{p}|x$ ainsi en réduisant $2x|p$; donc

$$2x|p \parallel v + d + \frac{xx}{p}|x - a + \frac{hh}{x-a}$$

d'où l'on tire l'équation suivante.

$$xx - 2xa + \frac{2xhh}{x-a} \propto pv + pd.$$

Mais acause que dans cette équation il y a deux quantitez inconnuës x et v, on fera sortir v ; car on trouve SV ou SO egale a la racine des trois quarrez PV, DP, SD, ce qui donne

$$SV \text{ ou } v \propto \sqrt{hh + xx - 2ax + aa + dd + \frac{2dxx}{p} + \frac{x^4}{pp}}$$

et par consequent le terme pv de l'equation precedente sera

$$\propto \sqrt{pphh + ppxx - 2ppax + ppaa + ppdd + 2dpxx + x^4}.$$

Et enfin ayant fait sortir le signe radical, l'équation se réduira dabbord a

$$pphh + ppxx - 2ppax + ppaa + 4pdxx \propto\; - 4ax^3$$

$$-\frac{4hhx^3}{x-a} + 4aaxx - \frac{8axxh^3}{x-a} + 4apdx +$$

$$\frac{4h^4xx}{xx - 2ax + aa} - \frac{4pdhhx}{x-a}$$

par où l'on connait qu'estant toute reduite et ordonnée, la quantité inconnue montera a cinq dimensions.

Suivent deux autres solutions du même problème, présentées également, le même jour, par le même La Hire. La seconde est encore géométrique, et de style assez analogue. Son étude reste à publier. Par contre, la dernière est d'ordre assez différent, et son auteur la qualifie de mécanique, ou en tout cas, dirions-nous, de plus « concrète ».

L'inclusion de ce problème et de ses différentes solutions, y compris naturellement celle de Descartes en tout premier lieu, nous permet de mieux comprendre le lien que ce dernier entretenait avec la géométrie : tant que faire se peut, les vieux réflexes apolloniens fournissent encore les meilleures solutions. Par contre, lors de véritables difficultés - comme dans le cas du Tertius Casus *- la grande artillerie de la toute nouvelle géométrie analytique, résolutions graphiques des équations au premier plan, montre toute sa puissance.*

Un moderne préférerait sans doute, aujourd'hui, tout traiter par coordonnées : ce faisant, qui fonctionnerait bien entendu fort bien, ce serait sans aucun doute trahir quelque peu l'esprit de leur inventeur. On a pu voir que la Hire, bien que nettement postérieur, n'était au fond pas si éloigné de ce point de vue qui faisait encore part belle aux anciennes traditions.

Bibliographie

SOURCES PRINCIPALES

[1] Apollonius, *Conics Books V to VII*, trad. Gerald James Toomer, 2 vol., Springer-Verlag (New York) 1990.
[2] Apollonius of Perga, *Conics*, trad. des trois premiers livres par Robert Casteby Taliaferro, St. John's College (Annapolis) 1939, Green Lion Press (Santa Fe) 1997.
[3] Apollonius of Perga, *Conics*, trad. du quatrième livre par Michael N. Fried, St. John's College (Annapolis) 1939, Green Lion Press (Santa Fe) 2002.
[4] Apollonius de Perge, *Les coniques d'Apollonius de Perge*, trad. par Paul Ver Eecke, Desclée De Brouwer (Bruges) 1923, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1959.
[5] Apollonius of Perga, *Treatise on conics sections, edited in modern notation*, librement trad. par Sir Thomas Little Heath, Cambridge University Press (Cambridge) 1896, Powell's Bookstore (Chicago) et Martino (Mansfield, Conn.) 2002.
[6] Archimède, *Archimedis opera non nulla a Federico Commandino Urbinate nuper in Latinum conversa et commentariis illustrata*, éd. et trad. Federico Commandino, Paul Manuce (Venise) 1558.
[7] Archimède, *Les œuvres complètes, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, 2 vol., trad. Paul Ver Eecke, Desclée De Brouwer (Bruges) 1921, Vaillant-Carmanne (Liège) et Librairie Albert Blanchard (Paris) 1960.
[8] Archimède, *Œuvres*, 4 vol., trad. Charles Mugler, Société d'Édition Les Belles Lettres (Paris) 1970-2003, 1971-2002, 1971-2002, 1972-2002.
[9] Archimède, *Œuvres d'Archimède*, trad. par François Peyrard, François Buisson (Paris) 1807.

[10] Archimède, *The works of Archimedes*, librement trad. par Sir Little Thomas Heath, Cambridge University Press (Cambridge) 1897, Dover (New York) 2002.

[11] Aristote, *Les seconds analytiques : Organon IV*, trad. Jules Tricot, Bibliothèque des textes philosophiques, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1947, 1966, 1970, 1987, 1995, 2000.

[12] Aristote, *Physique*, trad. Henri Carteron, Société d'Édition Les Belles Lettres (Paris) 1961.

[13] Aristote, *Seconds analytiques*, trad. Pierre Pellegrin, GF Flammarion (Paris) 2005.

[14] Bernoulli Jacob, in *Acta Eruditorum*, pp. 282-3, Joh. Grossiichæredes & Frid. Groschur (Leipzig) 1691, puis 1692 et 1693, *Opera I* pp. 442-3, 491, 554 (Genevæ) 1744.

[15] Cardano Girolamo, *Ars magna or the rules of algebra*, trad. T. Richard Witmer, MIT Press (Cambridge) 1968, Dover (New York) 1993.

[16] Clavius Christoph, *Euclidis Elementis, Algebra, In disciplinis mathematicis prolegomena* in *Opera mathematica*, Eltz (Mayence) 1611-1612.

[17] Couturat Louis, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Collection historique des grands philosophes, Félix Alcan (Paris) 1903, Scientia Verlag (Aalen) 1959, Georg Olms Verlag (Hildesheim) 1966, University of Michigan (Ann Harbor) 2006.

[18] De Witt Jan, *Elementa curvarum linearum liber primus*, trad. Albertus Wilhelmus Grootendorst, *Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences* [36], Springer-Verlag (Berlin et New York) 2000.

[19] De Witt Jan, *Elementa curvarum linearum liber secundus*, trad. Albertus Wilhelmus Grootendorst et *al.*, *Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences* [xx], Springer-Verlag (Berlin et New York) en préparation.

[20] Descartes René, *Cartesio Opere 1637-1649*, éd. Giulia Belgioioso et *al.*, Il pensiero occidentale, Bompiani (Milan) 2009.

[21] Descartes René, *Correspondance de Descartes*, 8 vol., éd. et trad. Charles Adam et Gérard Milhaud, Félix Alcan (Paris) 1936-1947.

[22] Descartes René, *Discours de la Méthode*, éd. Étienne Gilson, Bibliothèque des textes philosophiques, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1925, 1947, 2002.

[23] Descartes René, *Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie*, éd. Jean-Robert Armogathe et Vincent Carraud,

Fayard (Paris) 1986.
[24] DESCARTES René, *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, & chercher la vérité dans les sciences. Plus la dioptrique, les météores et la géométrie*, Ian Maire (Leyde) 1637, Conte (Lecce) 1987.
[25] DESCARTES René, *Discours de la Méthode suivi de La Dioptrique*, éd. Frédéric de Buzon, collection Folio/Essais, Librairie Gallimard (Paris) 1991.
[26] DESCARTES René, *Écrit posthume de Descartes De solidorum elementis*, éd. et trad. par Ernest Jean Philippe de Fauque de Jonquières, Firmin-Didot (Paris) 1890.
[27] DESCARTES René, *Epistolæ, Partim ab Auctore Latino Sermone conscriptæ, partim ex Gallico translatæ*, 2 vol., Elzevier (Amsterdam) 1668, Blaeu (Amsterdam) 1682.
[28] DESCARTES René, Exercices pour les éléments des solides : Essai en complément d'Euclide, Progymnasmata de solidorum elementis, trad. et notes de Pierre Costabel, Collection Épiméthée, Presses Universitaires de France (Paris) 1987.
[29] DESCARTES René, *Geometria Renato Des Cartes anno 1637 gallicè edita*, 1 vol., éd. Frans von Schooten, Ian Maire (Leyde) 1649, 2 vol., Elzevier (Amsterdam) 1659-1661, 1 vol.(le second), Johannes Blaeu (Amsterdam) 1683, 2 vol., Francofurti ad Moenum (Francfort) 1695 puis 1697 par inclusion dans les *Opera Philosophica*.
[30] DESCARTES René, *La geometria*, trad. Josep Pla i Carrera et Pelegri Viader i Canals, Institut d'Estudis Catalans (Barcelone) 1999.
[31] DESCARTES René, *La Géométrie*, Charles Angot (Paris) 1664.
[32] DESCARTES René, *La Géométrie*, Éditions de l'AREFPPI (Nantes) 1984.
[33] DESCARTES René, *La Géométrie*, éd. Célestin de Blignières, Hermann (Paris) 1886, Jacques Gabay (Paris) 1991.
[34] DESCARTES René, *La Géométrie de M. Descartes divisée en trois livres*, Christophe David ou Veuve Barbin (Paris) 1705, Kessinger Publishing's Legacy Reprints (La Vergne TN) 2009.
[35] DESCARTES René, *Lettres de Mr Descartes*, 3 vol., éd. Claude Clerselier, Charles Angot (Paris) 1664 et 1667, 1666, 1667.
[36] DESCARTES René, *Lettres de Mr Descartes*, 3 vol., éd. Claude Clerselier, Jean-Robert Armogathe et Giulia Belgioioso, Conte (Lecce) 2005.
[37] DESCARTES René, *Œuvres complètes*, 7 vol.,éd. Jean-Marie Beyssade et Denis Kambouchner, Collection Tel, Gallimard (Paris) 2009 pour le vol. III (*La Géométrie, Propositio demonstrata* et les *Excerpta Mathematica*),

2010 pour le vol. I (*Progymnasmata de Solidorum Elementis* et *Cogitationes Privatæ*).
[38] Descartes René, *Œuvres complètes*, 2 vol., éd. Jean-Marie Beyssade et Denis Kambouchner, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard (Paris) en préparation.
[39] Descartes René, *Œuvres de Descartes*, 11 vol., éd. Victor Cousin, F.G. Levrault (Paris) 1824-1826. *La Géométrie* se trouve dans le vol. 5, pp. 313-426, 1824.
[40] Descartes René, *Œuvres de Descartes*, 12 vol., éd. Charles Adam et Paul Tannery, Leopold Cerf (Paris) 1897-1913, 11 vol., Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1964-1974, 1982, en petit format 1996. Le vol. VI, qui contient le *Discours* et ses *Essais* date de 1902.
[41] Descartes René, *Œuvres inédites*, 2 vol., éd. Foucher de Careil, Ladrange (Paris) 1859-1860.
[42] Descartes René, *Opere postume 1650-2009*, éd. Giulia Belgioioso et *al.*, Il pensiero occidentale, Bompiani (Milan) 2009.
[43] Descartes René, *Opere scientifiche*, 2 vol., trad. Ettore Lojacono, Unione tipographico-editrice torinese (Turin) 1983.
[44] Descartes René, *R. Des-Cartes opuscula posthuma, physica et mathematica*, Blaeu (Amsterdam) 1701.
[45] Descartes René, *Regulæ ad directionem ingenii*, éd. bilingue par Georges Le Roy, Bibliothèque de philosophie, Boivin et C*ie*, Éditeurs (Paris) 1933.
[46] Descartes René, *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. Abbé Jean Sirven, Bibliothèque des textes philosophiques, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1932, 1945, 1951, 1966, 1969, 1970, 1994, 1996, 2000, 2003.
[47] Descartes René, *Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit en la recherche de la vérité*, trad. et éd. Jean-Luc Marion et Pierre Costabel, Martinus Nijhoff (La Haye) 1977.
[48] Descartes René, *René Descartes Tutte le lettere 1619-1650*, éd. et trad. Giulia Belgioioso et Jean-Robert Armogathe, Il pensiero occidentale, Bompiani (Milan) 2005.
[49] Descartes René, *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*, trad. et éd. David Eugen Smith et Marcia L. Latham, The Open Court Publishing Company (La Salle IL) 1925, Dover (New York) 1954, sans cesse réédité.
[50] Diophante d'Alexandrie, *Les arithmétiques, 2 vol. livres IV et V-VI-VII*, trad. et éd. Roshdi Rashed, Société d'Édition Les Belles Lettres (Pa-

ris) 1984.
[51] Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, trad. Paul Ver Eecke, Desclée De Brouwer (Bruges) 1927, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1959.
[52] Diophantus of Alexandria, *A study in the history of greek algebra*, ed. et trad. par Sir Thomas Little Heath Cambridge University Press (Cambridge) 1885, seconde édition avec des compléments sur Fermat et Euler 1910, Powell's Bookstore (Chicago) and Martino Publishing (Mansfield, Conn) 2003.
[53] Euclide, *Les éléments*, 2 vol., trad. et éd. par Georges J. Kayas, Éditions du CNRS (Paris), 1978.
[54] Euclide, *Les éléments*, 4 vol., trad. et éd. par Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France (Paris), 1990, 1994, 1998 et 2001.
[55] Euclide, *Les œuvres d'Euclide*, trad. et éd. par François Peyrard, F. Louis 1819, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1966.
[56] Euclide, *Les Trois Livres de Porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncéz de ces propositions*, éd. Michel Chasles, Mallet-Bachelier (Paris) 1860, Gabay (Sceaux) 2007.
[57] Euclide, *The thirteen books of the elements*, 3 vol., trad. et éd. par Thomas Little Heath, Cambridge University Press (Cambridge) 1909, 1925, Dover (New York) 1956.
[58] Fermat Pierre de, *Œuvres complètes*, 5 vol., éd. par Paul Tannery et Charles Henry, Gauthier-Villars et Fils (Paris) 1891-1912.
[59] Fermat Pierre de, *Varia opera mathematica*, éd. par Samuel de Fermat, Joannem Pech (Toulouse) 1679, Kessinger Publishing's Legacy Reprints (La Vergne TN) 2009.
[60] Galilei Galileo, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, trad. René Fréreux, Seuil (Paris) 1992, 2000.
[61] Galilei Galileo, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, trad. Maurice Clavelin, Armand Colin (Paris) 1970, Presses Universitaires de France (Paris), 1995.
[62] Galilei Galileo, *Operations of the geometric and military compass*, trad. Stillman Drake, Smithsonian Institution Press (Washington) 1978.
[63] Hospital Guillaume, Marquis de l', *Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie Royale (Paris) 1696, ACL-éditions (Paris) 1988.

[64] Huygens Christiaan, *Œuvres complètes*, 22 volumes, Martinus Nijhoff (La Haye) 1888-1950.

[65] Kepler Johann, *Optics : Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*, trad. et notes par William H. Donahue, Green Lion Press (Santa Fe) 2000.

[66] Kepler Johann, *Les fondements de l'Optique Moderne : Paralipomènes à Vitellion*, chapitres I-V, trad. et notes par Catherine Chevalley, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1980.

[67] Keplero Ioanne, *At Vitellionem Paralipomena, Quibus astronomiæ pars optica traditur*, Claudium Marnium & Hæredes Ioannis Aubrii (Francfort) 1604.

[68] Keplero Ioanne, *Prodomo dissertationum cosmographicarum, contiens* mysterium cosmographicum *de admirabili proportione orbium cœlestium...*, Georges Gruppenbach (Tübingen) 1596, Erasmus Kempfer (Francfort) 1621, éd. et trad. par Alain Philippe Segonds (*Les secrets du monde*), Société d'Édition Les Belles Lettres (Paris) 1984, Collection Tel, Gallimard (Paris) 1993.

[69] Keppleri Ioannis, *Harmonices Mundi Libri V*, Ioannes Plancus (Linz) 1619, trad. Jean Peyroux (*L'harmonie du Monde*), Librairie Albert Blanchard (Paris) 1979.

[70] Leibniz Gottfried Wilhelm, *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, éd. Carl Immanuel Gerhardt, 7 vol. Weidmannsche Verlagsbuchhandlung (Berlin-Halle) 1875-1890, Georg Olms Verlag (Hildesheim) 1978.

[71] Leibniz Gottfried Wilhelm, *La caractéristique géométrique*, éd. Javier Echeverría, trad. Marc Parmentier, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1995.

[72] Leibniz Gottfried Wilhelm, *La réforme de la dynamique*, trad. et éd. par Michel Fichant, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1994.

[73] Leibniz Gottfried Wilhelm, *Naissance du calcul différentiel*, trad. Marc Parmentier, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1989.

[74] Leibniz Gottfried Wilhelm, voir *Louis Couturat, Opuscules et fragments inédits de Leibniz.*

[75] Mersenne Marin, *Harmonicorum Libri*, Guillaume Baudry (Paris) 1635.

[76] Mersenne Marin, *Harmonie Universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique*, 3 vol., Sébastien Cramoisy (Paris) 1636, 1 vol. *Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue française* Fayard (Paris) 2003.

[77] Mersenne Marin, *Universæ Geometriæ mixtæque mathematicæ synopsis*, Bertier (Paris) 1644.

[78] Newton Isaac, *Arithmetica universalis*, (Cambridge) 1707.

[79] Newton Isaac, *Arithmétique universelle*, 2 vol., trad. Noel Baudeux, Bernard (Paris) 1802, Jacques Gabay (Sceaux) 2008.

[80] Newton Isaac, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, trad. Georges Buffon, Debure (Paris) 1740, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1994.

[81] Newton Isaac, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Streater (Londres) 1987.

[82] Newton Isaac, *Principia (Principes mathématiques de la philosophie naturelle)*, trad. par Émilie Marquise du Châtelet, Librairie Albert Blanchard (Paris), 1966, Jacques Gabay (Sceaux) 1990, Dunod (Paris) 2005, 2006.

[83] Newton Isaac, *The Mathematical Papers*, 8 vol., éd. par Derek Thomas Whiteside, Cambridge University Press (Cambridge), 1967-1981, 2008.

[84] Œuvres de Pierre Fermat, *I La théorie des nombres*, trad. Paul Tannery, éd. Roshdi Rashed et *al.*, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1999.

[85] Pacioli Luca, *Divine Proportion*, Librairie du Compagnonnage (Paris) 1980.

[86] Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*, trad. et éd. Paul Ver Eecke, Desclée De Brouwer (Bruges) 1933, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1982.

[87] Pappus d'Alexandrie, *Pappi Alexandrini Mathematicæ collectiones a Federico Commandino urbinate in Latinum conversæ et illustratæ*, éd. et trad. Federico Commandino, H. Concordiam (Pesaro) 1588 et 1602, Franciscum de Franciscis Senensem (Venise) 1589, HH. de Duccijs (Bologne) 1660.

[88] Pascal Blaise, *Œuvres complètes*, éd. Jacques Chevalier, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard (Paris) 1954.

[89] Pascal Blaise, *Œuvres complètes*, éd. Jean Mesnard, 4 vol. parus, Desclée de Brouwer (Paris) 1992.

[90] Pascal Blaise, *Œuvres complètes*, éd. Michel Le Guern, 2 vol., Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard (Paris) 1998.

[91] Platon, *Théétète*, éd. et trad. Michel Narcy, GF Flammarion (Paris) 1994, 1995.

[92] Platon, *Timée*, in Œuvres complètes, vol. X, Collection (dite Budé) des universités de France, série grecque, trad. Albert Rivaud, Société d'Éditions Les Belles Lettres (Paris) 1925, 1963, 1985, 2002.

[93] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, éd. et trad. Glenn Raymond Morrow, Princeton University Press (Princeton) 1970, 1992.
[94] Proclus Diadochus, *In primum Euclidis Elementarum Libris commentarii* (texte grec), éd. Godofredi Friedlein, Bibliotheca Teubneriana, B.G. Teubner (Leipzig) 1873, Georg Olms Verlag (Hildesheim) 1967.
[95] Proclus de Lycie, *Les Commentaires sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*, trad. paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer (Bruges) 1948, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1959.
[96] Riemann Georg Friederich Bernhard, *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*, in *Œuvres mathématiques*, trad. L. Laugel, Gauthier-Villars (Paris) 1898, Jacques Gabay (Sceaux) 1990.
[97] Roberval Gilles Personne de, *Principaux écrits de mathématiques*, éd Jean Peyroux, Librairie Albert Blanchard (Paris) 2003.
[98] Viète François, *Canon mathematicus*, Pierre Mettayer (Paris) 1571-1579.
[99] Viète François, *The analytic art*, trad. et éd. T. Richard Witmer, Kent State University Press (Kent Ohio) 1983, Dover (New York) 2007.
[100] Viète François, *Œuvres mathématiques*, 2 vol., trad. Jean Peyroux, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1991-1992.
[101] Viète François, voir *Vaulézard Jean-Louis, La nouvelle algèbre de M. Viète.*

LITTÉRATURE COMPLÉMENTAIRE

[102] Abbena Elsa, voir *Alfred Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.*
[103] Actes du colloque universitaire de La Flèche, *La formation de Descartes*, Prytanée national militaire (La Flèche) 1997.
[104] Aczel Amir, *Descarte's Secret Notebook : A True Tale of Mathematics, Mysticism, and the Quest of Understand the Universe*, Broadway Books (New York) 2005, 2006, *Le carnet secret de Descartes : une histoire véridique où il est question de mathématiques et de la quête de la vérité ultime sur l'Univers*, trad. Philippe Babo, JC Lattès (Paris) 2007.
[105] Adam Charles, voir *René Descartes, Œuvres de Descartes.*
[106] Adam Charles, voir *René Descartes, Correspondance de Descartes.*

[107] ALLARD Jean-Louis, *Le mathématisme de Descartes*, Presses de l'University d'Ottawa (Otawa) 1963 [prix Champlain de 1996].

[108] ALQUIÉ Ferdinand, *Science et métaphysique chez Descartes*, Centre de Documentation Universitaire : Les Cours de la Sorbonne (Paris) 1955, La Table Ronde [Leçons sur Descartes] (Paris) 2005.

[109] AMATO Nancy M., GOODRICH Michael T., RAMOS Edgar, *Linear-Time Triangulation of a Simple Polygon Made Easier Via Randomization*, Discrete and Computational Geometry, vol. 26, pp. 245-265, Springer-Verlag (New York) 2001.

[110] ARMOGATHE Jean-Robert et CARRAUD Vincent, *Bibliographie cartésienne (1960-1996)*, Conte (Lecce) 2003.

[111] ARMOGATHE Jean-Robert, voir *René Descartes, Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie.*

[112] ARMOGATHE Jean-Robert et MARION Jean-Luc, *Index des Regulæ ad directionem ingenii de René Descartes*, Ateneo (Rome) 1972.

[113] ARMOGATHE Jean-Robert, *René Descartes, Exercices pour les éléments des solides : Essai en complément d'Euclide, Progymnasmata de solidorum elementis* in *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, vol. 43 2/3, Presses Universitaires de France (Paris) 1990.

[114] ARMOGATHE Jean-Robert, voir *La biografia intellettuale di René Descartes attraverso la Correspondance.*

[115] ARMOGATHE Jean-Robert, voir *René Descartes, Lettres de Mr Descartes.*

[116] ARMOGATHE Jean-Robert, voir *René Descartes, René Descartes Tutte le lettere (1619-1650).*

[117] ARMOGATHE Jean-Robert, voir *Vaulézard, La nouvelle algèbre de M. Viète.*

[118] AUGER Léon, *Gilles Personne de Roberval*, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1962.

[119] BARRON Margaret E., *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press (Oxford) 1969, Dover (New York) 1987.

[120] BAUDEUX Noël, voir *Isaac Newton, Arithmétique universelle.*

[121] BAUDOIN Paul, *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert (Paris) 1938.

[122] BELACHEFF Nicolas, voir *Imre Lakatos, Proofs and Refutations.*

[123] BELAVAL Yves, *Leibniz critique de Descartes*, Bibliothèque des idées, Gallimard (Paris) 1960, 1970, Collection Tel, Gallimard (Paris) 1978, 2003.

[124] Belgioioso Giulia, voir *Enrico Giusti, Numeri, grandezze e Géométrie.*

[125] Belgioioso Giulia, voir *La biografia intellettuale di René Descartes attraverso la Correspondance.*

[126] Belgioioso Giulia, voir *René Descartes, Cartesio Opere 1637-1649.*

[127] Belgioioso Giulia, voir *René Descartes, Lettres de Mr Descartes.*

[128] Belgioioso Giulia, voir *René Descartes, Opere Postume 1650-2009.*

[129] Belgioioso Giulia, voir *René Descartes, René Descartes Tutte le lettere (1619-1650).*

[130] Beyssade Jean-Marie, *Études sur Descartes : l'histoire d'un esprit*, collections Points, Éditions du Seuil (Paris) 2001.

[131] Beyssade Jean-Marie, voir *René Descartes, Œuvres complètes.*

[132] Biard Joël, voir *Descartes et le Moyen Âge.*

[133] Bix Robert, *Conics and Cubics : a concrete introduction to algebraic curves*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (New York) 1998.

[134] Bkouche Rudolf, voir *Mathématiques au fil des âges.*

[135] Blay Michel, *Les figures de l'arc-en-ciel*, Éditions Carré (Paris) 1995, Éditions Belin (Paris) 2005.

[136] Blignières Célestin de, voir *René Descartes, La Géométrie.*

[137] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory : the « Construction of Equation », 1637-ca. 1750*, pp. 331-380 in *Archives of History of Exact Sciences*, vol.30 3/4, Springer-Verlag (Berlin) 1984.

[138] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *Descartes, Pappus problem and the Cartesian Parabola*, pp. 71-96 in *The investigation of difficult things*, Cambridge University Press (Cambridge) 1992.

[139] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *Redefining geometrical exactness*, Springer-Verlag (New York) 2001.

[140] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *La structure de la Géométrie de Descartes* pp. 291-318 in *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, trad. Anne Michel-Pajus, vol. 51 2/3, Presses Universitaires de France (Paris) 1998.

[141] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *On the interpretation of exactness*, pp. 23-44 in *Philosophy of mathematics : Proceedings of the 15th International Wittgenstein-Symposium, 16th to 23d August 1992, Kirchberg am Wechsel (Austria)*, éd. Johannes Czermak, Hölder-Pichler-Tempsky (Vienne) 1993.

[142] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *On the representation of curves in Descartes'Géométrie*, pp. 295-338 in *Archive for history of exact sciences*, vol. 24 4, Springer-Verlag (Berlin) 1981.

[143] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *The concept of Construction and the Representation of Curves in Seventeen-thCentury Mathematics*, pp. 1629-1641 in *Procedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986*, éd A. Gleason, American Mathematical Society (Providence) 1987.

[144] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *The Structure of Descartes's Géométrie* pp. 349-69 in *Actes du Convegno per il 350^e anniversario della publicazione del Discours de la Méthode e degli Essais* tenu à Lecce en 1987, éd. Guilia Belgioioso et *al.*, Armando Paoletti (Florence) 1990.

[145] Bos Hendrik Jan Maarten dit Henk, *Tradition and modernity in early modern mathematics — Viète, Descartes and Fermat* in *LEurope mathématique : histoire, mythes, identités*, éd. Catherine Goldstein et *al.*, Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme (Paris) 1996.

[146] Bourgeois Bernard, voir *Souleymane Bachir Diagne, Esprit cartésien et mathématique de l'esprit.*

[147] Boutroux Pierre, *L'idéal scientifique des mathématiciens : dans l'Antiquité et dans les temps modernes*, Félix Alcan (Paris) 1920, Jacques Gabay (Paris) 1992.

[148] Boutroux Pierre, *L'imagination et les mathématiques selon Descartes*, Félix Alcan (Paris) 1900, Vigdor (Paris) 1999.

[149] Boutroux Pierre, voir *Revue de Métaphysique et de Morale.*

[150] Boyer Carl Benjamin, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons (New York) 1968.

[151] Boyer Carl Benjamin, *History of Analytical Geometry*, Scripta Mathematica (New York) 1956, Dover (New York) 2005.

[152] Boyer Carl Benjamin, *The Rainbow*, Sagamore Press (New York) 1959, Princeton University Press (Princeton) 1987.

[153] Bruce J.William et Giblin Peter J., *Curves and singularities*, Cambridge University Press (Cambridge) 1984.

[154] Brunschvicg Léon, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Félix Alcan (Paris) 1912, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1972, 1981.

[155] Buffon Georges-Louis Leclerc Comte de, voir *Newton Isaac, La méthode des fluxions et des suites infinies.*

[156] Buzon Frédéric de et Kambouchner Denis, *Le vocabulaire de Descartes*, Ellipses (Paris) 2002.

[157] Buzon Frédéric de, voir *René Descartes, Discours de la Méthode suivi de La Dioptrique.*

[158] Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, *La méthode de Fermat : son statut et sa diffusion*, Giovani Cleonice Cifoletti, vol. 33, Belin (Paris) 1991.

[159] Cajori Florian *A history of mathematical notations*, 2 vol., The Open Court Publishing Company (La Salle IL) 1928-9, 1 vol., Dover (New York) 1993.

[160] Carraud Vincent, voir *Armogathe Jean-Robert et Carraud Vincent, Bibliographie cartésienne (1960-1996).*

[161] Carraud Vincent, voir *René Descartes, Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie.*

[162] Carteron Henri, voir *Aristote, Physique.*

[163] Caveing Maurice, *La figure et le nombre : recherches sur les premières mathématiques des Grecs*, Histoire des Sciences, Presses Universitaires du Septentrion (Villeneuve d'Ascq) 1997.

[164] Centre international de synthèse, *L'œuvre scientifique de Pascal*, Presses Universitaires de France (Paris) 1964.

[165] Charrak André, voir *Vincent Jullien et André Charrak, Ce que dit Descartes touchant la chute des graves.*

[166] Chasles Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement celles qui se rapportent à la géométrie moderne*, Hayez (Bruxelles) 1837.

[167] Chasles Michel, *Traité de Géométrie Supérieure*, Bachelier (Paris) 1852, Gauthier-Villars (Paris) 1880, Jacques Gabay (Sceaux) 2007.

[168] Châtelet Émilie, Marquise du, voir *Isaac Newton, Principia (Principes mathématiques de la philosophie naturelle).*

[169] Chevalier Jacques, voir *Blaise Pascal, Œuvres complètes.*

[170] Chevalley Catherine, voir *Johann Kepler, Paralipomènes à Vitellion.*

[171] Cifoletti Giovani Cleonice, voir *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences.*

[172] Clavelin Maurice, voir Galileo Galilei, Discours concernant deux sciences nouvelles.

[173] Clerselier Claude, voir *René Descartes, Lettres de Mr Descartes.*

[174] Cohen Hermann, *Le principe de la méthode infinitésimale et son histoire*, trad. Marc de Launay, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1999.

[175] Commandino Federico, voir *Archimède, Archimedis opera non nulla.*

[176] Commandino Federico, voir *Pappus, Pappi Alexandrini Mathematicæ collectiones.*
[177] Costabel Pierre, *Démarches originales de Descartes savant*, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1982.
[178] Costabel Pierre, *Les Essais de la Méthode et la réforme mathématique*, in *Le Discours et sa méthode*, éd. Nicolas Grimaldi et Jean-Luc Marion, Presses Universitaires de France (Paris) 1987.
[179] Costabel Pierre, in *René Descartes, Exercices pour les éléments des solides : Essai en complément d'Euclide, Progymnasmata de solidorum elementis.*
[180] Costabel Pierre, voir *René Descartes, Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit en la recherche de la vérité.*
[181] Couturat Louis, *Logique de Leibniz, d'après des documents inédits*, Collection historique des grands philosophes, Félix Alcan (Paris) 1901, Georg Olms Verlag (Hildesheim) 1969, 1985, 1998.
[182] Coxeter Harold Scott MacDonald, *Regular Polytopes*, Methuen (Londres) 1948, Pitman (New York) 1949, Macmillan Publishers (Londres) 1963, Dover (New York) 1973.
[183] Cromwell Peter R., *Polyhedra*, Cambridge University Press (Cambridge) 1997, 1999.
[184] Dahan-Dalmedico Amy, voir *Mathématiques au fil des âges.*
[185] Daniel Père Gabriel, *Voyage du monde de Descartes*, Le Monde (Paris) 1690, éd. augmentée Nicolas Pepie (Paris) 1702, 2 vol. Pierre Gosse (La Haye) 1734.
[186] Decorps-Foulquier Micheline, *Recherches sur les Coniques d'Apollonios de Pergé*, Klincksieck (Paris) 2000.
[187] Decorps-Foulquier Micheline, voir *Introduction générale, édition, traduction et commentaire du texte arabe du livre I d'Apollonius de Perge, édition et traduction du text grec.*
[188] DesCartes et DesLettres, *Epistolari e filosofia in Descartes e nei cartesiani*, éd. Francesco Marrone, Le Monnier (Florence) 2008.
[189] Descartes et le Moyen Âge, *Études de philosophie médiévale*, éd. Joël Biard et Roshdi Rashed, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1997.
[190] Descotes Dominique, voir *Michel Serfati, Mathématiciens français du XVII*e *siècle Descartes, Fermat, Pascal.*
[191] Diagne Souleymane Bachir, *Esprit cartésien et mathématique de l'esprit*, pp. 23-33 in *L'esprit cartésien, Quatrième centenaire de la naissance*

de Descartes, Actes du XXVI^e Congrès de l'Association des Sociétés de Philosophie de Langue Française, éd. Bernard Bourgeois et Jacques Havet, Bibliothèque d'histoire de la Philosophie, Librairie Philosophique Joseph Vrin (Paris) 2000.

[192] Dhombres Jean, Dahan-Dalmedico Amy, Bkouche Rudolf, Houzel Christian et Guillemot Michel, *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars (Paris) 1987.

[193] Donahue William H., voir *Johann Kepler, Optics.*

[194] Dugas René, *De Descartes à Newton par l'école anglaise*, Conférences du Palais de la Découverte (Paris) 1953.

[195] Dumoncel Jean-Claude, *La tradition de la* Mathesis universalis *: Platon, Leibniz, Russell*, Cahiers de l'Unebévue, L'Unebévue-éditeur (Pars) 2002.

[196] Dunham William, *Euler, the master of us all*, Collection Dolciani, Mathematical Association of America (Washington) 1999.

[197] Echeverría Javier, voir *Gottfried Wilhelm Leibniz, La caractéristique géométrique.*

[198] Edwards Charles Henry Junior, *The historical developpement of the calculus*, Springer-Verlag (New York) 1979, 1982.

[199] Études sur Descartes, *Troisième centenaire du* « Discours de la Méthode », Librairie Armand Colin (Paris) 1937.

[200] Farin Gerald, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design : A Practical Guide*, coll. Computer Science and Scientific Computing, Academic Press Inc. (San Diego) 1988, 1990, 1994, 1996, coll. Series in Computer Graphics, Morgan-Kaufmann (San Francisco) 2001, trad. française *Courbes et Surfaces pour la CGAO*, Masson (Paris) 1992.

[201] Federico Pasquale Joseph, *Descartes on polyhedra : a study of the De solidorum elementis*, coll. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer-Verlag (New York) 1982.

[202] Federspiel Michel, voir *Introduction générale, édition, traduction et commentaire du texte arabe du livre I d'Apollonius de Perge, édition et traduction du texte grec.*

[203] Félix Lucienne, voir *Henri Lebesgue, Leçons sur les constructions géométriques.*

[204] Félix Lucienne, voir *henri Lebesgue, Notices d'Histoire des Mathématiques.*

[205] Fichant Michel, *Science et Métaphysique dans Descartes et Leibniz*, coll. Épiméthée, Presses Universitaires de France (Paris) 1998.

[206] FICHANT Michel, voir *Gottfried Wilhelm Leibniz, La réforme de la dynamique.*
[207] FISCHER Gerd, *Ebene algebraische Kurven*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH (Wiesbaden) 1994.
[208] FISCHER Gerd, *Plane Algebric Curves*, American Mathematical Society (Providence) 2001, trad. Leslie Kay de l'entrée précédente.
[209] FOUCHER DE CAREIL, voir *René Descartes, Œuvres indédites.*
[210] FRÉREUX René, voir *Galileo Galilei, Dialogue sur les deux grands systèmes du monde.*
[211] FRÉZIER François Amédée, *Traité de Stereotomie*, 3 vol., Encre (Paris) 1754.
[212] FRIED Michael N. et UNGURU Sabetai, *Apollonius of Perga's Conica : text, context, subtext*, The Netherlands Brill Academic Publishers (Leiden) 2001.
[213] FRIED Michael N., voir *Apollonius Conics, book IV.*
[214] FRIEDLEIN Godofredi, voir *Diadochus Proclus, In primum Euclidis Elementarum Libris commentarii.*
[215] GAGNEUX Bruno, voir *Mathématiciens français du XVII^{e} siècle, Descartes, Fermat, Pascal.*
[216] GALUZZI Massimo et ROVELLI Daniela, *Nouveauté et modernité dans les mathématiques de Descartes*, Rubbettino (Soveria Mannelli), 2008.
[217] GALUZZI Massimo, voir *Garibaldi, Sulle Ovali di Descartes.*
[218] GARIBALDI Antonio Carlo, *Sulle Ovali di Descartes*, in *Conference on the history of mathematics : Cetraro 8-12 Settembre 1988*, ed. Massimo Galuzzi, Editoria Elettronica (Commenda di Rende), 1991.
[219] GARDIES Jean-Louis, *Du mode d'existence des objets de la mathématique*, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 2004.
[220] GAUKROGER Stephen, *Descartes : an intellectual biography*, Oxford University Press (Oxford) 1995, 2002.
[221] GIBLIN Peter J., *voir J. William Bruce, Curves and singularities.*
[222] GILSON Étienne, voir *Descartes, Discours de la Méthode.*
[223] GIUSTI Enrico, *La révolution cartésienne en géométrie* in *Descartes et son œuvre aujourd'hui*, pp. 47-62, Mardaga (Wavre) 1998.
[224] GIUSTI Enrico, *Numeri, grandezze e Géométrie* in *Descartes, il metodo e i saggi* [Atti del convegno per il 350^{o} anniversario della pubblicazione del Discours de la méthode e degli Essais (Lecce 1987)], éd. Giulia Belgioioso et *al.*, vol. 2, pp. 419-39, vol. 18** Instituto della enciclopedia italiana (Rome) 1990.

[225] GOMES TEIXEIRA Francisco, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Impressa da universidade (Coïmbre), 3 vol., 1908-09-15, Chelsea Publishing Company (New York) 1971, Jacques Gabay (Sceaux) 1995, 2003.

[226] GOMES TEIXEIRA Francisco, *Tratado de las curvas especiales notables, tanto planos cama torsas*, tome XXII des Mémoires de l'Académie des Sciences de Madrid, Gaceta de Madrid (Madrid) 1905, Bibliofil (Charleston SC) 2009 [en espagnol ; édition princeps d'une partie de la référence précédente].

[227] GOODRICH Michael T., voir *Linear-Time Triangulation of a Simple Polygon Made Easier Via Randomization.*

[228] GRAY Alfred, ABBENA Elsa et SALAMON Simon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman and Hall/CRC Press (Boca Raton FL) 1993, 1997, 2006.

[229] GREAT MATHEMATICAL WORKS, voir *Ivor Thomas, Greek mathematical works.*

[230] GRIMALDI Nicolas, voir *Jean-Luc Marion, Descartes et les mathématiques au collège.*

[231] GRIMALDI Nicolas, voir *Pierre Costabel, Les Essais de la Méthode et la réforme mathématique.*

[232] GROOTENDORST Albertus Wilhelmus, voir *Jan De Witt, Elementa curvarum linearum liber primus.*

[233] GUILLEMOT Michel, voir *Mathématiques au fil des âges.*

[234] HAIRER Ernst et WANNER Gerhard, *Analysis by its history*, Springer-Verlag (New York) 1995.

[235] HAVET Jacques, voir *Souleymane Bachir Diagne, Esprit cartésien et mathématique de l'esprit.*

[236] HAWKING Stephen, *God created the Integers*, Running Press Publishers (Philadelphie) 2005, trad. *Et Dieu créa les nombres*, Dunod (Paris) 2006.

[237] HEATH Sir Thomas Little, *A history of greek mathematics*, 2 vol., Clarendon Press (Oxford) 1921, Dover (New York) 1981.

[238] HEATH Sir Thomas Little, *The works of Archimedes*, Cambridge University Press (Cambridge) 1897-1912, Dover (New York) 1953.

[239] HEATH Sir Thomas Little, voir *Apollonius of Perga, Treatise on conics sections, edited in modern notation.*

[240] HEATH Sir Thomas Little, voir *Diophantus of Alexandria, a study in the history of greek algebra.*

[241] HEATH Sir Thomas Little, voir *Euclide, The thirteen books of the elements.*

[242] HENRY Charles, voir *Pierre de Fermat, Œuvres complètes.*

[243] HILBERT David, *Les fondements de la géométrie*, trad. Paul Rossier, Dunod (Paris) 1971.

[244] DÉZARNAUD-DANDINE Christine et SEVIN Alain, *Histoire des polyèdres : quand la nature est géomètre*, Vuibert (Paris) 2009.

[245] HISTOIRE DU CALCUL DE LA GÉOMÉTRIE À L'ALGÈBRE, éd. Luc Sinègre, Vuibert (Paris) 2009.

[246] HOUZEL Christian, voir *Mathématiques au fil des âges.*

[247] INTRODUCTION GÉNÉRALE, ÉDITION, TRADUCTION ET COMMENTAIRE DU TEXTE ARABE DU LIVRE I D'APOLLONIUS DE PERGE, ÉDITION ET TRADUCTION DU TEXT GREC, éd. et trad. de Michel Federspiel, Micheline Decorps-Foulquier et Roshdi Rashed, Walter de Gruyter (Berlin et New York) 2008.

[248] ITARD Jean, *Essais d'histoire des mathématiques*, éd. Roshdi Rashed, Librairie Albert Blanchard (Paris) 1984.

[249] ITARD Jean, *La Géométrie de Descartes*, Les Conférences du Palais de la Découverte (n°39), Imprimerie Poulet-Malassis (Alençon) 1956 (repris dans l'item précédent).

[250] ITARD Jean, *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Hermann (Paris) 1961.

[251] JONQUIÈRES Ernest Jean Philippe de Fauque de, voir *René Descartes, Écrit posthume de Descartes De solidorum elementis.*

[252] JULLIEN Vincent, *Descartes : La Géométrie de 1637*, Presses Universitaires de France (Paris) 1996.

[253] JULLIEN Vincent et CHARRAK André, *Ce que dit Descartes touchant la chute des graves*, Presses Universitaires du Septentrion (Villeneuve d'Ascq) 2002.

[254] KAMBOUCHNER Denis, voir *René Descartes, Œuvres complètes.*

[255] KAMBOUCHNER Denis, voir *Frédéric de Buzon et Denis Kambouchner, Le vocabulaire de Descartes.*

[256] KAYAS Georges J., voir *Euclide, Les éléments.*

[257] KLEIN Jacob, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, Berlin 1934, trad. Eva Brann, M.I.T. Press (Cambridge) 1968, Dover (New York) 1992.

[258] Kline Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press (New York) 1972.

[259] Koyré Alexandre, *Études galiléennes, II*, Hermann (Paris) 1939.

[260] L'œuvre scientifique de Pascal, éd. René Taton et *al.*, Centre international de synthèse, Presses Universitaires de France (Paris) 1964.

[261] La biografia intellettuale di René Descartes attraverso la Correspondance, éd. Jean-Robert Armogathe, Giulia Belgioioso et Carlo Vinti, Vivarium (Naples) 1999.

[262] Laborde Jean-Marie, voir *Imre Lakatos, Proofs and Refutations*.

[263] Lachterman David Rapport, *The ethics of geometry*, Routledge (New York et Londres) 1989.

[264] Lakatos Imre, *Proofs and Refutations : the Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press (Cambridge) 1976, 1977, 1979, 1981, 1983, 1984, 1987, 1988, 1989, 1991, 1993, 1994, 1995, 1997, 1999, trad. Nicolas Belacheff et Jean-Marie Laborde, *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann (Paris) 1984, 2000.

[265] Latham Marcia L., voir *René Descartes, The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*.

[266] Laugel L., voir *Bernhard Riemann, Œuvres mathématiques*.

[267] Launay Marc de, voir *Cohen Hermann, Le principe de la méthode infinitésimale et son histoire*.

[268] Le Discours et sa méthode, *Descartes et les mathématiques au collège* par Jean-Luc Marion, Presses Universitaires de France (Paris) 1987.

[269] Le Guern Michel, voir *Blaise Pascal, Œuvres complètes*.

[270] Le Roy Georges, voir *René Descartes, Regulæ ad directionem ingenii*.

[271] Lebesgue Henri, *Leçons sur les constructions géométriques*, éd. Lucienne Félix, Gauthier-Villars (Paris) 1950, Jacques Gabay (Sceaux) 2003.

[272] Lebesgue Henri, *Notices d'Histoire des Mathématiques*, Monographies de l'Enseignement Mathématique N° 4, éd. par Lucienne Félix, L'Enseignement Mathématique (Genève) 1958.

[273] Lebesgue Henri, *Œuvres scientifiques en cinq volumes*, L'Enseignement mathématique (Genève) 1973.

[274] Liard Louis, *Des définitions géométriques et des définitions empiriques*, Ladrange (Paris) 1873, Félix Alcan (Paris) 1903.

[275] Liard Louis, *Descartes*, Germer Baillière et Cie (Paris) 1882, Félix Alcan (Paris) 1903.

[276] Lockwood Edward Harrington, *A Book of Curves*, Cambridge University Press (Cambridge) 1961, 1970, 2007.
[277] Lojacono Ettore, voir *Descartes René, Opere scientifiche.*
[278] Mahammed Norreddine, *Sur la résolution des équations algébriques*, Université des Sciences et Techniques (Lille) 1995.
[279] Mahoney Michael Sean, *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton University Press (Princeton) 1973, 1994.
[280] Marion Jean-Luc, *Descartes et les mathématiques au collège*, in *Le Discours et sa méthode*, éd. Nicolas Grimaldi et Jean-Luc Marion, Presses Universitaires de France (Paris) 1987.
[281] Marion Jean-Luc, *Sur l'ontologie grise de Descartes*, Librairie philosophique Joseph Vrin (Paris) 1975.
[282] Marion Jean-Luc, voir *Jean-Robert Armogathe et Jean-Luc Marion, Index des Regulæ ad directionem ingenii de René Descartes.*
[283] Marion Jean-Luc, voir *René Descartes, Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit en la recherche de la vérité.*
[284] Maroger Alphonse, *Le problème de Pappus et ses cent premières solutions*, Vuibert (Paris) 1925.
[285] Maronne Sébastien : *Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637-1649*, in *DesCartes et DesLettres. Epistolari e filosofia in Descartes e nei cartesiani*, pages 62-91.
[286] Marrone Francesco, voir *DesCartes et DesLettres. Epistolari e filosofia in Descartes e nei cartesiani.*
[287] Mehl Édouard, *Descartes en Allemagne : le contexte de l'élaboration de la science cartésienne*, Presses Universitaires de Strasbourg (Strasbourg) 2001.
[288] Mehl Édouard, *Euclide et la fin de la Renaissance : sur la Scholie de la proposition XIII.18* in *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, vol. 56-2, pp. 439-55, Presses Universitaires de France (Paris) 2003.
[289] Mersenne Père Marin, *Correspondance de Mersenne*, ed. Cornelius de Waard et *al.*, 17 vol., Beauchesne puis CNRS (Paris) 1933-1988.
[290] Mesnard Jean, voir *Blaise Pascal, Œuvres complètes.*
[291] Milhaud Gaston, *Descartes savant*, Félix Alcan (Paris) 1921.
[292] Milhaud Gérard, voir *René Descartes, Correspondance de Descartes.*
[293] Minkowski Hermann, *Geometrie der Zahlen*, Teubner (Leipzig) 1896, 1910, Chelsea Publishing Company (New York) 1953, Johnson (New York) 1968, BiblioBazaar (Charleston) 2009.

[294] Montel Paul, *Pascal mathématicien*, Les conférences du Palais de la Découverte (Paris) 1950.
[295] Morrow Glenn Raymond, voir *Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.*
[296] Mugler Charles, voir *Archimède, Œuvres.*
[297] Mugler Charles, *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*, Klincksieck (Paris) 1958.
[298] Narcy Michel, voir *Platon, Théétète.*
[299] Panza Marco, *Newton et les origines de l'analyse : 1664-16666*, Coll. Sciences dans l'histoire, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard (Paris) 2005.
[300] Parmentier Marc, voir *Gottfried Wilhelm Leibniz, La caractéristique géométrique.*
[301] Parmentier Marc, voir *Gottfried Wilhelm Leibniz, Naissance du calcul différentiel.*
[302] Pellegrin Pierre, voir *Aristote, Seconds analytiques.*
[303] Peyrard François, voir *Euclide, Les œuvres d'Euclide.*
[304] Peyrard François, voir *Archimède, Œuvres.*
[305] Peyroux Jean, voir *Ioannis Keppleri, Harmonices Mundi.*
[306] Peyroux Jean, voir *François Viète, Œuvres mathématiques.*
[307] Rabouin David, *Mathesis Universalis, l'idée de mathématique universelle d'Aristote à Descartes*, Coll. Épiméthée, Presses Universitaires de France (Paris) 2009.
[308] Ramos Edgar, voir *Linear-Time Triangulation of a Simple Polygon Made Easier Via Randomization.*
[309] Rashed Roshdi, *De la Dioptrique à la Géométrie : les Ovales de Descartes*, in *Physis, Rivista internazionale di Storia della Scienze*, volume XLII, nouvelle série, fascicule 2, (Firenze) 2005.
[310] Rashed Roshdi, voir *Descartes et le Moyen Âge.*
[311] Rashed Roshdi, voir *Introduction générale, édition, traduction et commentaire du texte arabe du livre I d'Apollonius de Perge, édition et traduction du text grec.*
[312] Rashed Roshdi, voir *Jean Itard, Essais d'histoire des mathématiques.*
[313] Rashed Roshdi, voir *Pierre Fermat, Œuvres de Pierre Fermat.*
[314] Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, vol. 9 9/4, Presses Universitaires de France (Paris) 1956.
[315] Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, vol. 15 3/4, Presses Universitaires de France (Paris) 1962.

[316] Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, vol. 16 16/2, Presses Universitaire de France (paris) 1963.

[317] Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, « *Pour Descartes* » *Mathématiques et physique cartésiennes*, vol. 51 2/3, Presses Universitaires de France (Paris) 1998.

[318] Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, vol. 56-2, Presses Universitaires de France (Paris) 2003.

[319] Revue de la filière Mathématiques (RMS), ex *Revue de Mathématiques Spéciales*, Vuibert (Paris) jusqu'en 2003, Rue des Écoles (Paris) depuis 2004.

[320] Revue de Métaphysique et de Morale, *La signification historique de la Géométrie de Descartes*, Pierre Boutroux, (Paris) 1914, Vigdor (Paris) 2003.

[321] Rivaud Albert, voir *Platon, Le Timée.*

[322] Rovelli Daniela, voir *Galuzzi, Nouveauté et modernité dans les mathématiques de Descartes.*

[323] Rossellini Roberto, *Blaise Pascal*, film de 1972, DVD Carlotta (Paris) 2009.

[324] Rossellini Roberto, *Descartes*, film en 2 parties de 1973-4, DVD Carlotta (Paris) 2009.

[325] Salamon Simon, voir *Alfred Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.*

[326] Sasaki Chikara, *Descarte's mathematical thought*, Boston Studies in the Philosophy of Sciences 237, Kluwer Academic Publisher Library (Dordrecht) 2003.

[327] Schooten Frans Van, voir *René Descartes, Geometria Renato Des Cartes 1637 gallica edita.*

[328] Scott Joseph Frederick, *The scientific work of René Descartes (1596-1650)*, Taylor & Francis (Londres) 1952, Garland (New York et Londres) 1987.

[329] Segonds Alain Philippe, voir *Ioanne Keplero, Prodomo dissertationum cosmographicarum:.*

[330] Serfati Michel, *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Éditions Pétra (Paris) 2005.

[331] Serfati Michel et *al.*, *De la méthode : Recherches en histoire et philosophie des mathématiques*, Presses Universitaires Franc-Comtoises (Besançon) 2002.

[332] SERFATI Michel et DESCOTES Dominique. dir., *Mathématiciens français du XVII^e siècle : Descartes, Fermat, Pascal*, Presses Universitaires Blaise Pascal, Centre d'études sur les réformes, l'humanisme et l'âge classique, Centre internatonal Blaise Pascal (Clermont-Ferrand) 2008.
[333] SEVIN Alain, voir *Histoire des polyèdres*.
[334] SHEA William R., *The magic of numbers and motion, the scientific career of René Descartes*, Science History Publications (Canton Mass.) 1991.
[335] *Sinègre* Luc, voir *Histoire du calcul de la géométrie à l'algèbre*.
[336] SIRVEN Abbé Jean, *Les années d'apprentissage de Descartes*, Imprimerie coopérative du Sud-ouest (Albi) 1928.
[337] SIRVEN Abbé Jean, voir *René Descartes, Règles pour la direction de l'esprit*.
[338] SMITH David Eugen, *A Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill (New York) 16229, Dover (New York) 1959.
[339] SMITH David Eugen, *History of Mathematics*, 2 vol., Ginn and Company (Boston) 1923-1925, Dover (New York) 1958.
[340] SMITH David Eugen, voir *René Descartes, The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*.
[341] STILLWELL John, *Mathematics and its history*, Springer-Verlag (New York) 1989.
[342] SUTTON Daud, *Platonic and Archimedean Solids*, Wooden Books Ltd (Glastonbury) 1998, 2005.
[343] TALIAFERRO Robert Casteby, voir *Apollonius of Perga, Conics*.
[344] TANNERY Paul, *La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri, étudiée pour l'histoire des mathématiques*, Gauthier-Villars (Paris) 1893.
[345] TANNERY Paul, *Mémoires scientifiques*, vol. I, Privat (Toulouse) et Gauthier-Villars (Paris) 1912, Jacques Gabay (Paris) 1995.
[346] TANNERY Paul, *Mémoires scientifiques*, vol. VI, Privat (Toulouse) et Gauthier-Villars (Paris) 1926, Jacques Gabay (Paris) 1996.
[347] TANNERY Paul, voir *Pierre de Fermat, Œuvres de Pierre Fermat*.
[348] TANNERY Paul, voir *René Descartes, Œuvres de Descartes*.
[349] THE INVESTIGATION OF DIFFICULT THINGS : essays on Newton and the history of the exact sciences in honor of Derek Thomas Whiteside, éd. Peter Michael Harman et Alan Elihu Shapiro, Cambridge University Press (Cambridge) 1992, 2002.
[350] THOMAS Ivor, *Great mathematical works : selections illustrating the history of greek mathematics with an english translation by*, 2 vol., *Loeb*

classical library : William Heinemann (Londres) et Harvard University Press (Cambridge) 1939-41, 1951, 1957, 1967-8.
[351] Toomer Gerald James, voir *Apollonius, Conics Books V to VII.*
[352] Tricot Jules, voir *Aristote, Les seconds analytiques : Organon IV.*
[353] Unguru Sabetai, voir *Michael N. Fried et Sabetai Unguru, Apollonius of Perga Conica : text, context, subtext.*
[354] Vaulézard Jean-Louis, *La nouvelle algèbre de M. Viète*, ed. Jean-Robert Armogathe, Fayard (Paris) 1986.
[355] Ver Eecke Paul, voir *Archimède, Les œuvres complètes.*
[356] Ver Eecke Paul, voir *Diophante d'Alexandrie, Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.*
[357] Ver Eecke Paul, voir *Les coniques d'Apollonius de Perge.*
[358] Ver Eecke Paul, voir *Pappus d'Alexandrie, la collection mathématique.*
[359] Vinti Carlo, voir *La biografia intellettuale di René Descartes attraverso la Correspondance.*
[360] Vitrac Bernard, voir *Euclide, Les éléments.*
[361] Vuillemin Jules, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Presses Universitaires de France (Paris), 1960, 1970, 2000.
[362] de Waard Cornelius, voir *Mersenne, Correspondance.*
[363] Vitrac Bernard, voir *Euclide, Les éléments.*
[364] Walker Robert J., *Algebraic Curves*, Princeton University Press (Princeton) 1950, Dover (New York) 1962.
[365] Warusfel André, *Euler : les mathématiques et la vie*, Vuibert (Paris) 2009.
[366] Warusfel André, *L'œuvre mathématique de Descartes*, 2 vol., Vuibert (Paris) à paraître.
[367] Warusfel André, *Polygones convexes du plan euclidien*, in *Revue de Mathématiques Spéciales*, 103ème année numéro 3 (novembre), pp. 173-7, Vuibert (Paris) 1992.
[368] Warusfel André, *Programmation linéaire sur un corps totalement ordonné*, in *Revue de Mathématiques Spéciales*, 102ème année numéro 8 (avril), pp. 385-94, Vuibert (Paris) 1992.
[369] Whiteside Derek Thomas, voir *Isaac Newton, The Mathematical Papers.*
[370] Witmer T. Richard, voir *François Viète, The analytic art.*

Table des matières